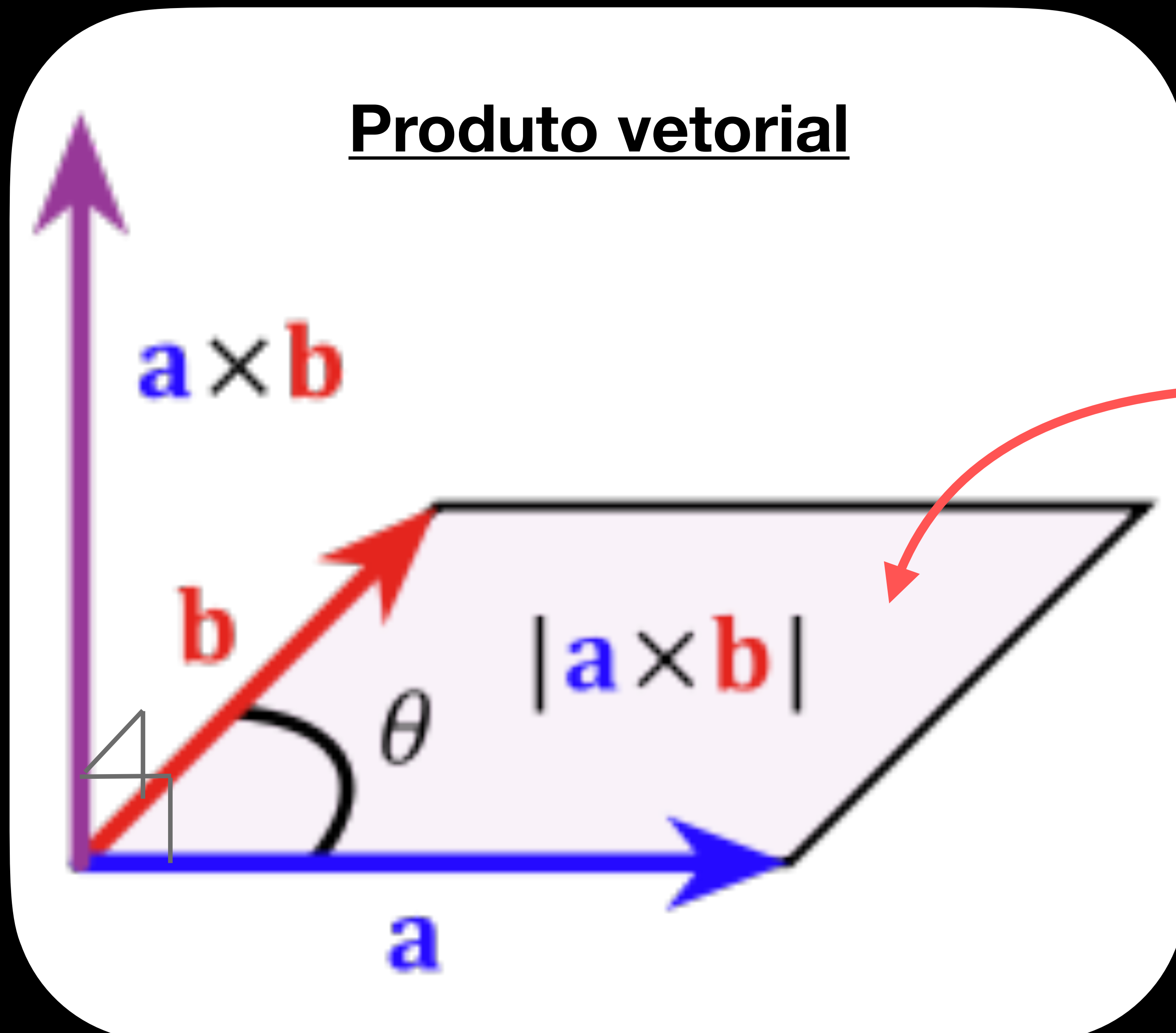
Física I

Rotações e momento angular

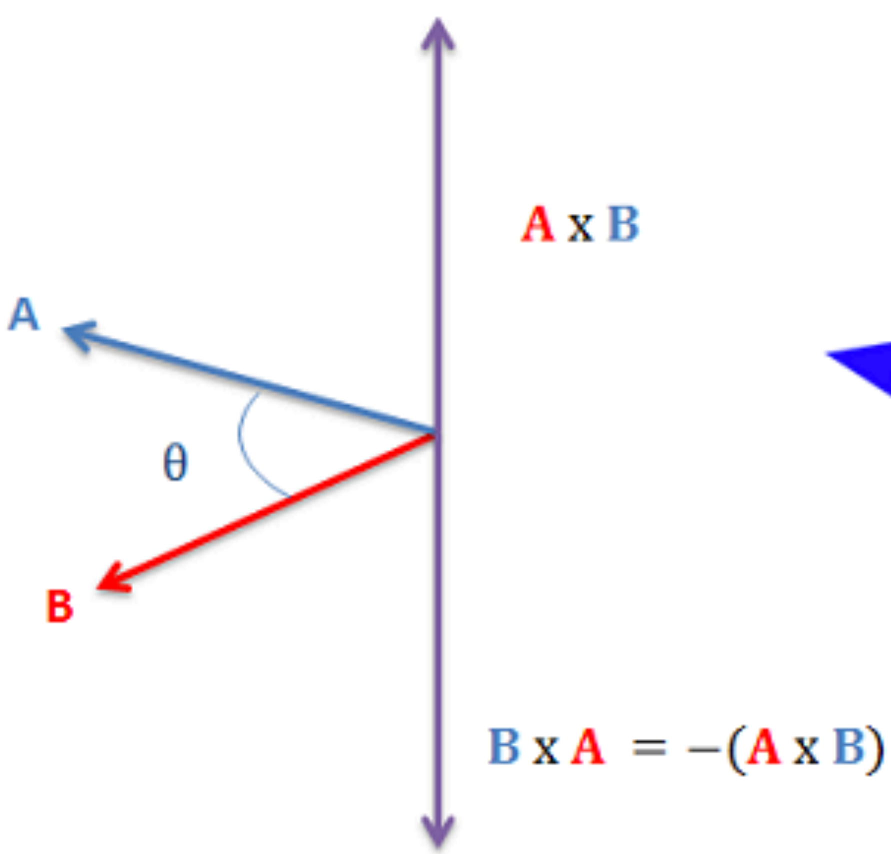
O produto vetorial

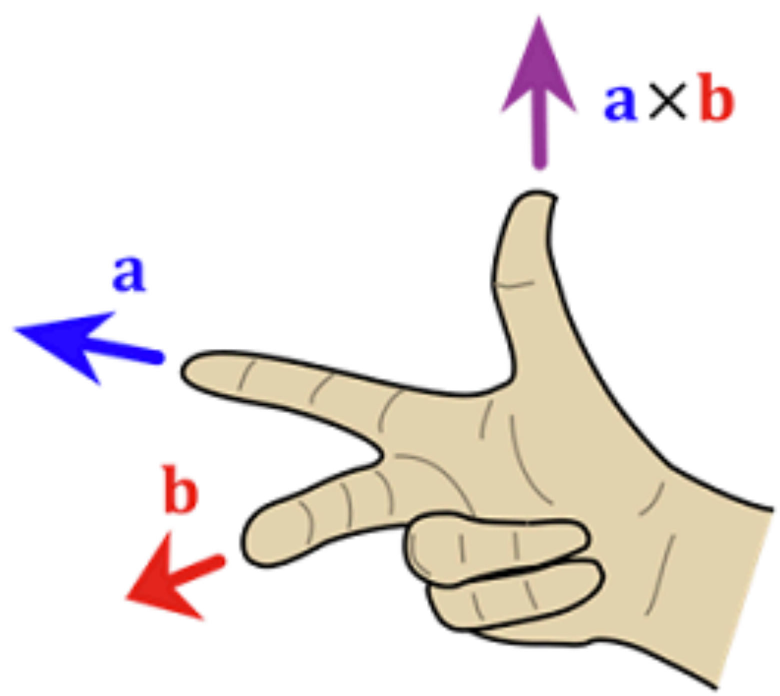


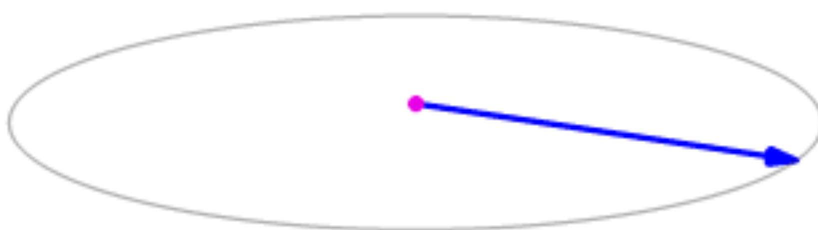
Área do paralelogramo

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = a\, b \,\mathrm{sen}\, \theta$$

O produto vetorial







Regra da mão direita

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

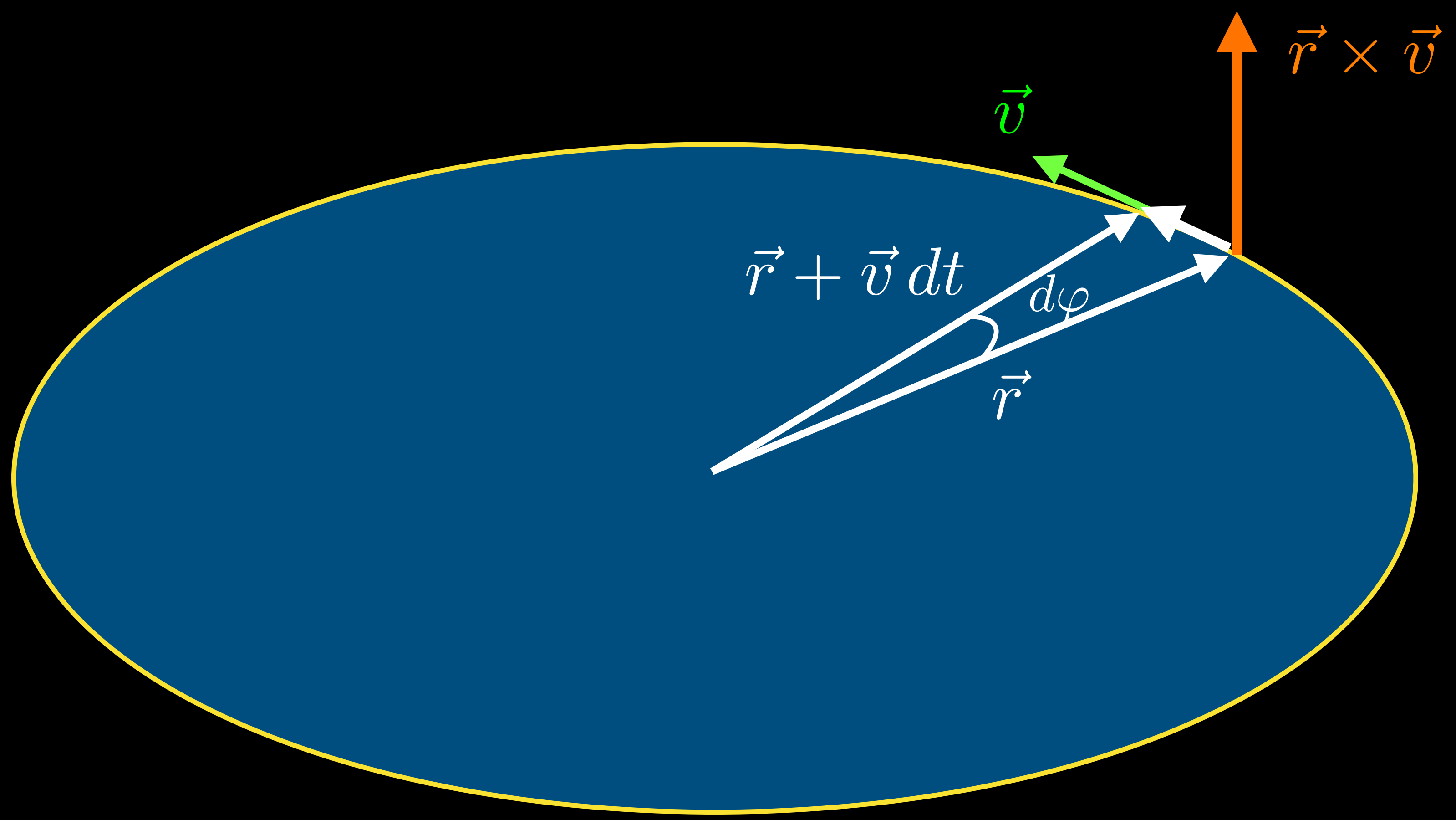
Identidades:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

$$\boxed{\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{c} \cdot \vec{a}) - \vec{c}\,(\vec{a} \cdot \vec{b})}$$

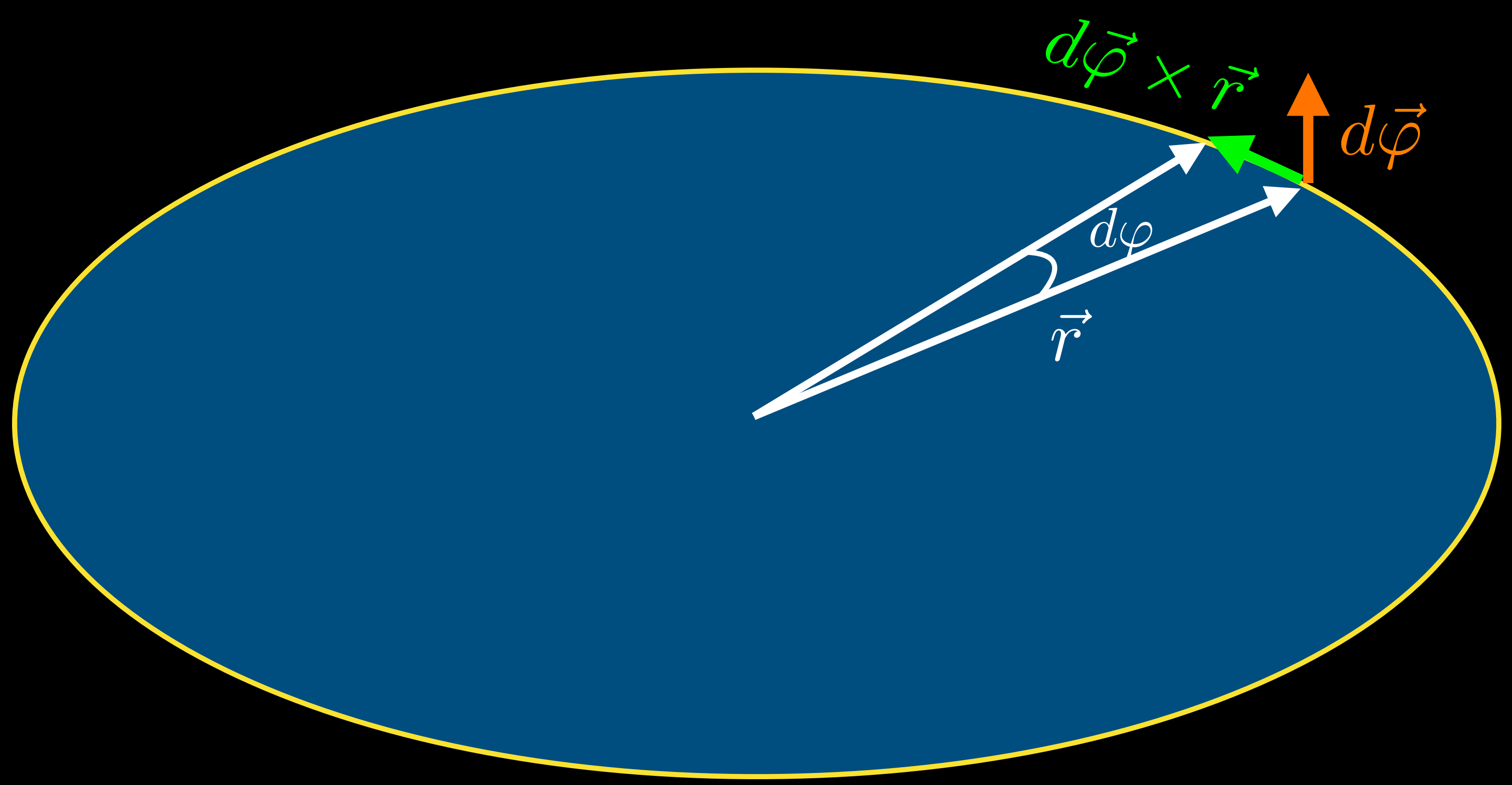
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

Rotações



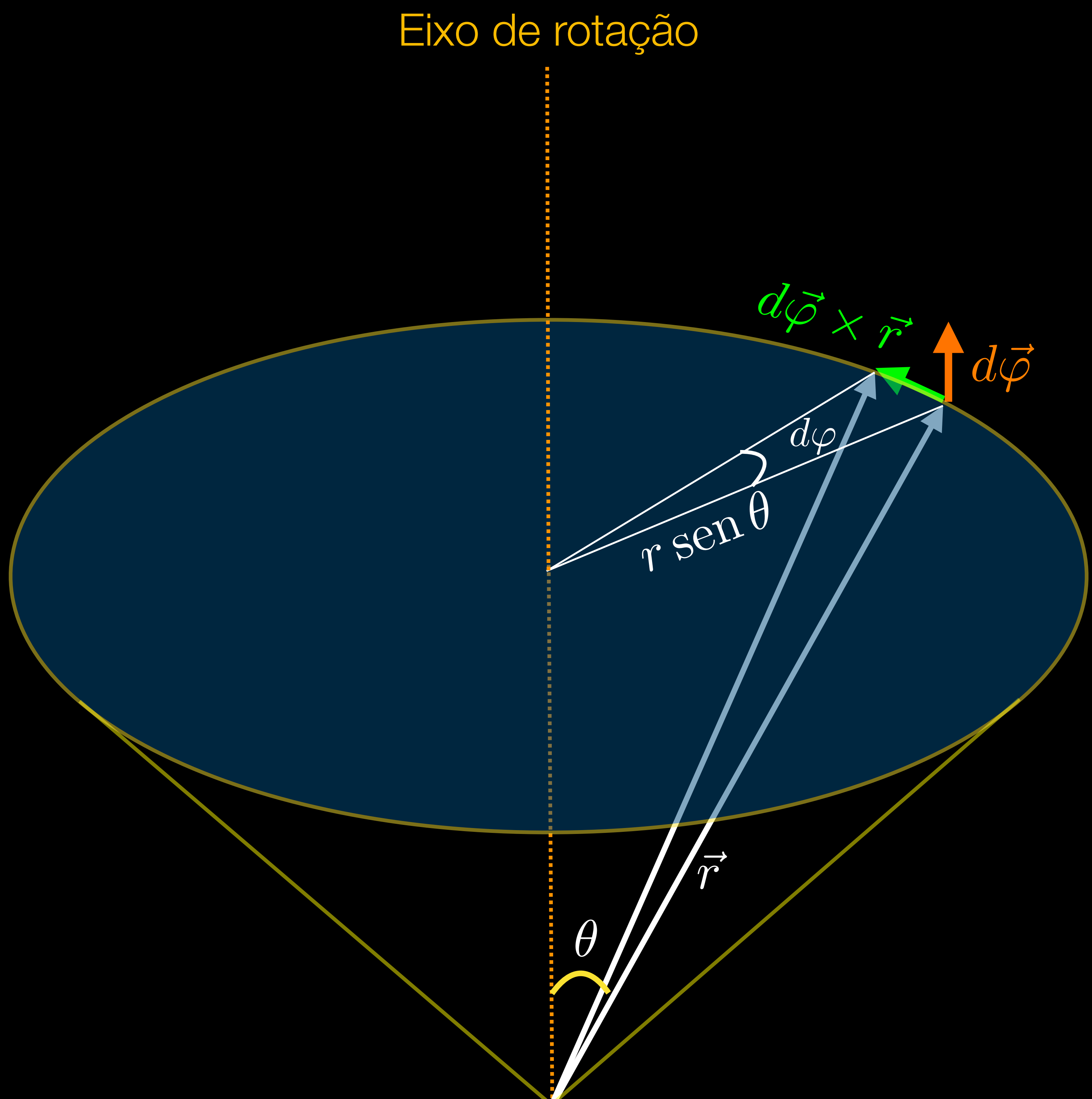
Representação vetorial de rotações

Rotações



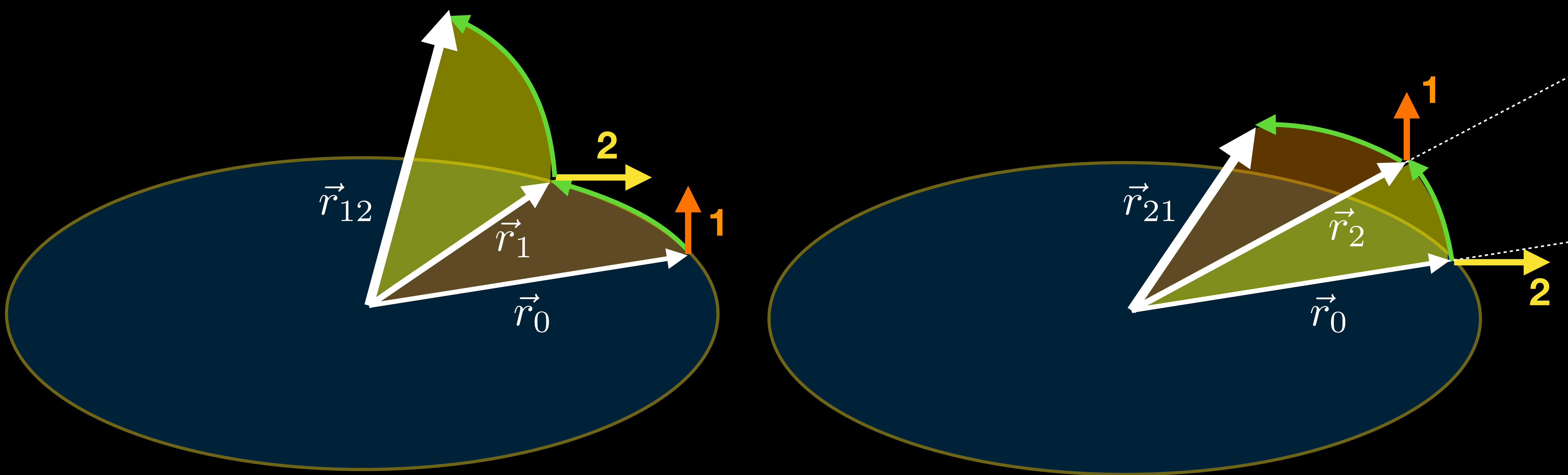
Representação vetorial de rotações

Rotações



Representação vetorial de rotações

Rotações finitas



Rotações *finitas* sobre eixos diferentes *não comutam*

$$\text{"}\vec{\varphi}\text{"} \neq \text{"}\vec{\varphi}_1\text{"} + \text{"}\vec{\varphi}_2\text{"}$$

Mas rotações *infinitesimais* são vetores:

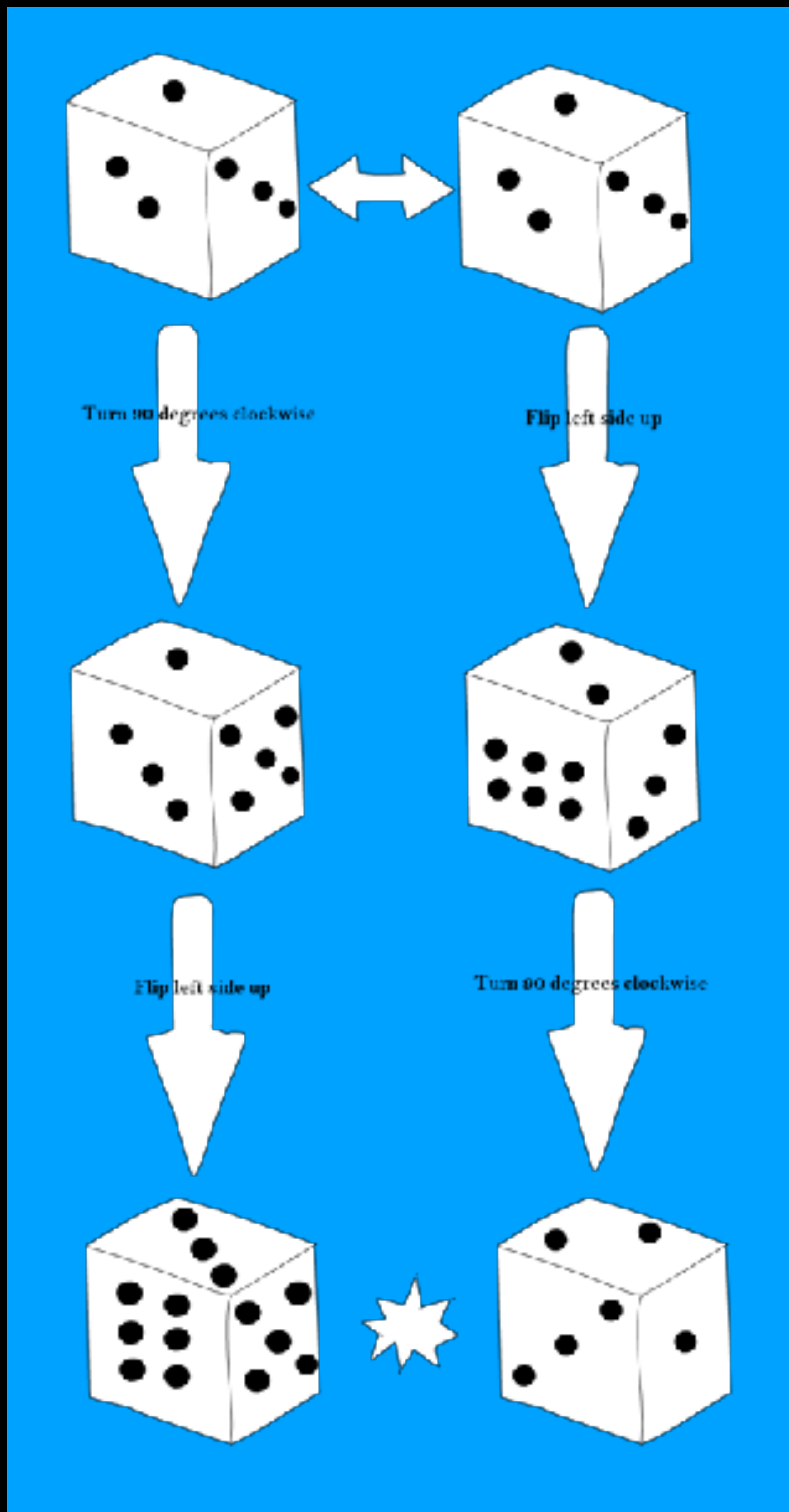
$$\vec{r}_0 \to \vec{r}_1 = \vec{r}_0 + d\vec{\varphi}_1 \times \vec{r}_0$$

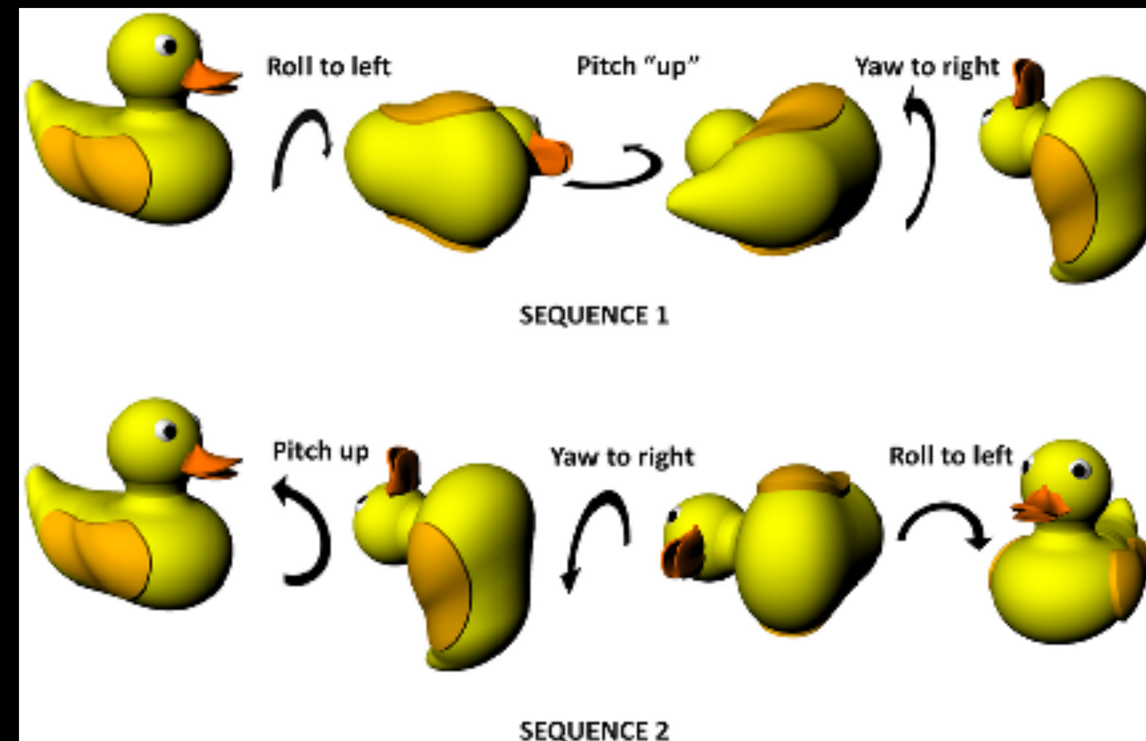
$$\vec{r}_1 \to \vec{r}_{12} = \vec{r}_1 + d\vec{\varphi}_2 \times \vec{r}_1$$

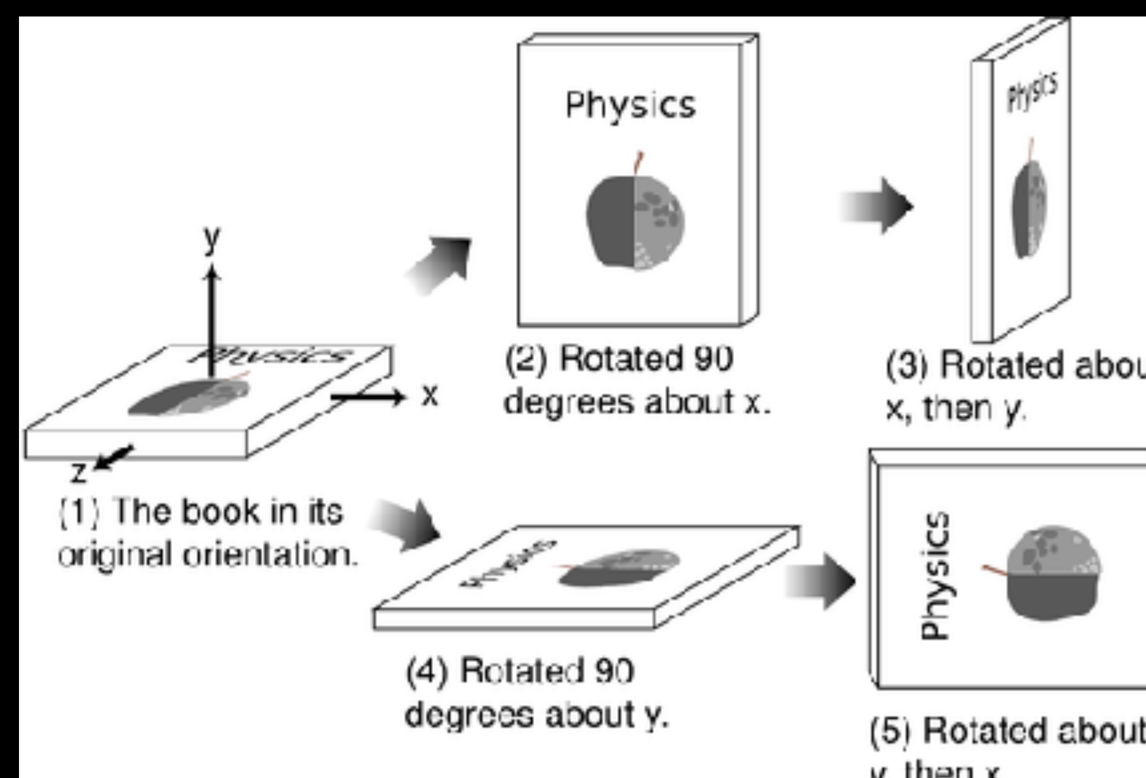
!!

$$\Rightarrow \quad \vec{r}_{12} = \vec{r}_0 + (d\vec{\varphi}_1 + d\vec{\varphi}_2 + \cancel{d\vec{\varphi}_2 \times d\vec{\varphi}_1}) \times \vec{r}_0 \quad = \vec{r}_{21}$$

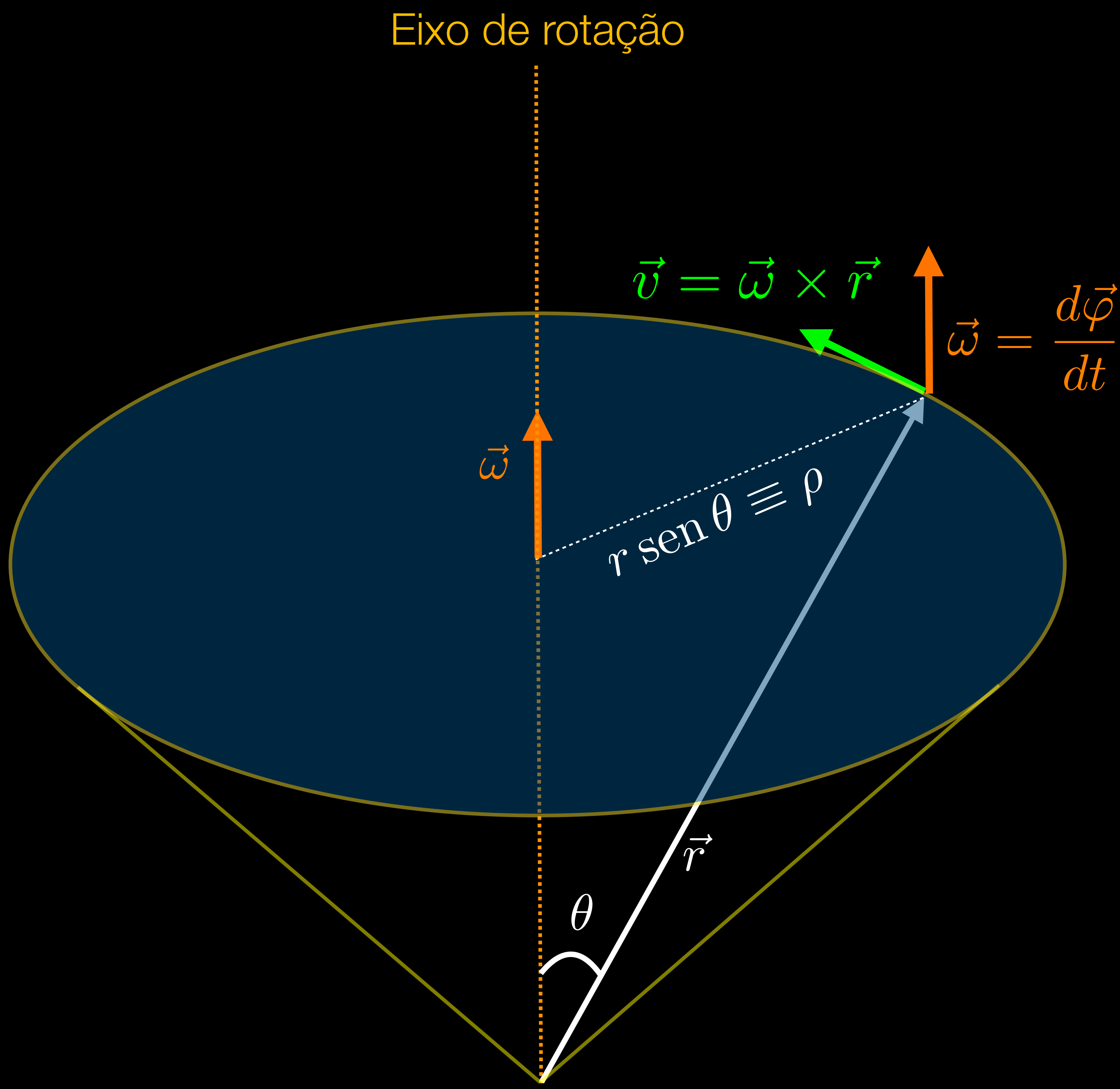
Rotações finitas





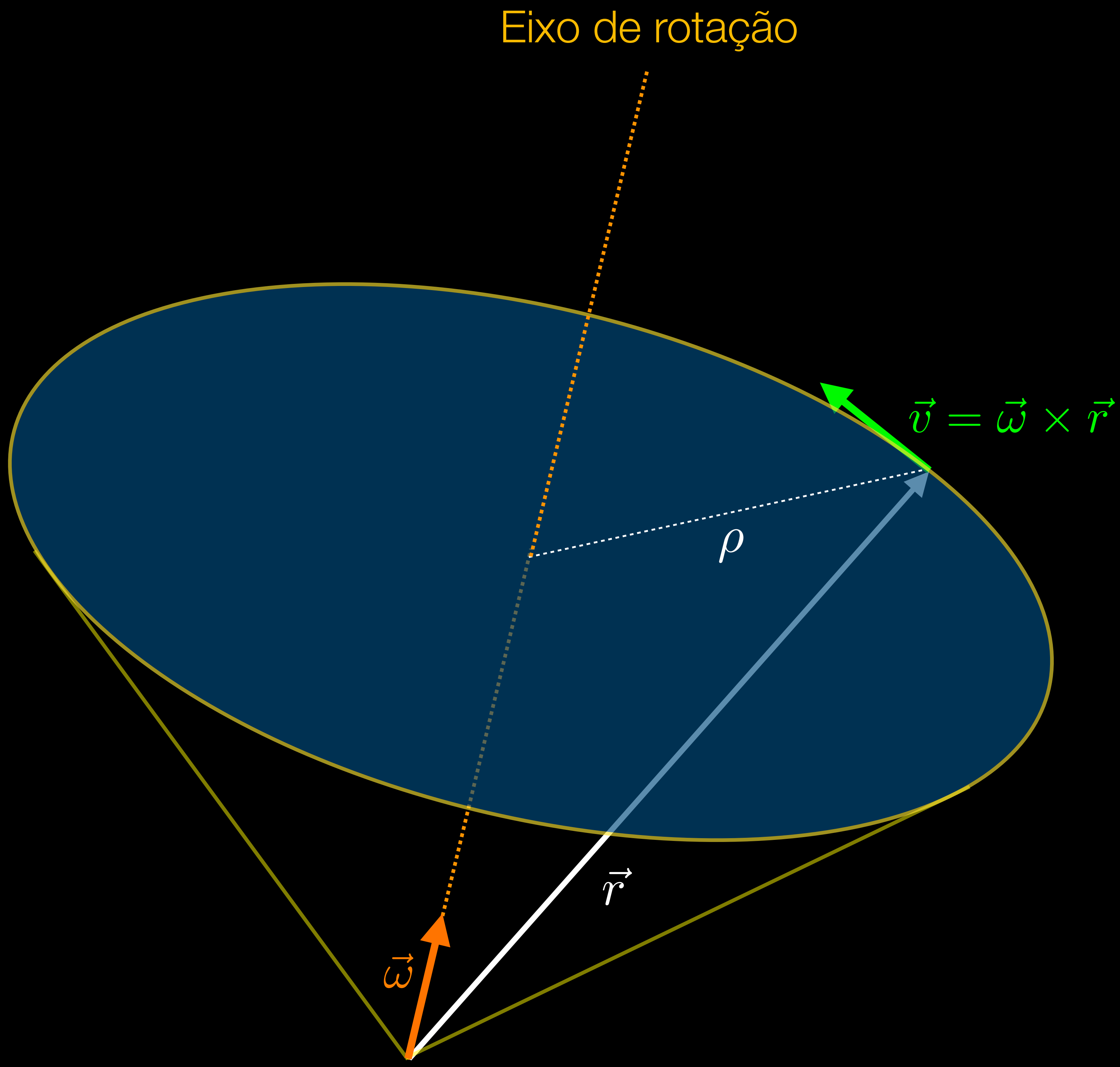


Rotações: dinâmica



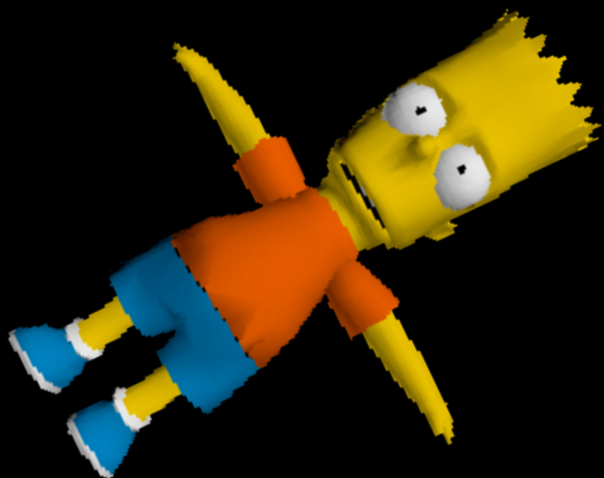
Representação vetorial de rotações

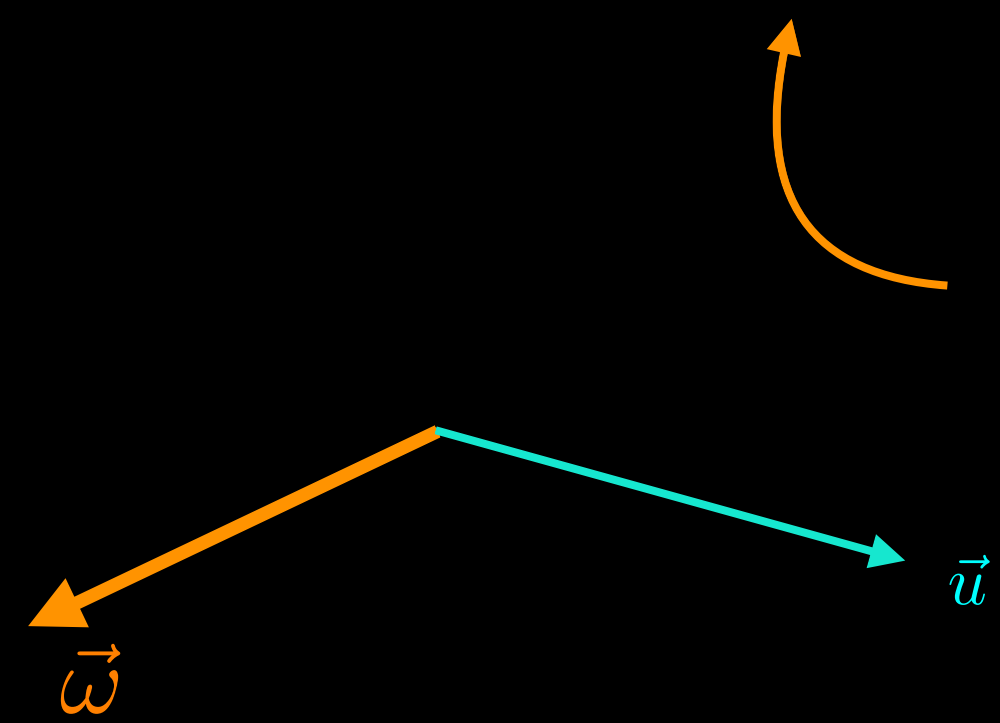
Rotações: dinâmica



Representação vetorial de rotações

Rotações: dinâmica

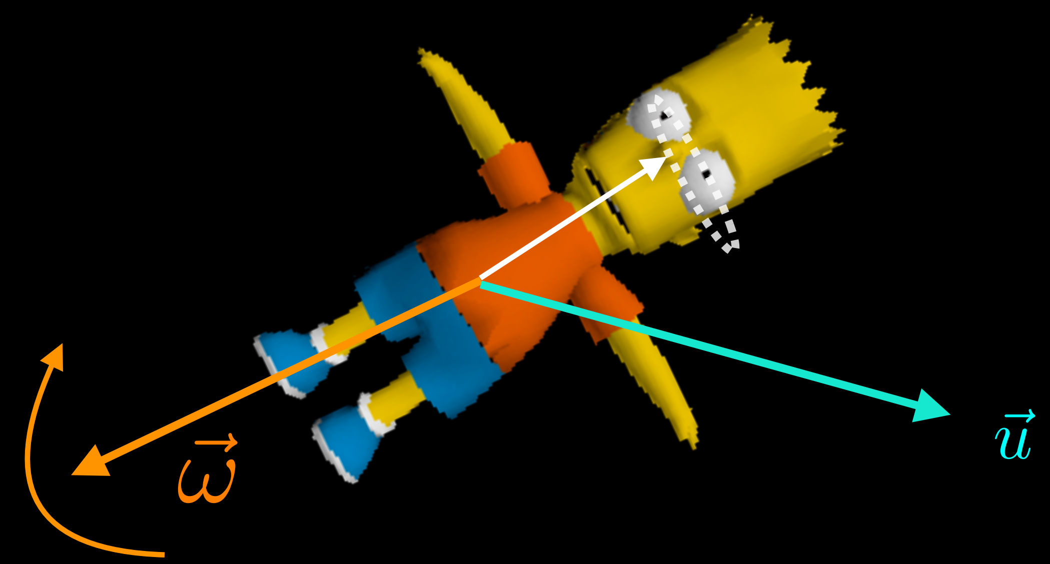




$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Movimento mais geral possível:
translação + rotação

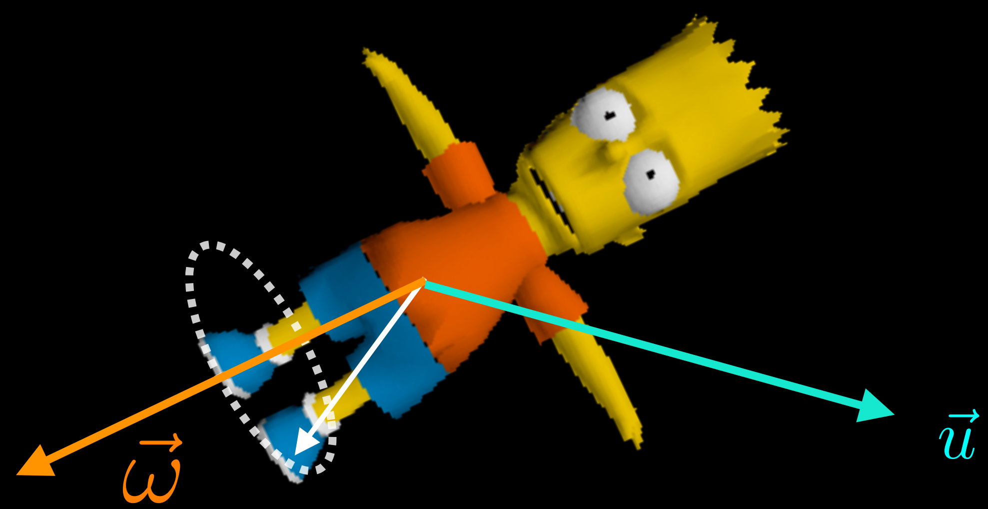
Rotações: dinâmica



$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Movimento mais geral possível:
translação + rotação

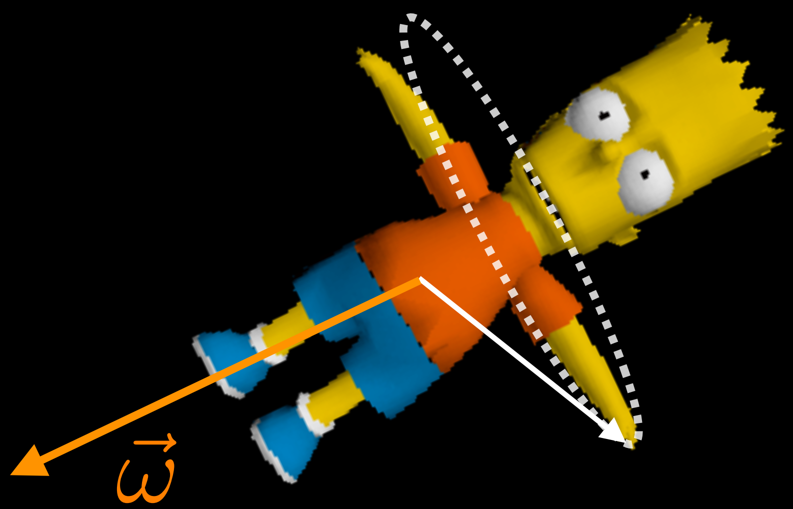
Rotações: dinâmica



$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Movimento mais geral possível:
translação + rotação

Rotações: dinâmica

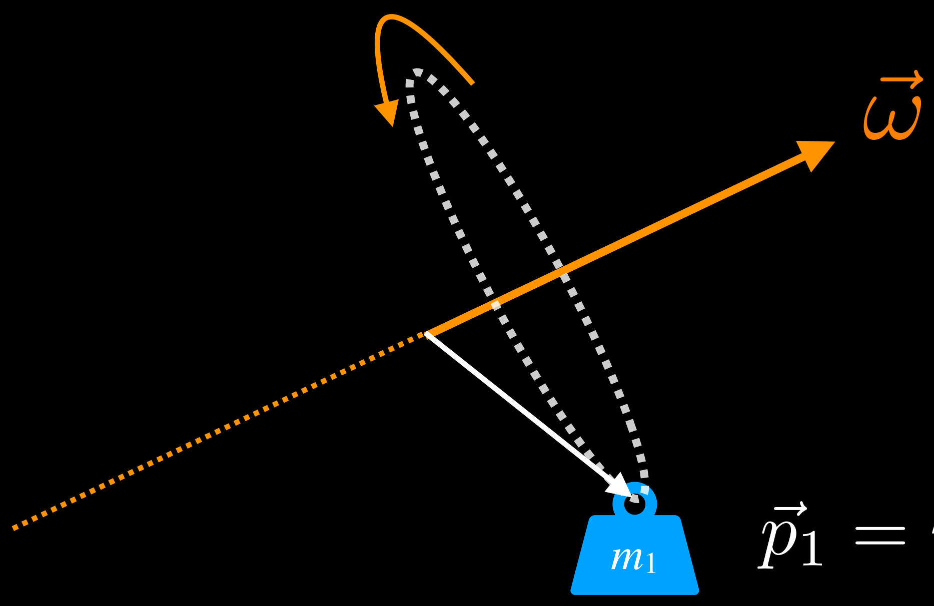


$$\vec{u}_1 \to 0$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Movimento de rotação

Rotações: dinâmica



$$\vec{p}_1 = m_1 \, \vec{\omega} \times \vec{r}_1$$

$$\vec{v}_1 = \vec{\omega} \times \vec{r}_1$$

$$\vec{\ell}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{v}_1 \implies \vec{L}_1 = \vec{r}_1 \times (m_1 \vec{v}_1) \implies \vec{L}_1 = m_1 \vec{r}_1 \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_1)$$

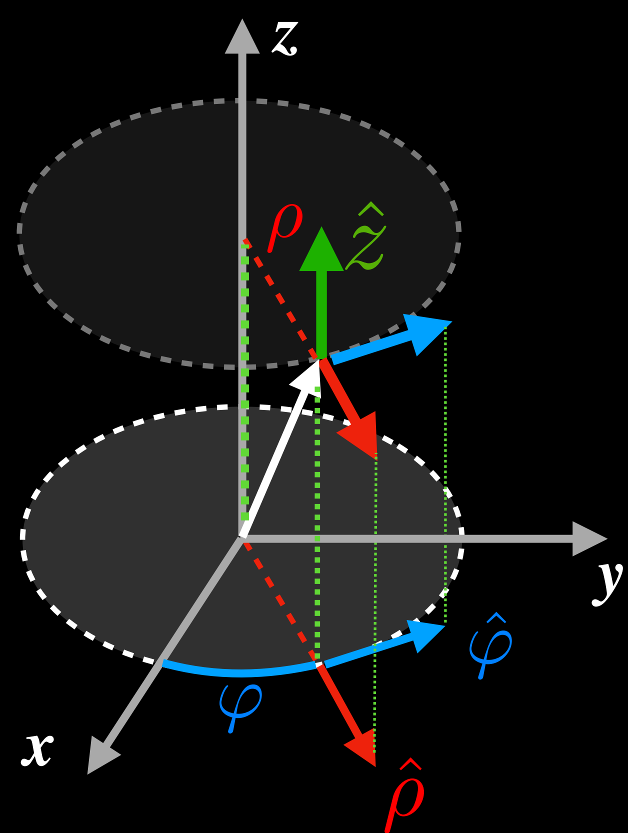
Momento angular

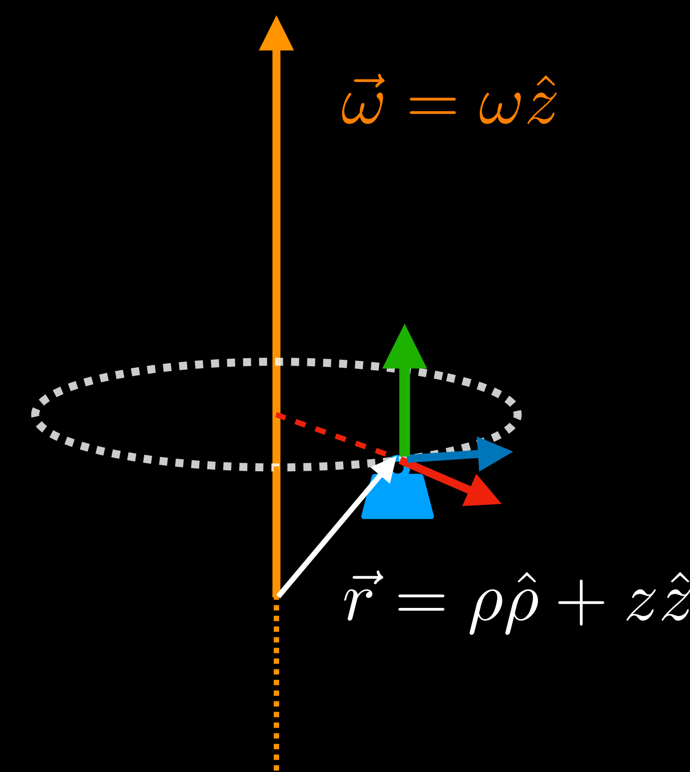
com relação ao centro da rotação

Rotações: dinâmica

Coordenadas **cilíndricas**

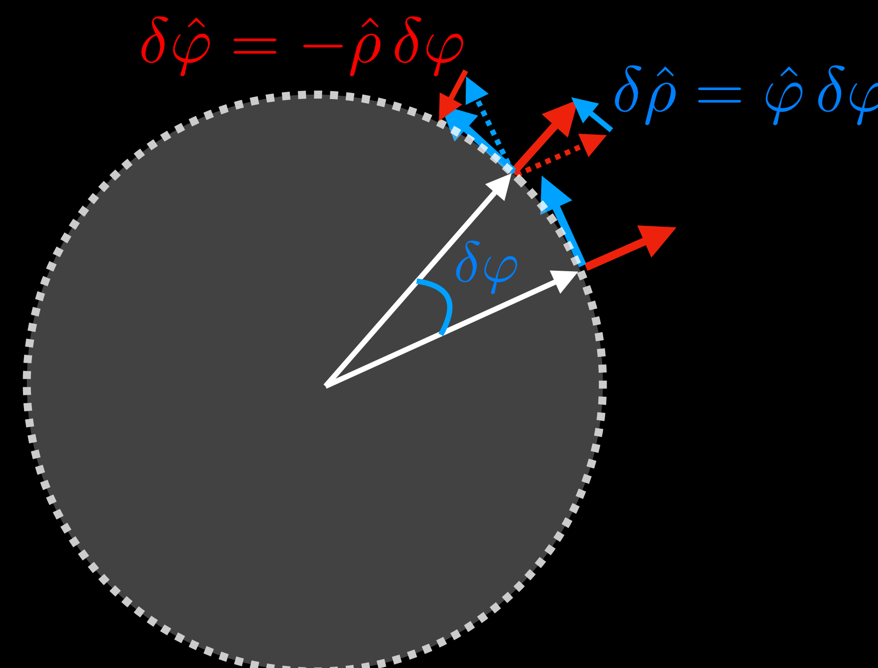
$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}$$





Note que:

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}(\varphi)\ ,\ \hat{\varphi} = \hat{\varphi}(\varphi)$$



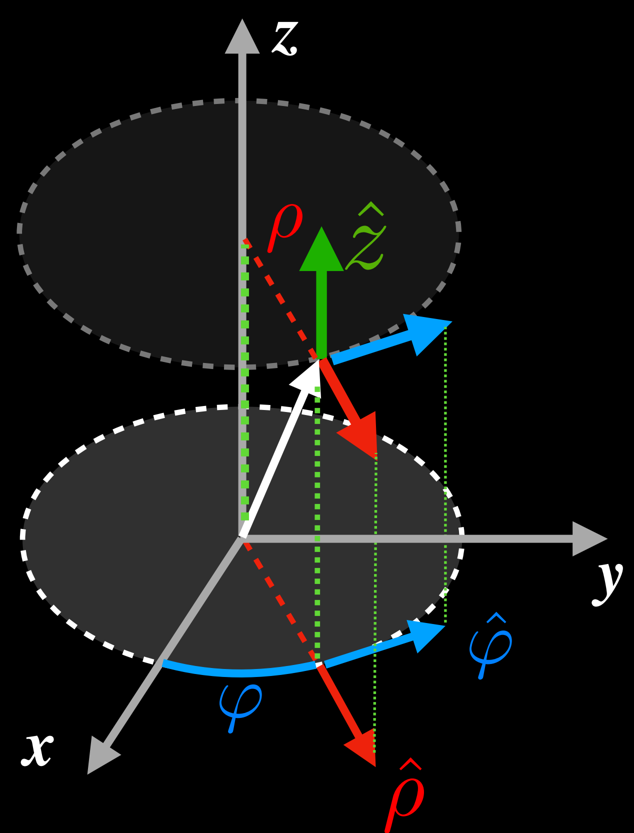
$$\frac{d\,\hat{\rho}}{d\varphi} = \hat{\varphi}$$

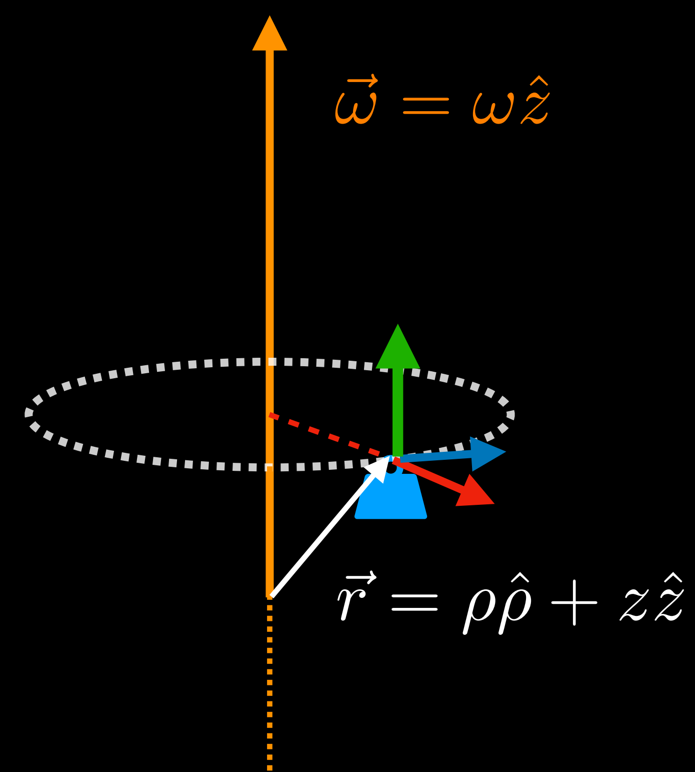
$$\frac{d\,\hat{\varphi}}{d\varphi} = -\hat{\rho}$$

Rotações: dinâmica

Coordenadas **cilíndricas**

$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}$





$$\vec{p} = m\,\vec{\omega} \times \vec{r} \;= m\,\omega\hat{z} \times (\rho\hat{\rho} + \cancel{z\hat{z}})$$

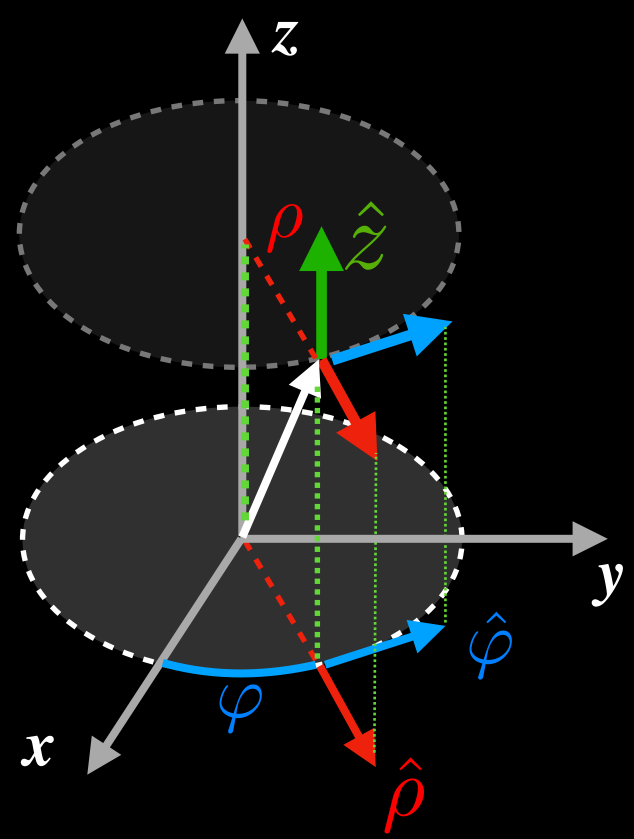
$$\Rightarrow \quad \vec{p} = m\,\omega\,\rho\,\hat{\varphi}$$

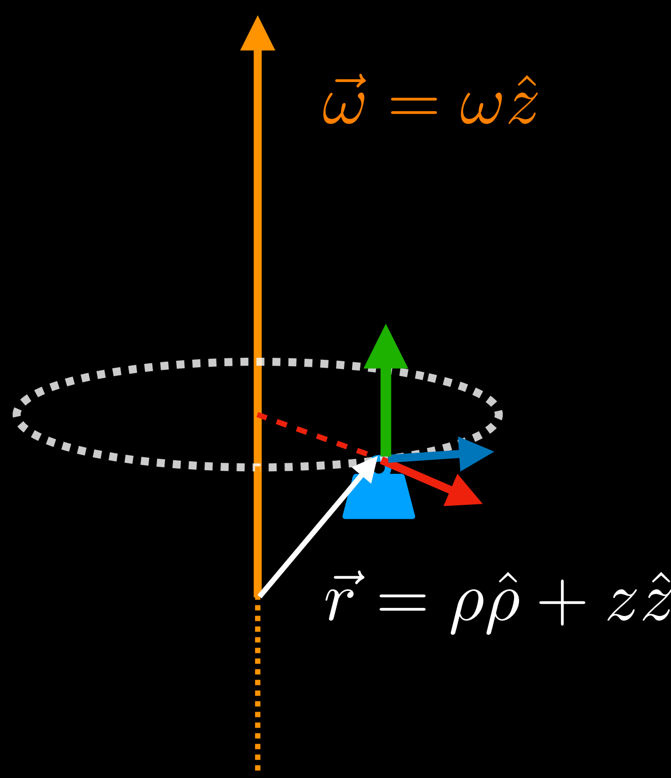
Momento angular
com relação ao centro da rotação

Rotações: dinâmica

Coordenadas **cilíndricas**

$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}$





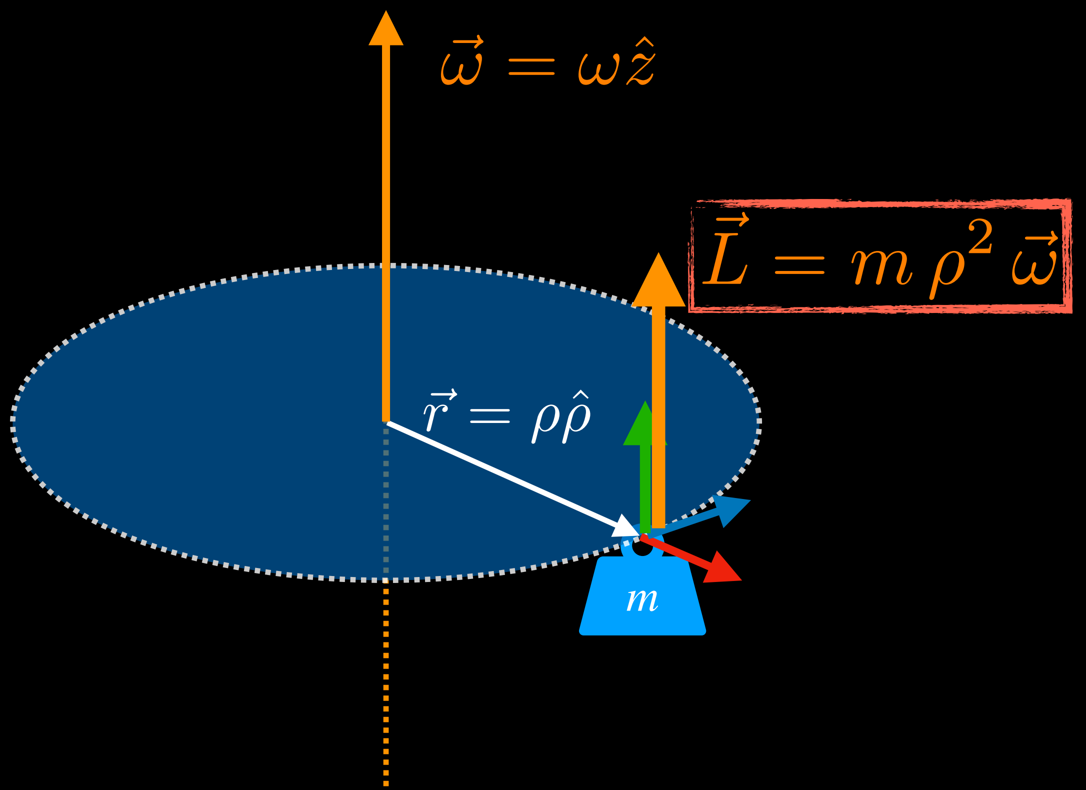
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \overbrace{(\rho\hat{\rho} + z\hat{z})}^{\vec{r}} \times \overbrace{(m\,\omega\,\rho\,\hat{\varphi})}^{\vec{p}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{L} = m\,\rho^2\,\omega\,\hat{z} - \cancel{m\,\omega\,\rho\,z\,\hat{\rho}}$$

Raramente temos que lidar com isso...

Momento angular
com relação ao centro da rotação

Rotações: dinâmica



$$\vec{L} = m\,\rho^2\,\omega\,\hat{z}$$

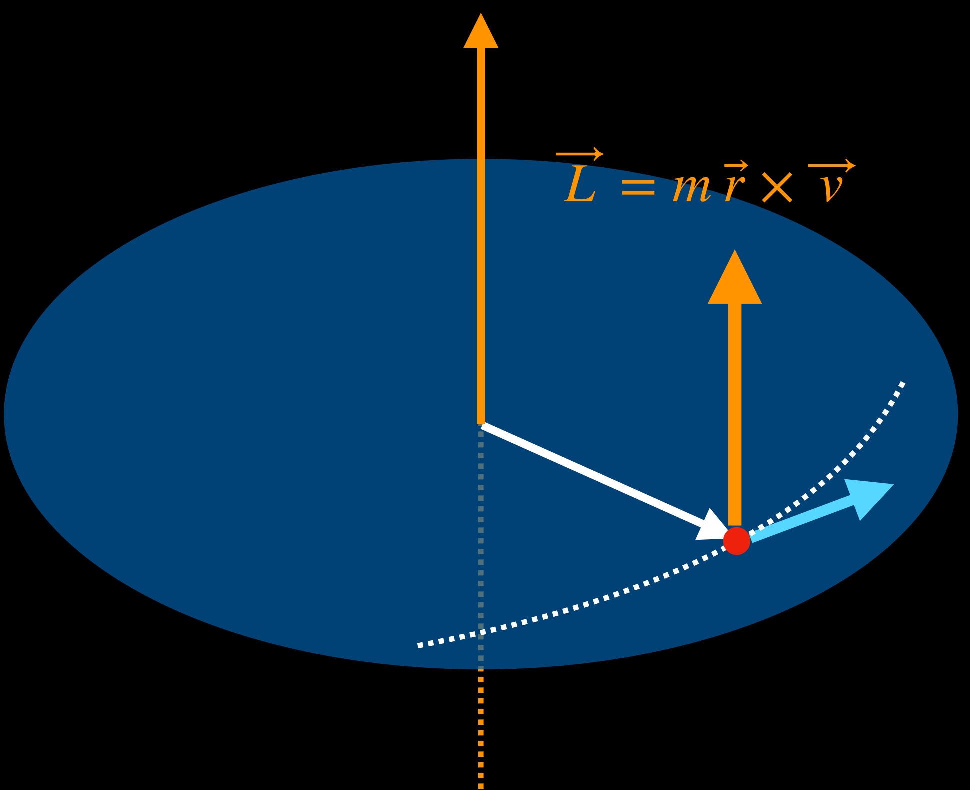
Momento angular:
rotação num plano (z=0)

Rotações: dinâmica

- Por enquanto vamos nos limitar a rotações no plano $z = 0$. Nesse caso, tanto faz definir:

$\overrightarrow{L} = m\,\omega\,\rho^2\,\hat{z}$, ou

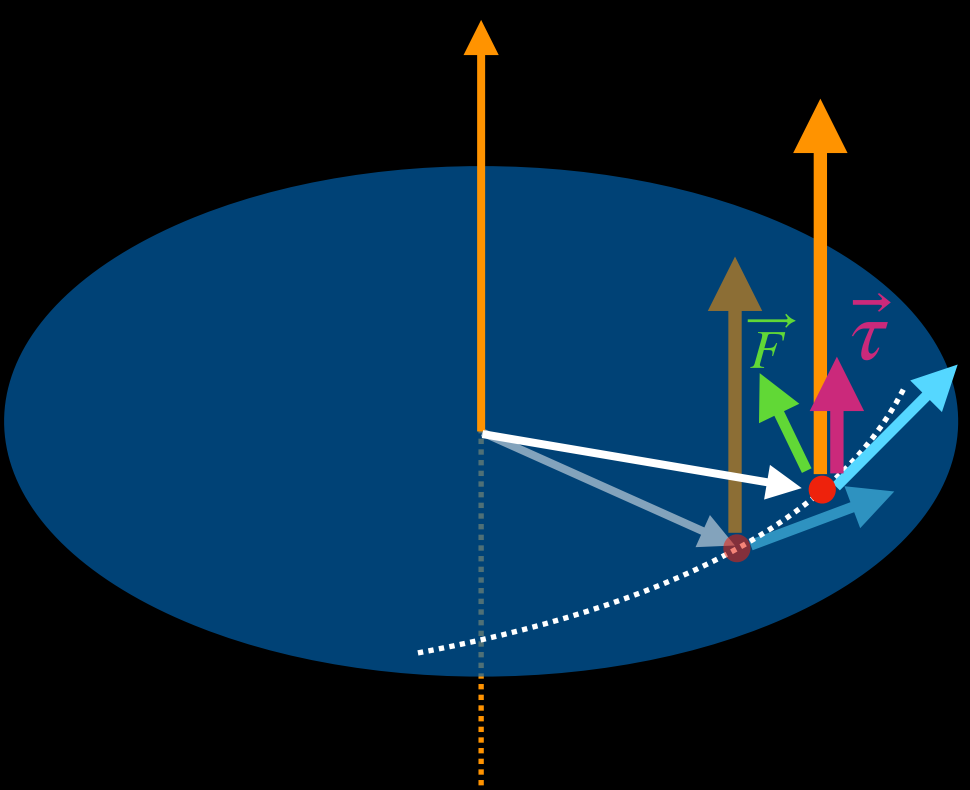
$\overrightarrow{L} = m\,\vec{r} \times \overrightarrow{v} = \vec{r} \times \overrightarrow{p}$



- Vamos agora analisar de que forma uma força agindo sobre a massa m vai alterar o movimento, e esse momento angular. Temos:

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{L} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \overrightarrow{p}\right) = \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{p} + \vec{r} \times \dot{\overrightarrow{p}}$$

$$= 0 + \vec{r} \times \overrightarrow{F}$$



- Isso se chama Lei do Torque — que não é nada mais do que a 2a Lei de Newton para rotações:

$$\vec{\tau} = \frac{d\overrightarrow{L}}{dt} \quad , \quad \text{com} \quad \vec{\tau} = \vec{r} \times \overrightarrow{F}$$

Torque

- A equação do torque é muito simples: assim como a força causa a alteração do momento,

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \Delta\vec{p} = \vec{F}\,\Delta t \quad ,$$

o torque causa a ***alteração do momento angular***:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \Delta\vec{L} = \vec{\tau}\,\Delta t \quad .$$

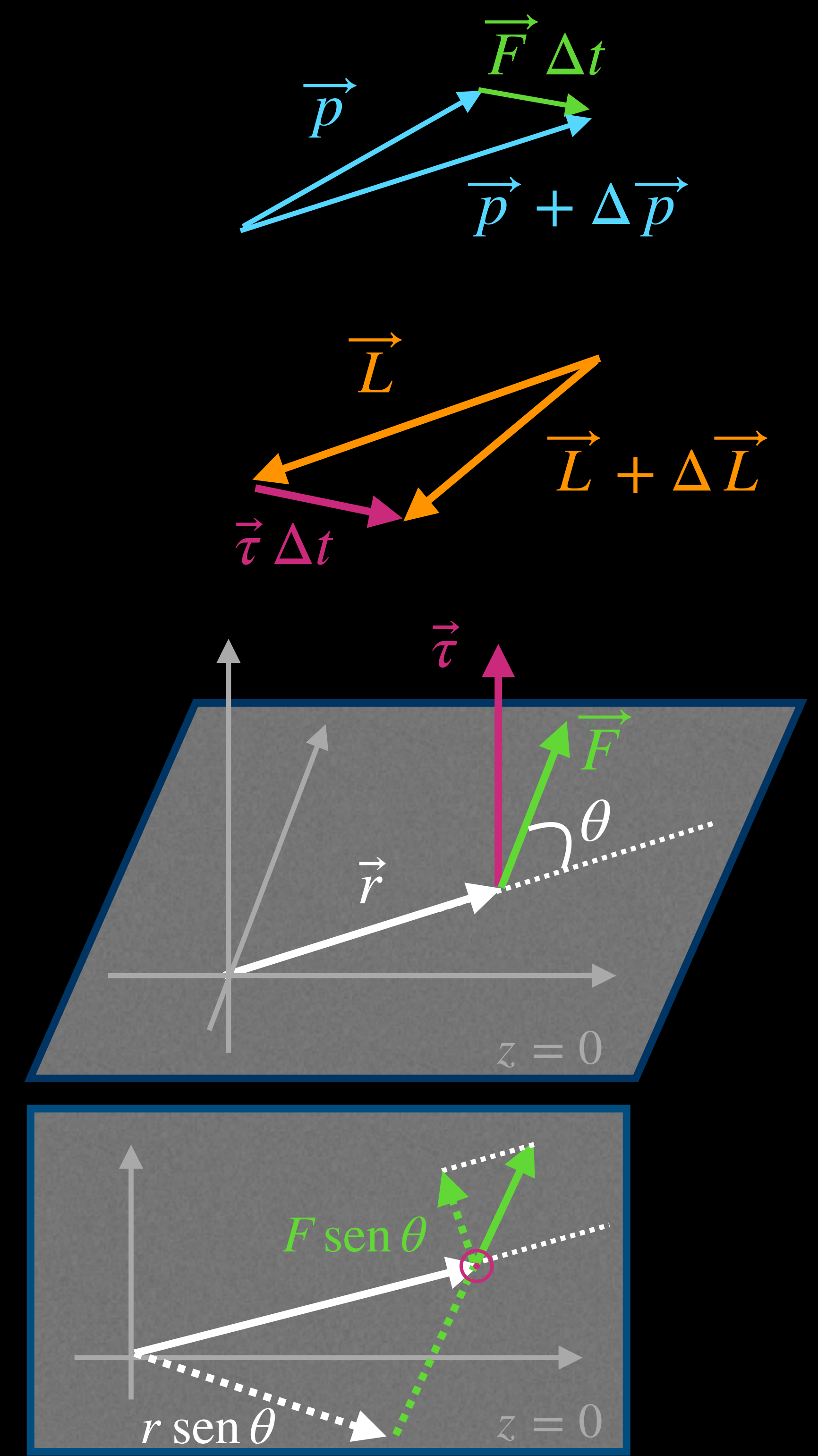
- Exemplo: uma partícula no plano $z = 0$ está sob o efeito de uma força também no plano $z = 0$. Temos:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$= (r\,F\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\hat{z}$$

- Também podemos visualizar isso em termos das componentes perpendiculares:

$$\vec{\tau} = (r\,\mathrm{sen}\,\theta)\,F\,\hat{z} \quad , \quad \vec{\tau} = r\,(F\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\hat{z}$$

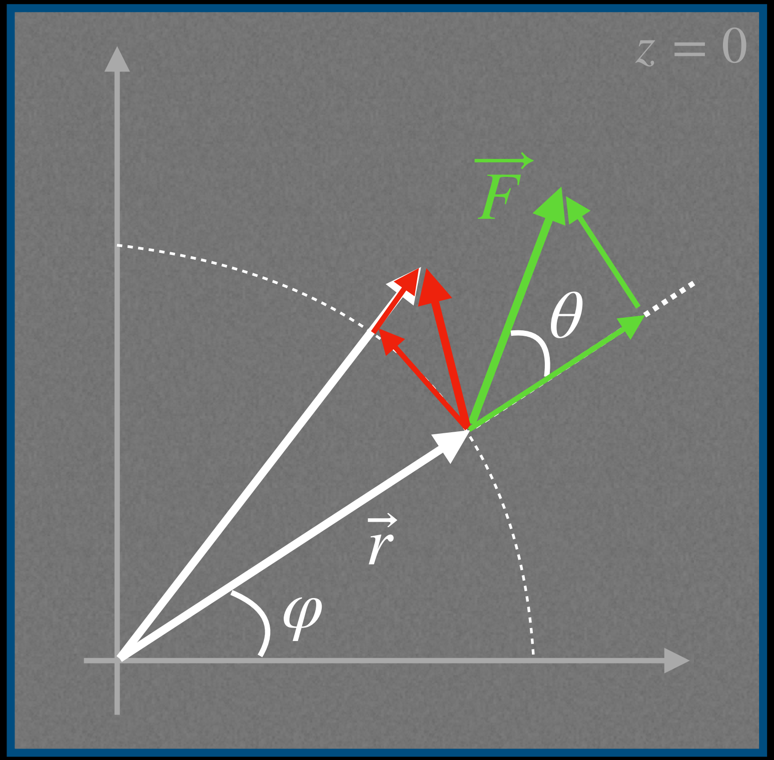


O trabalho do torque

- Mas assim como uma força que age sobre uma partícula exerce trabalho, mudando a energia cinética da partícula, também o torque deveria fazer um trabalho.

- De fato, lembrando que no plano $z = 0$ a distância à origem é $\vec{r} \to \overrightarrow{\rho}$, o deslocamento da partícula pode ser escrito como:

$$d\vec{r} = d\rho\,\hat{\rho} + \rho\,d\varphi\,\hat{\varphi}$$



- O trabalho é, portanto:

$$dW = \overrightarrow{F} \cdot d\vec{r} = F_\rho\,d\rho + F_\varphi\,\rho\,d\varphi$$

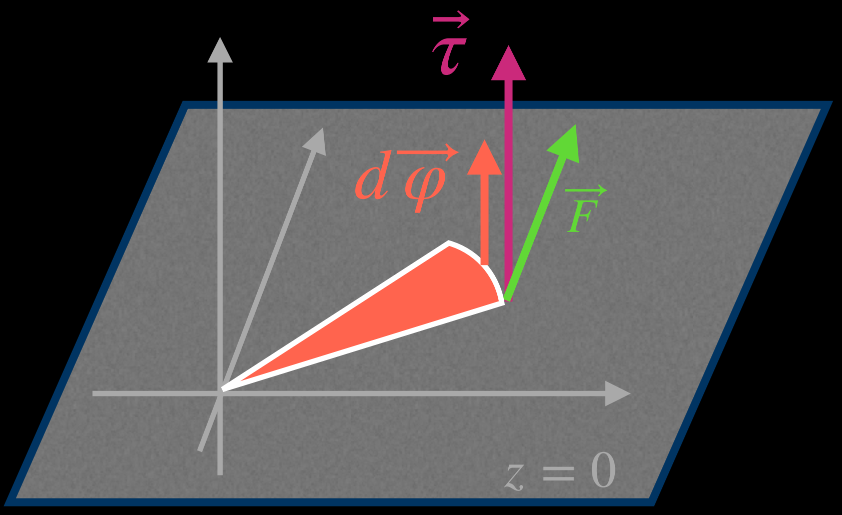
- Note que a ***parte do trabalho*** na ***direção radial*** não afeta o momento angular, pois produz ***torque nulo***. Logo, temos:

$$dW_{Rot} = F_\varphi\,\rho\,d\varphi = (F\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\rho\,d\varphi = \tau\,d\varphi$$

O trabalho do torque

- Agora, vamos notar que tanto $\vec{\tau}$ quanto $d\overrightarrow{\varphi}$ estão no eixo perpendicular ao plano ($\hat{z}$). Portanto, temos que:

$$dW_{Rot} = \vec{\tau} \cdot d\overrightarrow{\varphi}$$



- Ou, dividindo por dt , obtemos a potência que é direcionada ao momento angular:

$$P_{Rot} = \frac{d\,W_{Rot}}{dt} = \vec{\tau} \cdot \frac{d\,\overrightarrow{\varphi}}{dt} = \vec{\tau} \cdot \overrightarrow{\omega}$$

Energia cinética rotacional

- Mas se podemos falar de trabalho do torque e potência associada com rotações, por quê não falar também de uma ***energia cinética de rotação***?
- Vamos voltar à expressão para a variação do momento angular:

$$\frac{d\overrightarrow{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m\,\vec{r}\times\overrightarrow{v}\right) = m\,\vec{r}\times\dot{\overrightarrow{v}}$$

- Mas para rotações, temos (ver início da aula) que:

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\omega}\times\vec{r} \quad \Rightarrow \quad \dot{\overrightarrow{v}} = \dot{\overrightarrow{\omega}}\times\vec{r} + \overrightarrow{\omega}\times\dot{\vec{r}} = \dot{\overrightarrow{\omega}}\times\vec{r} + \overrightarrow{\omega}\times\overrightarrow{v}$$

- Mas na expressão acima temos novamente $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\omega}\times\vec{r}$, então:

$$\overrightarrow{a} = \dot{\overrightarrow{\omega}}\times\vec{r} + \overrightarrow{\omega}\times(\overrightarrow{\omega}\times\vec{r}) \;=\; \dot{\overrightarrow{\omega}}\times\vec{r} + \overrightarrow{\omega}(\overrightarrow{\omega}\cdot\vec{r}) - \vec{r}(\overrightarrow{\omega}\cdot\overrightarrow{\omega})$$

- Para movimento num plano, temos que $\overrightarrow{\omega}\perp\vec{r}$, portanto:

$$\frac{d\overrightarrow{L}}{dt} = m\,\vec{r}\times\overrightarrow{a} = m\,\vec{r}\times\left[\dot{\overrightarrow{\omega}}\times\vec{r} - \vec{r}(\overrightarrow{\omega}\cdot\overrightarrow{\omega})\right] = m\,\vec{r}\times\left[\dot{\overrightarrow{\omega}}\times\vec{r}\right]$$

$$= m\left[\dot{\overrightarrow{\omega}}\,(\vec{r}\cdot\vec{r}) - \vec{r}\,(\dot{\overrightarrow{\omega}}\cdot\vec{r})\right]$$

$$= m\,r^2\,\dot{\overrightarrow{\omega}}$$, onde $\overrightarrow{\omega}\cdot\vec{r} = \dot{\overrightarrow{\omega}}\cdot\vec{r} = 0$ pois o movimento se restringe ao plano de rotação.

Energia cinética rotacional

- A expressão que acabamos de derivar é muito interessante, pois ela é análoga à 2a Lei de Newton:

$$\vec{\tau} = \frac{d\overrightarrow{L}}{dt} = m\, r^2\, \dot{\overrightarrow{\omega}} \quad \longleftrightarrow \quad \overrightarrow{F} = \frac{d\overrightarrow{P}}{dt} = m\, \dot{\overrightarrow{v}}$$

- Só que, no caso de rotações, temos que o que faz o papel da "massa inercial" m na 2a Lei de Newton é algo diferente, que faz menção explícita à distância r até o ponto desde o qual se mede a rotação, $m\, r^2$

- Essa quantidade chamamos de ***momento de inércia***:

$$I = m\, r^2 \quad \Rightarrow \quad \vec{\tau} = I\, \dot{\overrightarrow{\omega}}$$

- Assim, temos que o trabalho é agora expresso como:

$$\frac{dW_{Rot}}{dt} = \vec{\tau} \cdot \overrightarrow{\omega} = (I\, \dot{\overrightarrow{\omega}}) \cdot \overrightarrow{\omega}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(I\, \overrightarrow{\omega}^2 \right)$$

- Portanto, deduzimos acima que a ***energia cinética de rotação*** é dada por:

$$K_{Rot} = \frac{1}{2}\, I\, \overrightarrow{\omega}^2$$