Física I

Rotações e momento angular

Física I

Rotações e momento angular
(Aula V)

Rotações: dinâmica

- Até agora nos limitamos a rotações no plano $z = 0$. Nesse caso, tanto faz definir:

$$\overrightarrow{L} = m\,\vec{r} \times \overrightarrow{v} = \vec{r} \times \overrightarrow{p} \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{L} = m\,\omega\,\rho^2\,\hat{z}$$

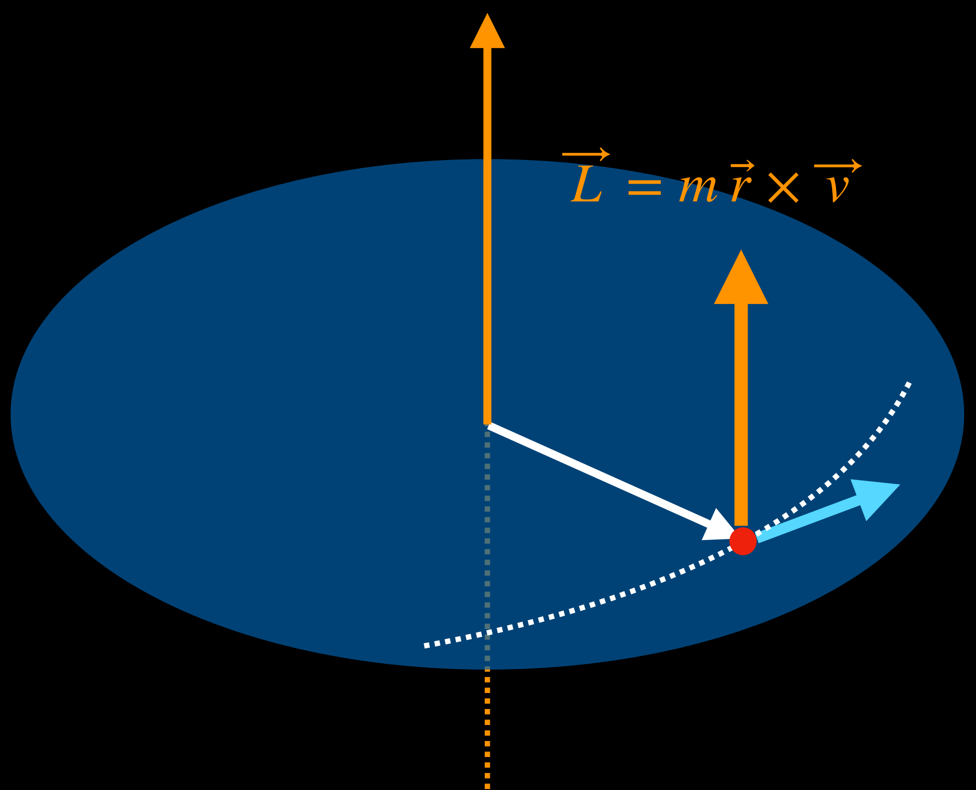
- Vimos também que a ***Lei do Torque***, que é simplesmente a "2a Lei de Newton para rotações", determina a ***variação do momento angular***:

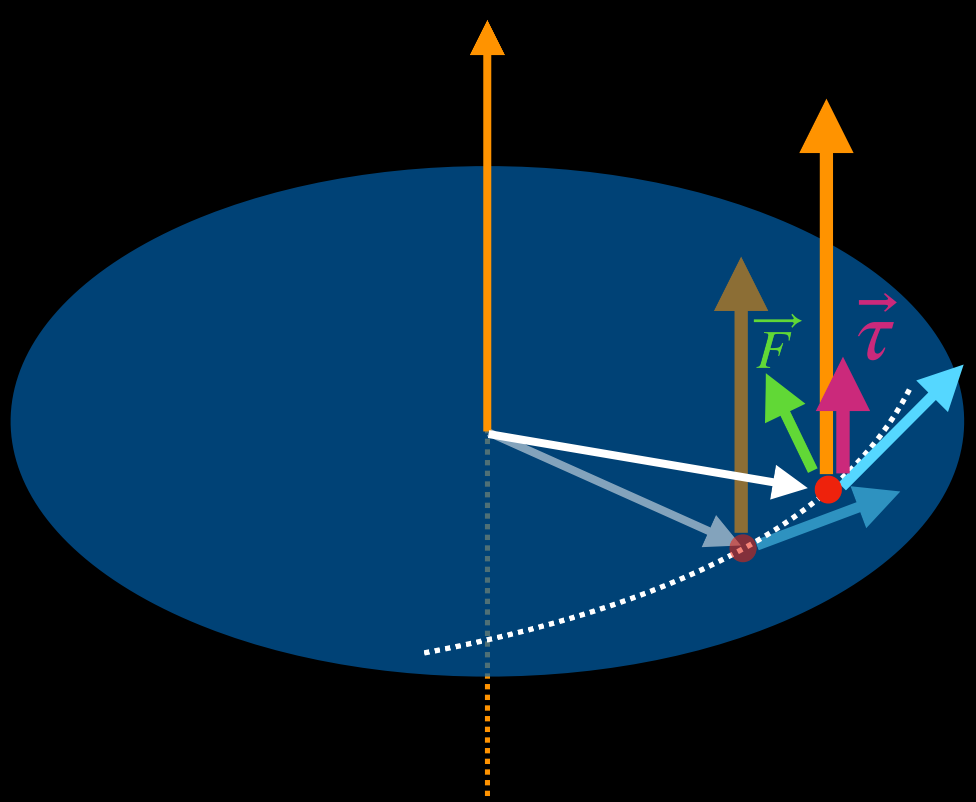
$$\vec{\tau} \;=\; \frac{d\overrightarrow{L}}{dt} \quad , \quad \text{com} \quad \vec{\tau} \;=\; \vec{r} \times \overrightarrow{F}$$

- Também vimos que ao movimento de rotação corresponde uma ***energia cinética de rotação***:

$$\vec{\tau} \;=\; \frac{d\overrightarrow{L}}{dt} \quad , \quad \text{com} \quad K_{Rot} \;=\; \frac{1}{2}\,I_m\,\overrightarrow{\omega}^2$$

onde o ***momento de inércia*** de uma massa m com respeito ao eixo de rotação é $I_m = m\,\rho^2$





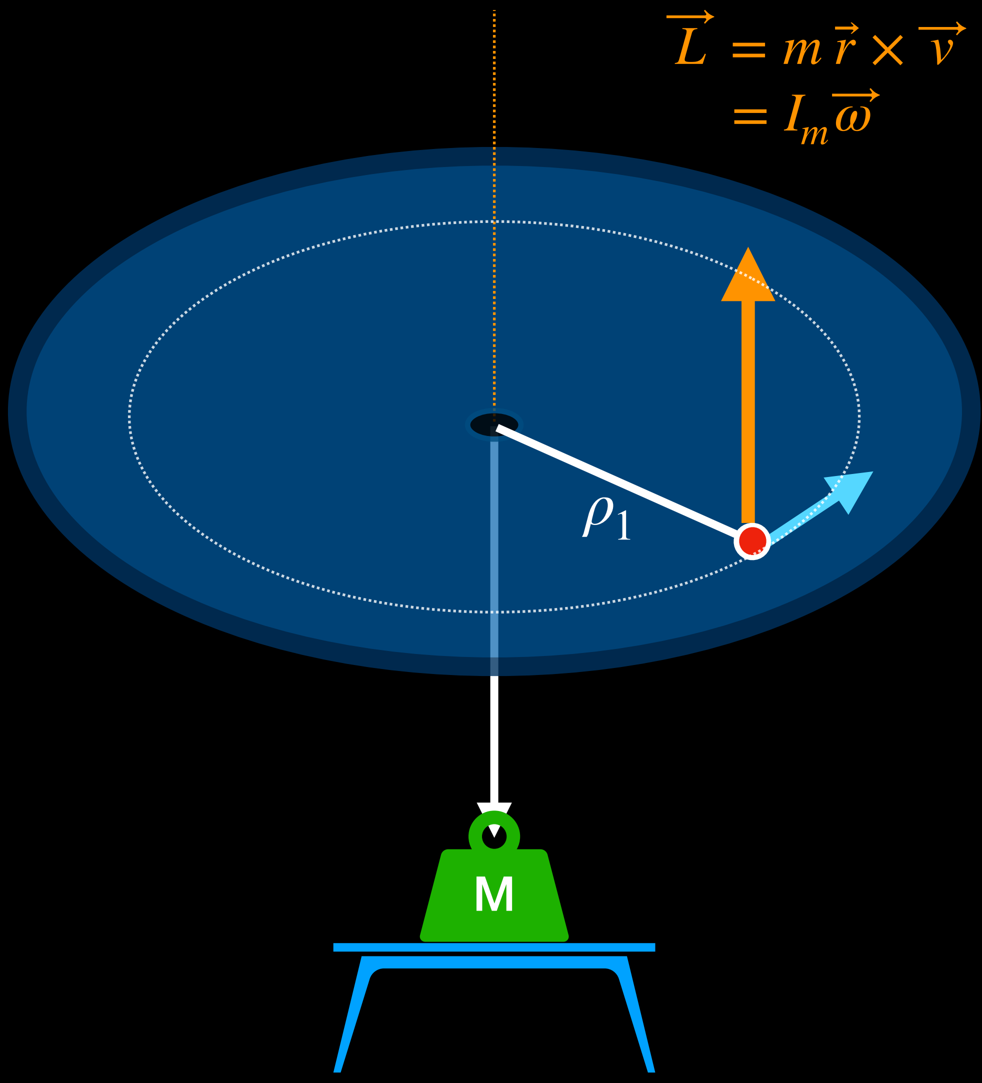
Rotações: exemplo simples

- Vamos considerar um exemplo simples, no qual o ***torque é nulo***, e portanto ***o momento angular se conserva***.
- Uma massa m desliza na superfície de um disco sem atrito, presa a uma corda que passa pelo centro do disco que está ligada a uma massa M (que está em repouso).
- Claramente, a tensão da corda que prende a massa m é radial, portanto ela produz torque nulo:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \to 0 \,,$$

e portanto, ***mesmo que a corda seja puxada***, o momento angular se conservará:

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = \text{constante}$$



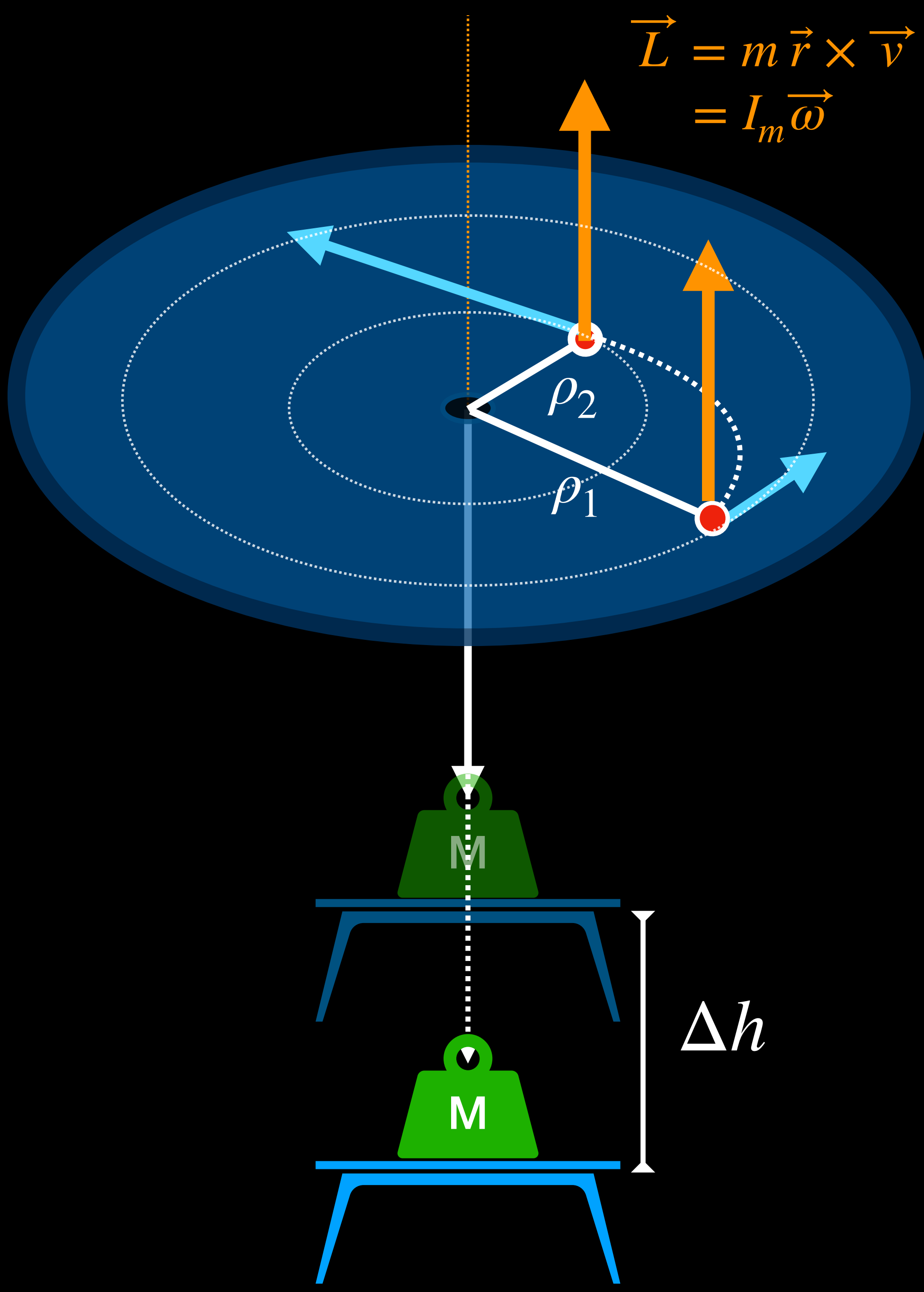
Rotações: exemplo simples

- Vamos agora supor que baixamos lentamente a massa M , até que ela repousa a uma altura Δh abaixo da sua posição inicial.
- Qual a velocidade angular da massa m no estado final?
- Vamos começar notando que o ***torque é nulo*** (pois $\vec{r} \times \overrightarrow{F} \sim \vec{r} \times \vec{r} = 0$), portanto o ***momento angular se conserva***:

$$\overrightarrow{L}_1 = m \rho_1^2 \omega_1 \hat{z} \quad = \quad \overrightarrow{L}_2 = m \rho_2^2 \omega_2 \hat{z}$$

e portanto

$$\omega_2 = \frac{\rho_1^2}{\rho_2^2} \omega_1$$



Rotações: exemplo simples

- Por outro lado, também temos conservação de energia: foi a variação da energia potencial gravitacional de M que pôde aumentar a energia cinética da massa m

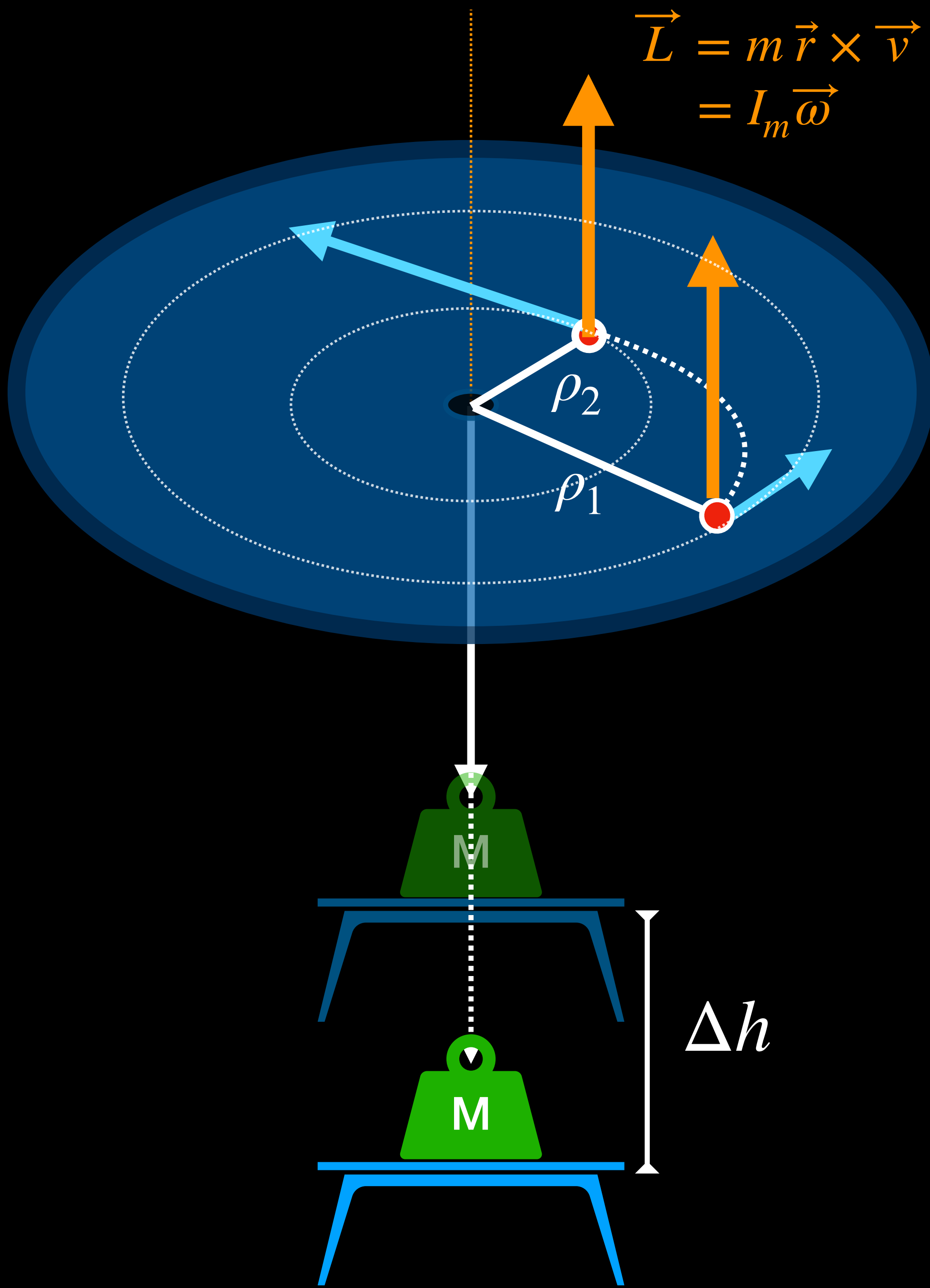
- ***Conservação de energia*** significa que:

$$M\,g\,h_1 + \frac{1}{2} I_1\,\omega_1^2 \;=\; M\,g\,h_2 + \frac{1}{2} I_2\,\omega_2^2 \quad , \quad h_1 = h_2 + \Delta h$$

- Juntando com a ***conservação do momento angular***, $\omega_2 \;=\; (\rho_1^2/\rho_2^2)\,\omega_1$, obtemos que:

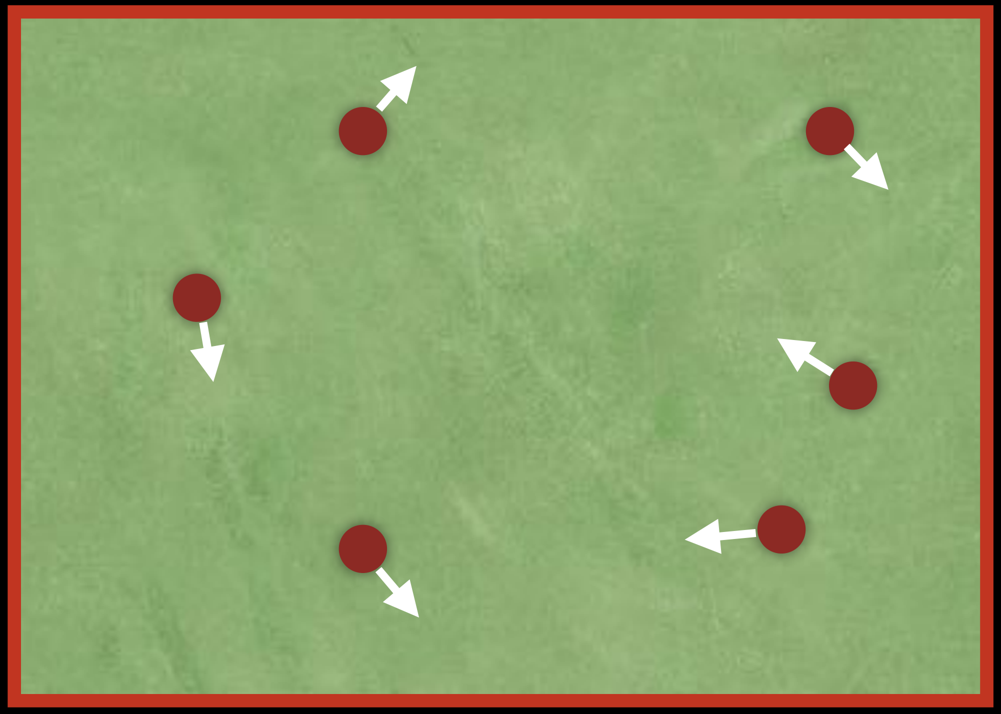
$$\frac{\rho_1^2}{\rho_2^2} \;=\; 1 \;+\; \frac{2Mg\Delta h}{m\,\rho_1^2\,\omega_1^2}$$

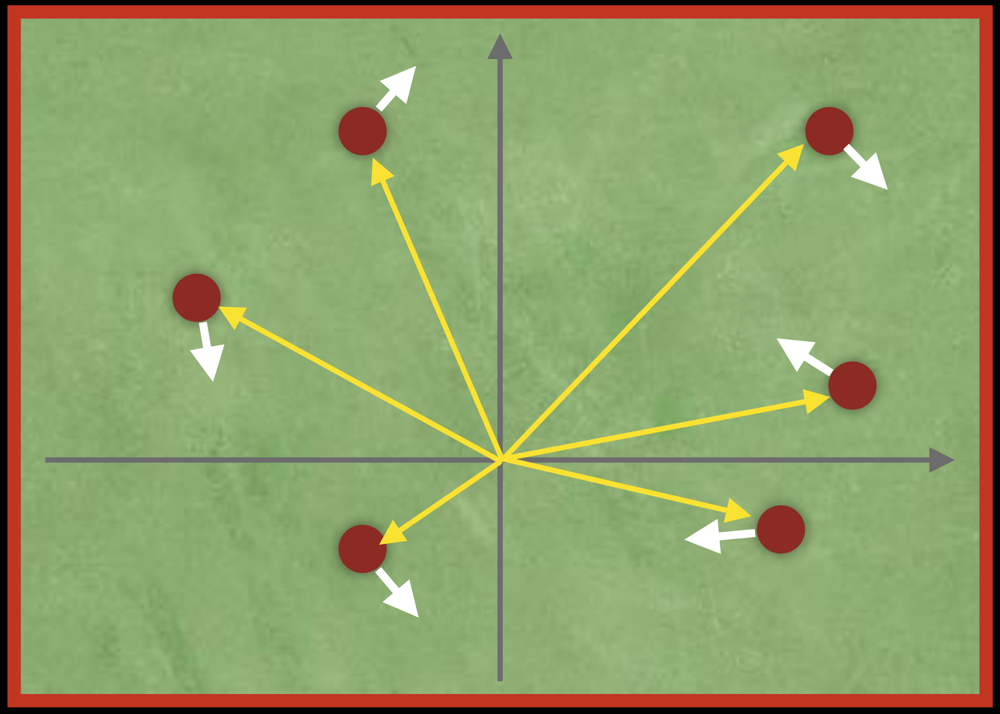
$$\omega_2 \;=\; \left(1 + \frac{2Mg\Delta h}{m\,\rho_1^2\,\omega_1^2} \right) \omega_1$$



Momento angular de um sistema

- Vamos agora começar a ampliar o escopo dos conceitos introduzidos até agora. Assim como o momento de um sistema de partículas é dado pela soma (vetorial!) dos momentos de cada partícula, o mesmo vale para o momento angular:





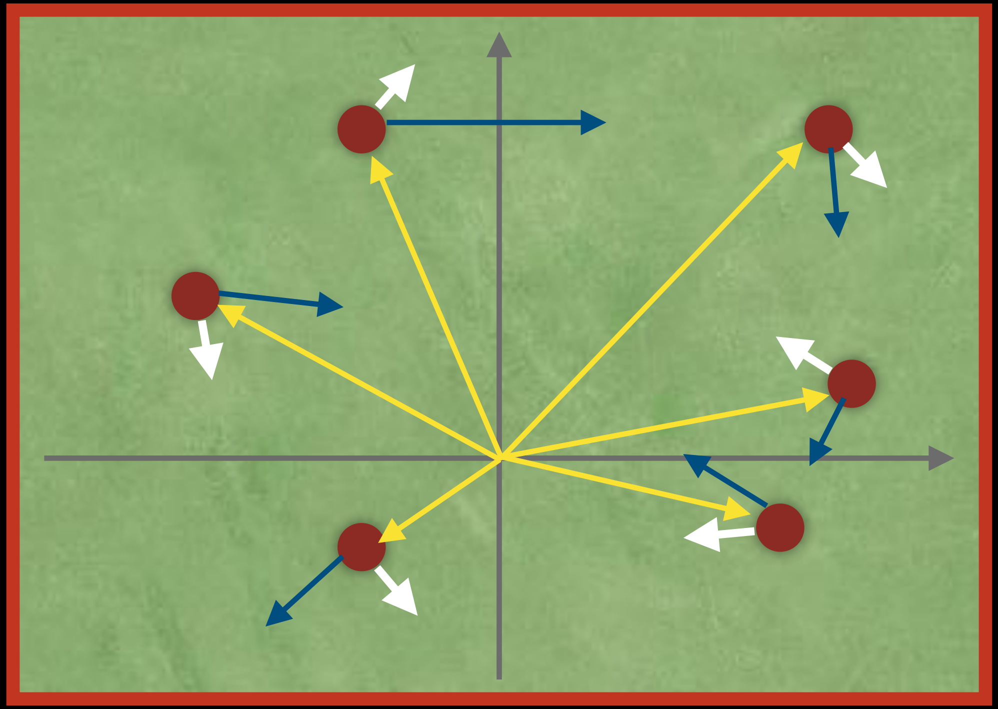
$$\vec{P}_{Tot} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{L}_{Tot} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

- Lembrando que o momento angular de todas as partículas acima está medido com respeito ao mesmo ponto (aqui, a origem do referencial)

Momento angular de um sistema

- Então, nosso ponto de partida será esse momento angular total de um sistema de partículas:

$$\vec{L}_{Tot} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$



- Vamos supor que cada partícula está sujeita a uma força $\vec{F}_i$, de tal forma que parte dessa força é devida à interação entre as partículas do sistema, e o restante vamos chamar de "forças externas". Ou seja:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{Ext} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{j \to i}$$

Momento angular de um sistema

- Queremos agora saber o que vai acontecer com esse momento angular total: vai aumenta? Vai diminuir? Vai permanecer constante?
- Para responder essa questão devemos perguntar como o momento angular muda com o tempo, ou seja, o torque. Cada partícula está sujeita a um torque de $\vec{\tau}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$, portanto o torque total será:

$$\vec{\tau}_{Tot} = \frac{d\vec{L}_{Tot}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_i \vec{\tau}_i \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{\tau}_{Tot} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

- Lembrando agora que a força na i-ésima partícula é:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{Ext} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{j \to i} \quad ,$$

temos que:

$$\vec{\tau}_{Tot} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \left[\vec{F}_i^{Ext} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{j \to i} \right] = \vec{\tau}^{Ext} + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{r}_i \times \vec{F}_{j \to i}$$

Momento angular de um sistema

- Antes de proceder, vamos usar um "truque" que já introduzimos em aulas passadas: substituir uma ***soma sobre todas as partículas*** por uma soma sobre ***pares*** de partículas. Ou seja, o torque interno pode ser reescrito do seguinte modo:

$$\sum_{i,j\neq i} \vec{r}_i \times \vec{F}_{j\to i} = \frac{1}{2}\left[\sum_{i,j\neq i} \vec{r}_i \times \vec{F}_{j\to i} + \sum_{j,i\neq j} \vec{r}_j \times \vec{F}_{i\to j}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{i,j\neq i} \vec{r}_i \times \vec{F}_{j\to i} + \sum_{j,i\neq j} \vec{r}_j \times (-\vec{F}_{j\to i})\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j\neq i} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{j\to i} = \sum_{i,j<i} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{j\to i}$$

- Mas note que se força "interna", entre as partículas, for na direção radial, $\vec{F}_{j\to i} \sim \vec{r}_i - \vec{r}_j$, então $(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{j\to i} = 0$, e nesse caso o ***torque interno será zero***:

$$\vec{\tau}^{Int} = \sum_{i,j<i} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times F_{j\to i} \;\to\; 0$$

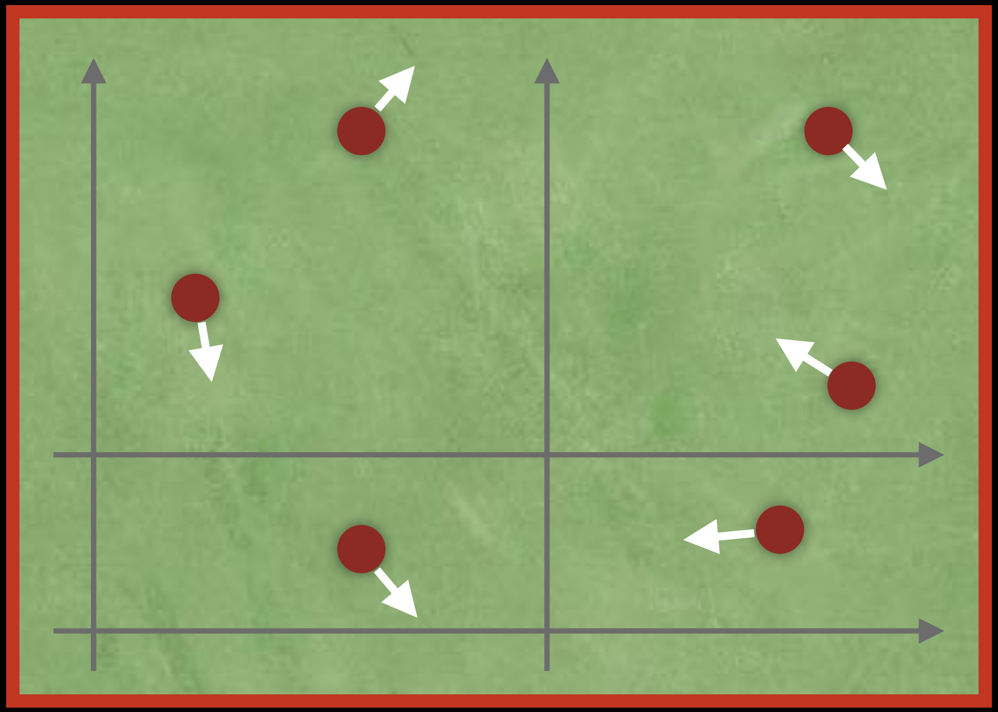
- Portanto, um sistema de partículas que não está sujeito a forças externas, e cujas interações são forças radiais, tem o ***momento angular conservado***, $\vec{L}_{Tot} =$ constante!

Simetrias e leis de conservação

- Mas será que esse resultado não é ainda mais geral?… Afinal, a conservação de momento depende apenas das forças serem conservativas, $\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots; t)$, onde U é a energia potencial desse sistema de partículas.

- Vamos derivar esse resultado usando o conceito de ***simetrias e leis de conservação***. Para começar, um caso simples: ***conservação de momento*** e ***simetria por translação***.

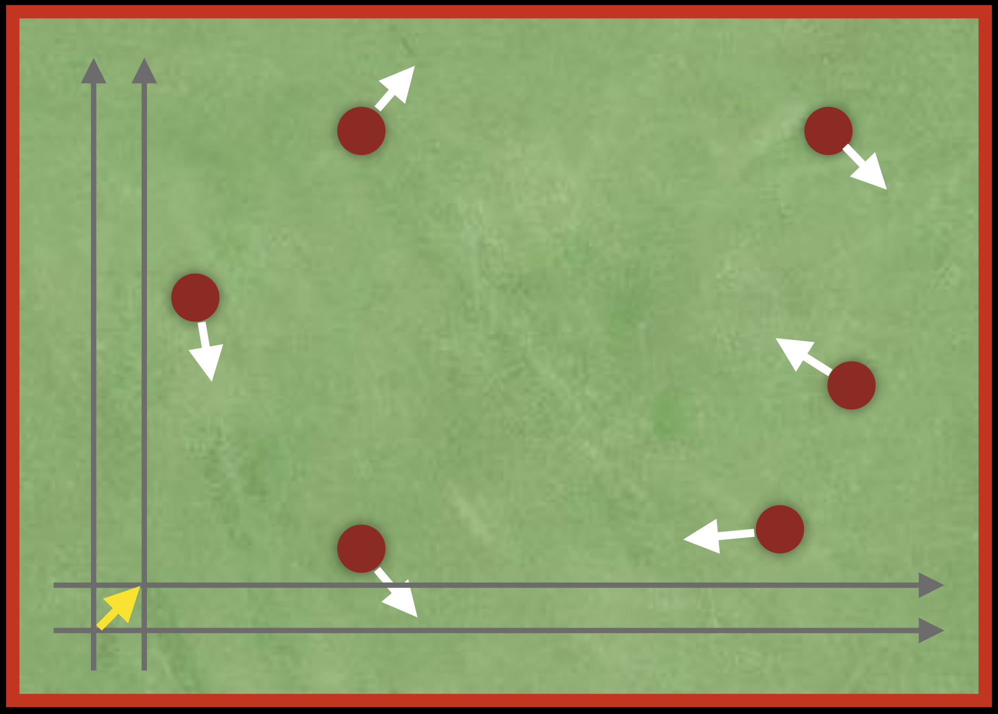
- Sabemos que tanto faz se um sistema é descrito a partir de um dado ponto, ou se movemos esse ponto de referência para qualquer outro local por meio de uma translação



Simetrias e leis de conservação

- Vamos supor que as forças são conservativas, tais que $\overrightarrow{F}_i = -\overrightarrow{\nabla}_i U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots; t)$.
- Uma translação infinitesimal da origem do sistema de coordenadas de $\delta\vec{r}$ é equivalente a uma translação $\delta\vec{r}$ na posição de todas as partículas.
- E a energia potencial do sistema deve ser invariante por uma translação global, de todas as partículas:

$$U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots; t) = U(\vec{r}_1 + \delta\vec{r}, \vec{r}_2 + \delta\vec{r}, \ldots\ ; t)$$



Simetrias e leis de conservação

- Portanto, a ***invariância por translações*** implica na equação:

$$U(\vec{r}_1 + \delta\vec{r}, \vec{r}_2 + \delta\vec{r}, \dots\ ; t) - U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots; t) = 0$$

- Mas uma função escalar qualquer pode ser expandida como:

$$G(\vec{r} + \delta\vec{r}) = G(\vec{r}\,) \ + \ \delta\vec{r} \cdot \vec{\nabla} G(\vec{r}\,) + \mathcal{O}(\delta r^2)\ ,$$

ao passo que uma função de duas variáveis se expande como:

$$G(\vec{r}_1 + \delta\vec{r}_1\,, \vec{r}_2 + \delta\vec{r}_2) = G(\vec{r}\,) \ + \ \delta\vec{r}_1 \cdot \vec{\nabla}_1 G \ + \ \delta\vec{r}_2 \cdot \vec{\nabla}_2 G \ + \ \mathcal{O}(\delta r_1^2, \delta r_2^2, \delta r_1\, \delta r_2)$$

- Portanto, a invariância por translações pode ser expressa como:

$$U \ + \ \delta\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_1 U \ + \ \delta\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_2 U \ + \ \dots \ - \ U = 0$$

Mas isso é simplesmente dizer que:

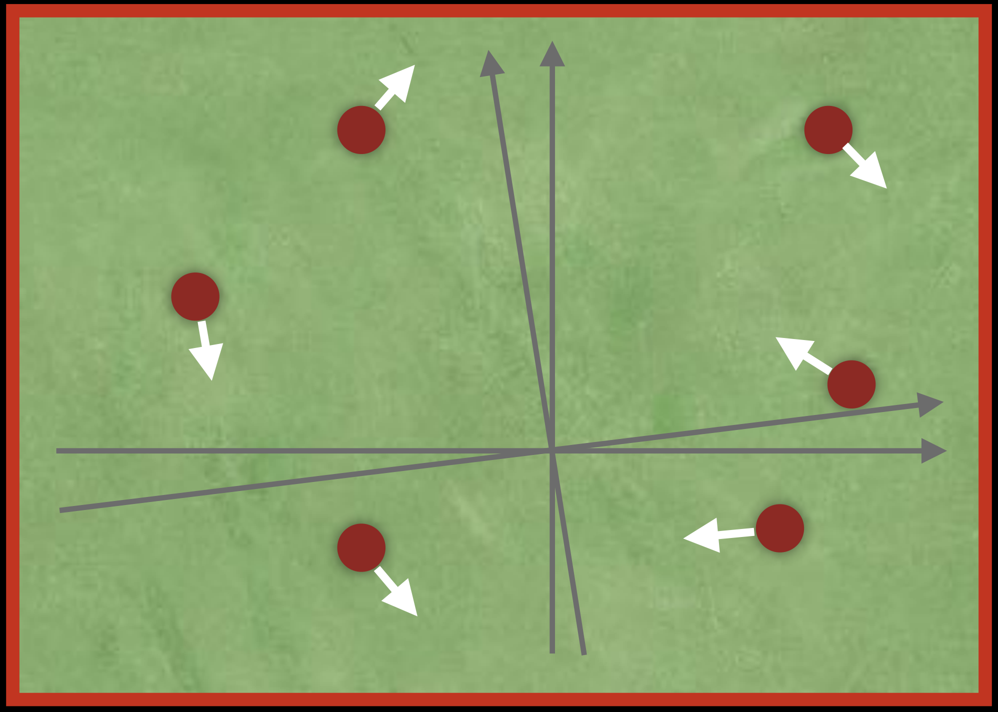
$$\delta\vec{r} \cdot \sum_i \vec{\nabla}_i U = -\,\delta\vec{r} \cdot \sum_i \vec{F}_i = 0$$

- Como esse resultado vale qualquer que seja a translação $\delta\vec{r}$, isso vale dizer que a resultante das forças é nula, e assim temos:

$$\frac{d\,\vec{P}_{Tot}}{dt} = \vec{F}_{Tot} = \sum_i \vec{F}_i = 0 \qquad , \qquad \text{ou seja, conservação de momento!}$$

Simetrias e leis de conservação

- Ok, então a ***invariância por translações*** leva à conservação do ***momento***.
- Será que a ***invariância por rotações*** não levaria à conservação do ***momento angular***?
- Vamos então exigir que um sistema possa ser descrito por um referencial que está ***orientado*** de qualquer forma:

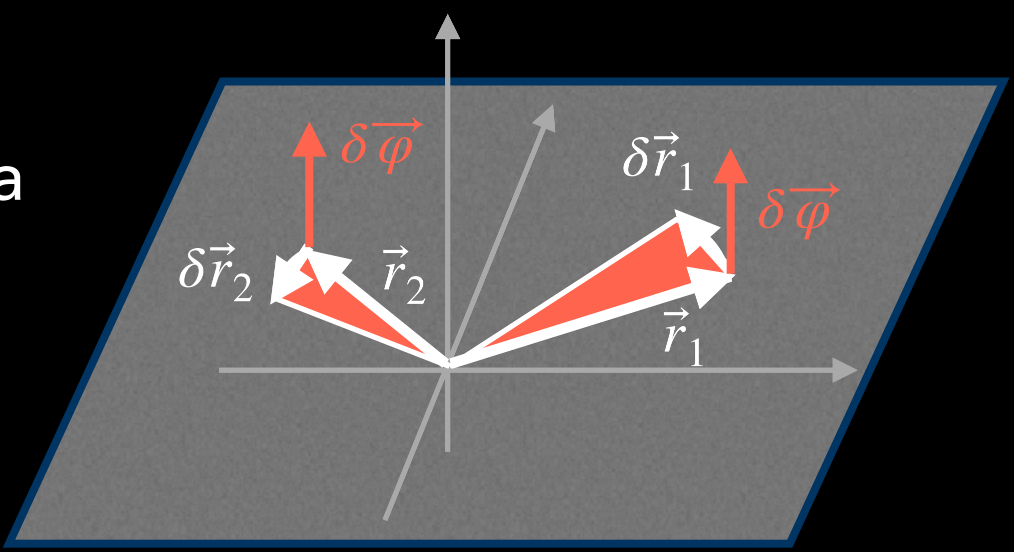


Simetrias e leis de conservação

- Vamos também exigir invariância da energia potencial, mas agora por rotações:

$$U(\vec{r}_1 + \delta\vec{r}_1, \vec{r}_2 + \delta\vec{r}_2, \ldots\ ; t) - U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots; t) = 0\ ,$$

onde todas essas translações descendem de uma rotação por um ângulo infinitesimal $\delta\overrightarrow{\varphi}$:



$$\delta\vec{r}_1 = \delta\overrightarrow{\varphi} \times \vec{r}_1 \quad ,$$

$$\delta\vec{r}_2 = \delta\overrightarrow{\varphi} \times \vec{r}_2 \quad , \quad \text{etc.}$$

Simetrias e leis de conservação

- Portanto, agora a exigência da invariância por rotações fica expressa como:

$$U(\vec{r}_1 + \delta\vec{r}_1, \vec{r}_2 + \delta\vec{r}_2, \ldots\ ; t) - U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots; t) = 0$$

- Temos então, usando a série de Taylor em termos dos gradientes:

$$U(\vec{r}_1 + \delta\vec{r}_1\,, \vec{r}_2 + \delta\vec{r}_2) = U(\vec{r}\,) \;+\; \delta\vec{r}_1 \cdot \vec{\nabla}_1 U \;+\; \delta\vec{r}_2 \cdot \vec{\nabla}_2 U \;+\; \mathcal{O}(\delta r^2)$$

- Portanto, a invariância por rotações pode ser expressa como:

$$U \;+\; \delta\vec{r}_1 \cdot \vec{\nabla}_1 U \;+\; \delta\vec{r}_2 \cdot \vec{\nabla}_2 U \;+\; \ldots \;-\; U = 0$$

Mas agora lembre-se que $\delta\vec{r}_i = \delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_i$, então isso é simplesmente dizer que:

$$\sum_i \left(\delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_i\right) \cdot \vec{\nabla}_i U = -\sum_i \left(\delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_i\right) \cdot \vec{F}_i = 0$$

- Nesse momento, lembre-se daquela identidade que já usamos no passado:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}\,) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}\,) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}\,)$$

- Portanto, a equação da invariância por rotações pode ser escrita como:

$$\sum_i \left(\delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_i\right) \cdot \vec{F}_i = \sum_i \delta\vec{\varphi} \cdot \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right) = \delta\vec{\varphi} \cdot \left(\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i\right) = 0$$

Simetrias e leis de conservação

- Portanto, como a rotação $\delta\overrightarrow{\varphi}$ é arbitrária temos que a invariância por rotações implica que:

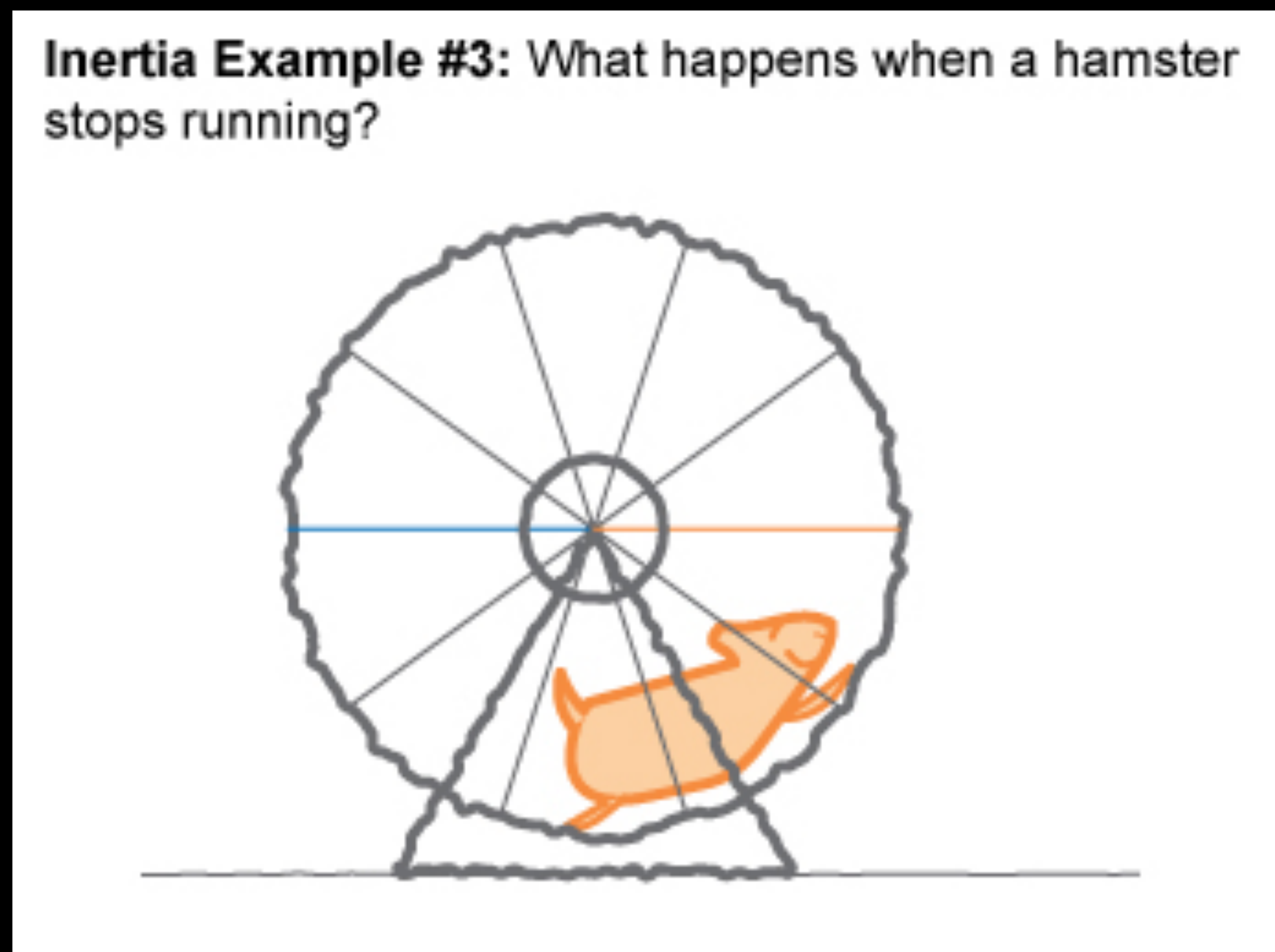
$$\vec{\tau}_{Tot} = \sum_i \vec{\tau}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \overrightarrow{F}_i = 0$$

- Ou seja, o ***torque total*** do sistema é nulo! Portanto,

$$\frac{d\overrightarrow{L}_{Tot}}{dt} = \vec{\tau}_{Tot} = 0$$

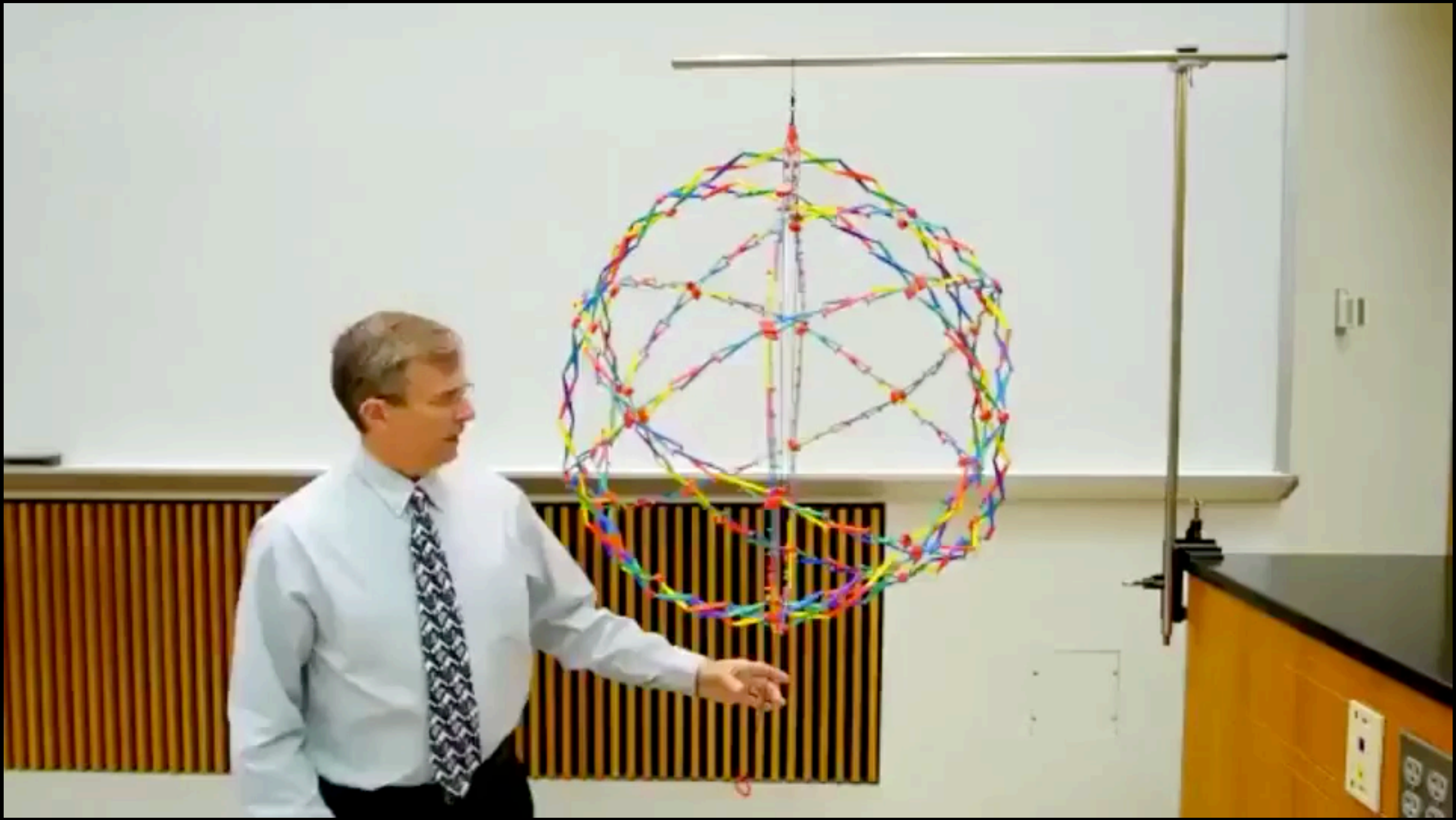
- Portanto, o ***momento angular total do sistema se conserva***!
- E o momento angular se conserva como consequência de uma ***simetria básica da natureza***: não há nenhuma "preferência" do universo por uma direção específica, para cima, para baixo, para a direita ou para a esquerda.
- Qualquer orientação que você escolher para descrever um sistema físico é tão boa quanto qualquer outra: as Leis da Física são as mesmas!

Conservação de momento angular

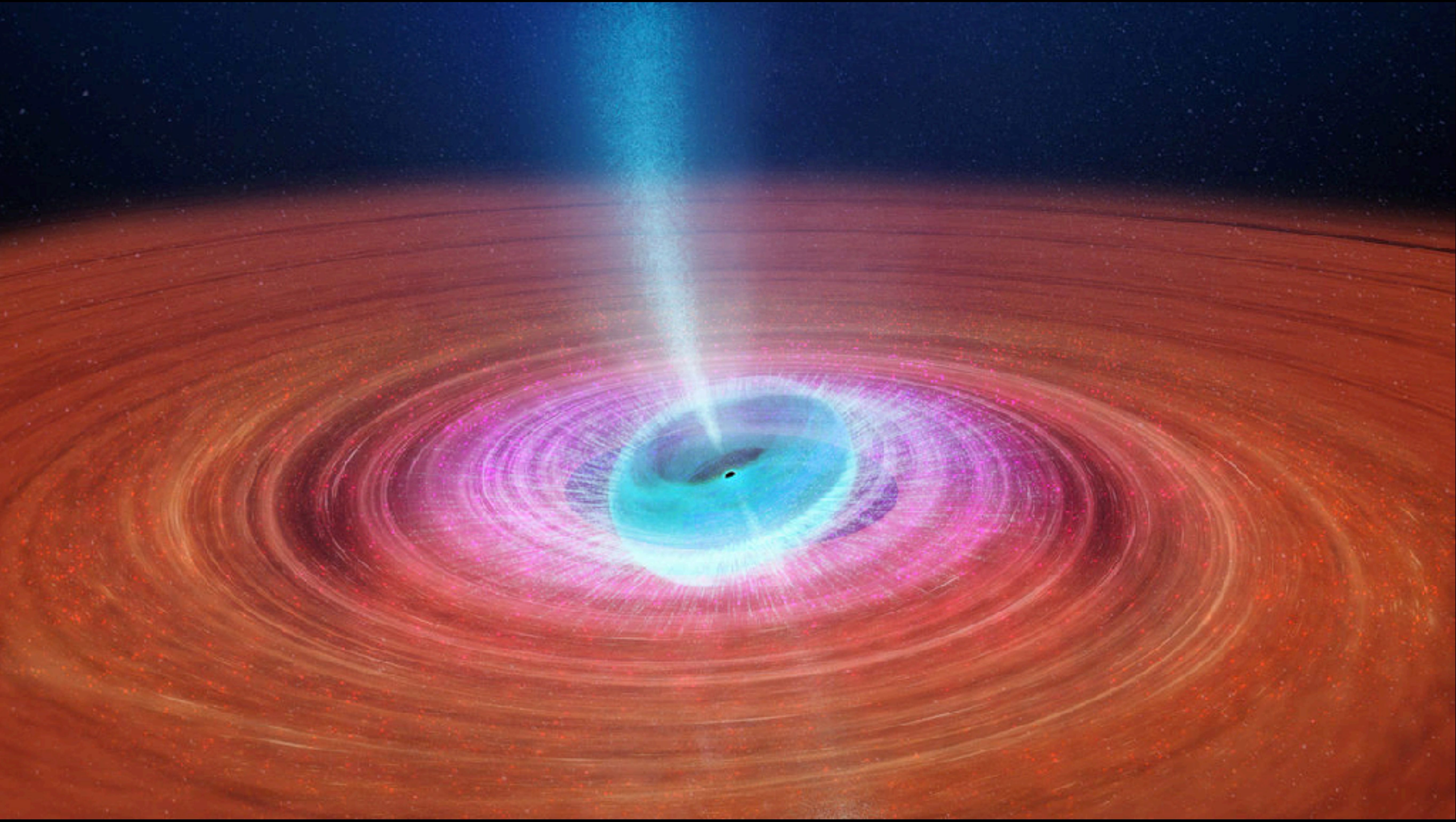


Conservação de momento angular

Conservação de momento angular

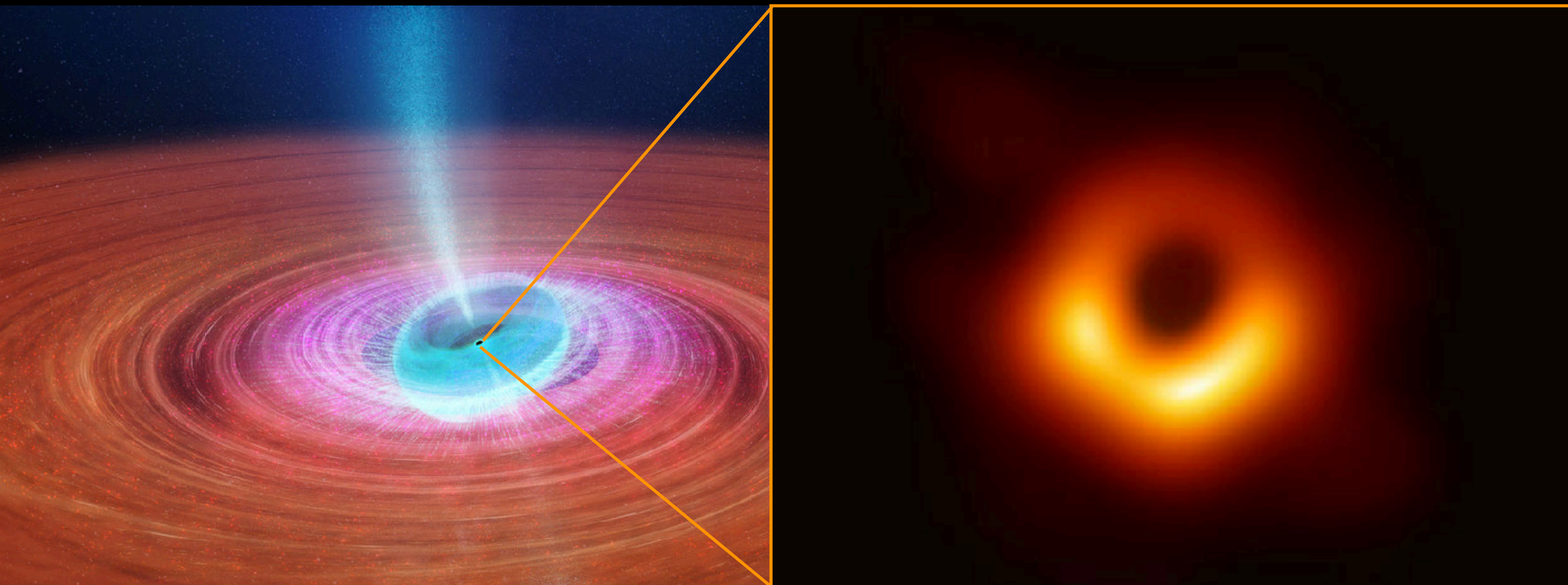


Conservação de momento angular



Buracos negros também têm momento angular!

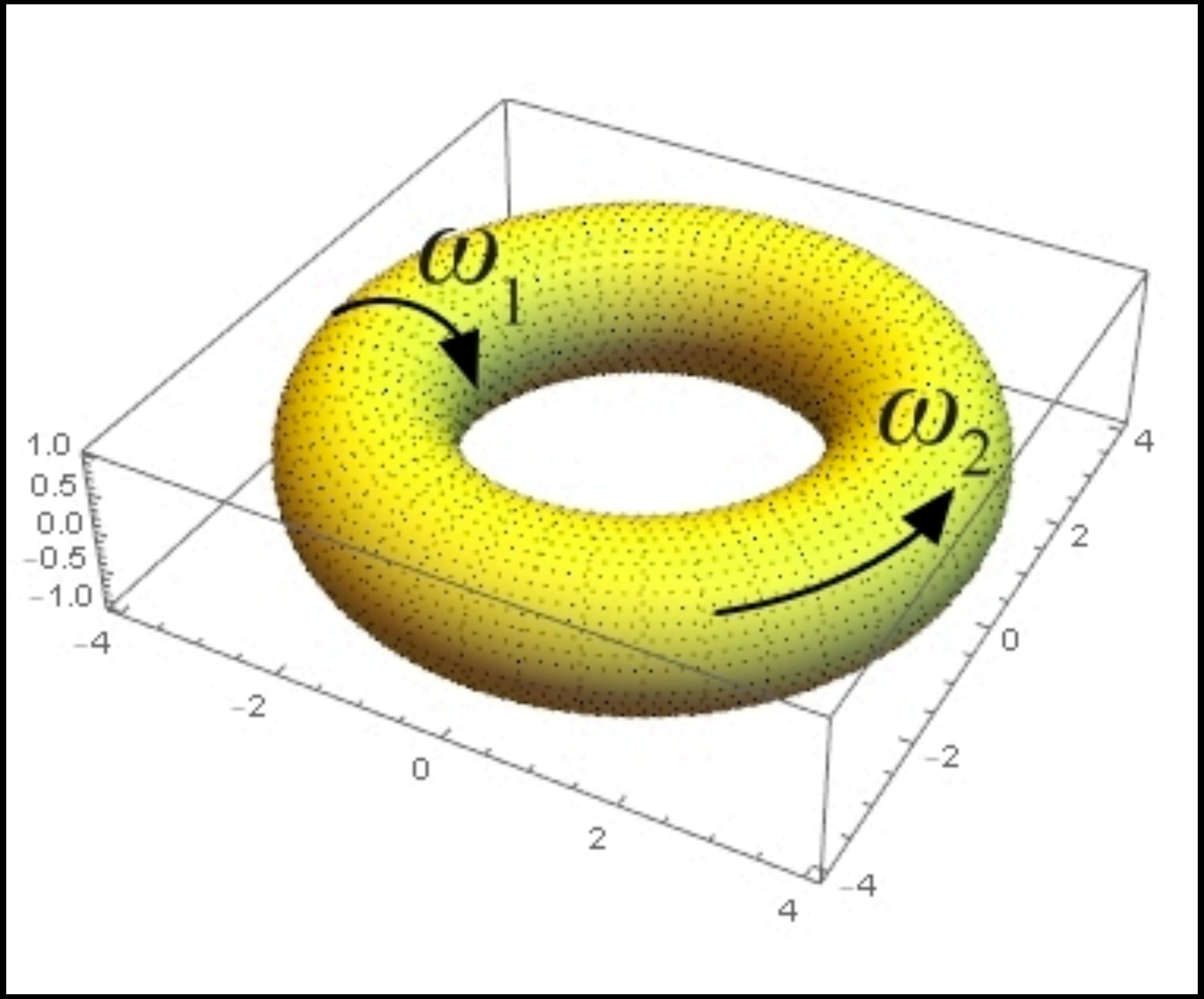
Conservação de momento angular

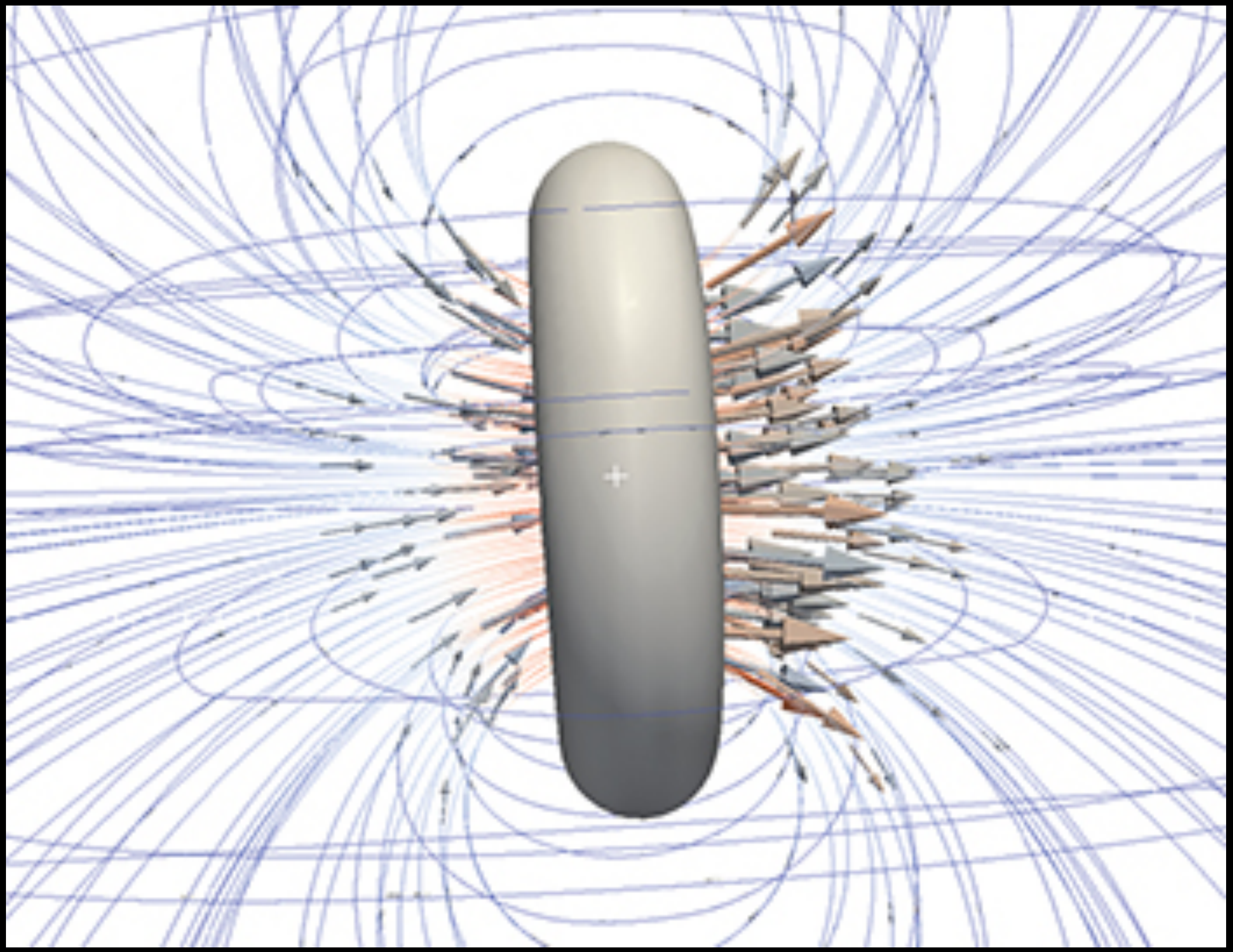


Event Horizon Telescope

Buracos negros também têm momento angular!

Conservação de momento angular

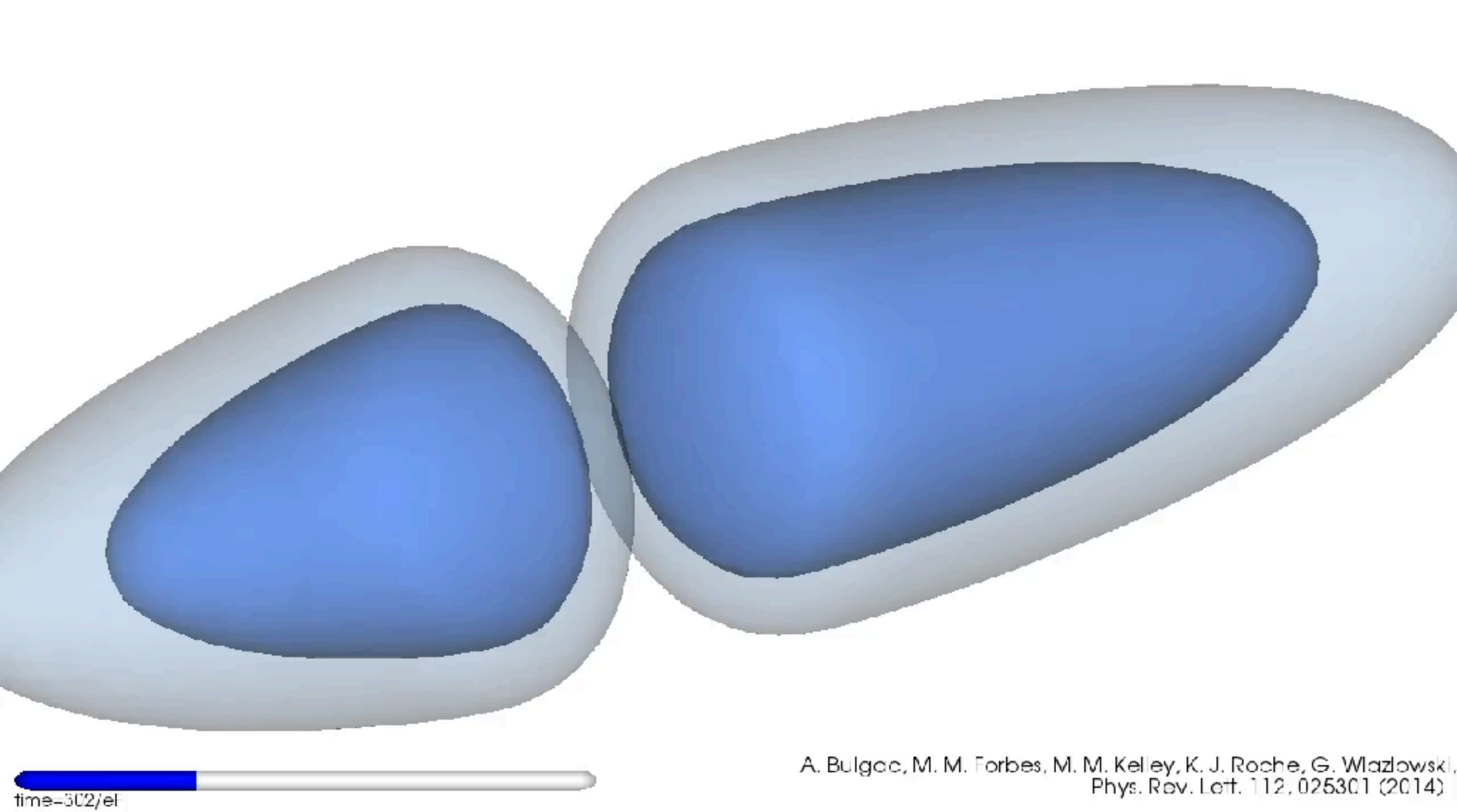




Momento angular:
o vórtice-anel (*vortex ring*)

Conservação de momento angular

Conservação de momento angular



Conservação de momento angular