2020-1, "STATPHYS", AULA 14

OBJETIVO: DISCUTIR AS EQS. MESTRAS

ONDE ESTAMOS: 2. PROCESSOS ESTOCÁSTICOS, 2.3 EQUAÇÕES MESTRAS

2.3 EQUAÇÃO MESTRA (OU PROCESSOS DE SALTO (JUMP PROCESSES) OU CADEIAS DE MARKOV DE TEMPO CONTÍNUO)

* MOTIVAÇÃO: VIA CMTD's

$$|\pi(t+1)\rangle = T\,|\pi(t)\rangle \Rightarrow \dots$$

$$\dots \Rightarrow \pi_i(t+1) - \pi_i(t) = \sum_{j\in S}\left[T_{i\leftarrow j}\,\pi_j(t) - T_{j\leftarrow i}\,\pi_i(t)\right]$$

LIMITE? $\Delta t \to 0$

$$\frac{\pi_i(t+\Delta t)-\pi_i(t)}{\Delta t} = \sum_j \left[\frac{T_{ij}}{\Delta t}\,\pi_j(t) - \frac{T_{ji}}{\Delta t}\,\pi_i(t)\right]$$

→ É NECESSÁRIO QUE $T_{ij} \xrightarrow{\Delta t \to 0} 0$

PARA QUE $\frac{T_{ij}}{\Delta t} \longrightarrow$ CTE.

* TAXA DE PROBABILIDADE

→ UMA TRANSIÇÃO ESTOCÁSTICA ENTRE ESTADOS DISCRETOS EM TEMPO CONTÍNUO É CARACTERIZADA POR UMA CONSTANTE POSITIVA λ (TAXA DE PROBABILIDADE, "PROBABILIDADE POR UNIDADE DE TEMPO") TAL QUE

$$\boxed{\mathbb{P}(\text{EVENTO ENTRE } t \text{ E } t+\Delta t) = \lambda . \Delta t + \mathcal{O}[(\Delta t)^2] .}$$

É CLARO QUE $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\mathcal{O}[(\Delta t)^2]}{\Delta t} = 0$

E QUE FALAMOS DE UMA PROPRIEDADE ASSINTÓTICA: SOMENTE SE $\boxed{\Delta t \ll 1/\lambda}$ VALE $\mathbb{P}(\text{EVENTO}) \approx \lambda . \Delta t$.

→ EM UM SENTIDO MAIS EMPÍRICO,

$$\lambda = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbb{P}(\text{EVENTO EM } \Delta t)}{\Delta t}$$

OU, MAIS CONCRETAMENTE,

$$\lambda = \frac{1}{T} \langle \#\text{EVENTOS EM } T \rangle$$

"GRANDE", "GLOBAL NO TEMPO"

• CONTRASTE COM TAXAS DETERMINÍSTICAS: LÁ, O ESTADO DO SISTEMA MUDA CONTINUAMENTE; AQUI, APENAS AOS SALTOS!

* <u>PROCESSO DE POISSON</u>

→ "RECEITA": LEI DA PROBALIDADE TOTAL + ANÁLISE LOCAL NO TEMPO

→ POISSON: UMA ÚNICA TAXA, λ, CONSTANTE NO TEMPO – PROCESSO DE <u>CONTAGEM</u>.

$\rightarrow$ PROCESSO: $\{N_t\}_{t \geq 0}$,

$N_t = N(t)$: # EVENTOS ATÉ O INSTANTE t,

VARIÁVEL ALEATÓRIA!

$$\mathbb{P}(N_{t+\Delta t} = k) = \sum_{j \in S} \mathbb{P}(N_{t+\Delta t} = k, N_t = j) =$$

ZERO $j > k$

$$= \sum_{j \in S} \mathbb{P}(N_{t+\Delta t} = k \mid N_t = j) \cdot \mathbb{P}(N_t = j) =$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1} (\lambda . \Delta t)^{k-j} \mathbb{P}(N_t = j) + \underbrace{\mathbb{P}\begin{pmatrix}\text{S/ EVENTOS} \\ \text{EM } \Delta t\end{pmatrix}}_{= 1 - \lambda \Delta t + \text{LIXO}} . \mathbb{P}(N_t = k) +$$

SÓ $j = k-1$.

O RESTO? $\longrightarrow$ $+ \mathcal{O}[(\Delta t)^2] =$

$$= \lambda . \Delta t \, \mathbb{P}(N_t = k-1) + (1 - \lambda \Delta t) \mathbb{P}(N_t = k) + \mathcal{O}[(\Delta t)^2] \implies$$

$$\implies \frac{\mathbb{P}(N_{t+\Delta t} = k) - \mathbb{P}(N_t = k)}{\Delta t} = \lambda \mathbb{P}(N_t = k-1) - \lambda \mathbb{P}(N_t = k) + \frac{\mathcal{O}[(\Delta t)^2]}{\Delta t}$$

→ SE $p_n(t) \equiv \mathbb{P}(N_t = n)$,

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{p}_n &= \lambda . p_{n-1} - \lambda . p_n \,, \quad n \geq 1 \\ \dot{p}_0 &= -\lambda p_0 \end{aligned}}$$

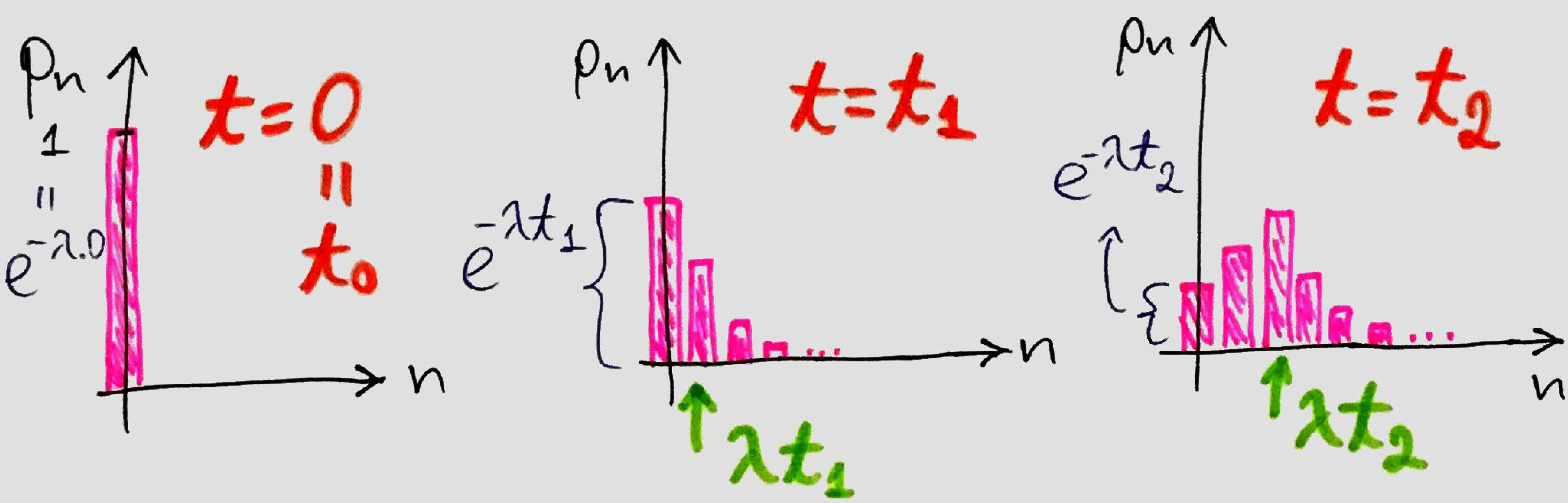
PROCESSO DE POISSON

→ SOLUÇÃO: $$\boxed{p_n(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}}$$

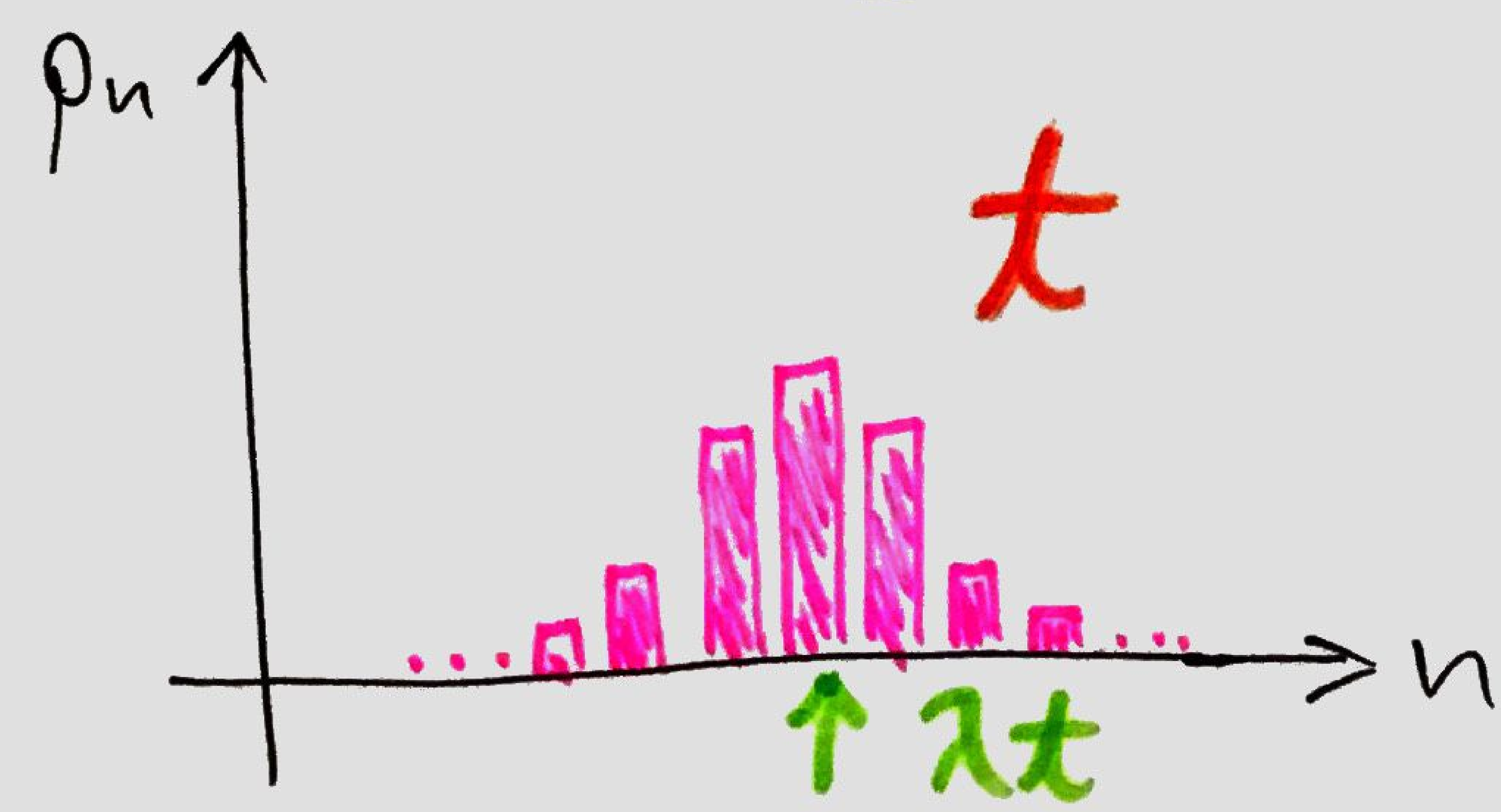
$\mu(t) = \langle N_t \rangle = \lambda t$

JUSTIFICATIVA: FUNÇÕES GERADORAS OU INDUÇÃO FINITA A PARTIR DE

$$\begin{cases} \dot{p}_0 = -\lambda p_0 \\ p_0(0) = 1 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{p_0(t) = e^{-\lambda t}}$$



...



→ NÃO CONFUNDA $p_0(t)$, QUE É A PROBABILIDADE DE NENHUM EVENTO OCORRER DE 0 A t, COM A "PROBABILIDADE" DO 1º EVENTO OCORRER "EM t".

→ O CORRETO É PERGUNTAR QUAL É A PROBABILIDADE DO 1º EVENTO OCORRER ENTRE t E $t+\Delta t$, QUE É

→ TEMPO ESTOCÁSTICO ENTRE O EVENTO ZERO E O EVENTO 1: V.A. CONTÍNUA, ÍNDICE DISCRETO - OUTRO PROCESSO!!!

$$\mathbb{P}(t < T_1 < t+\Delta t) =$$

$$= p_0(t) \cdot \mathbb{P}(\text{EVENTO EM } \Delta t)$$

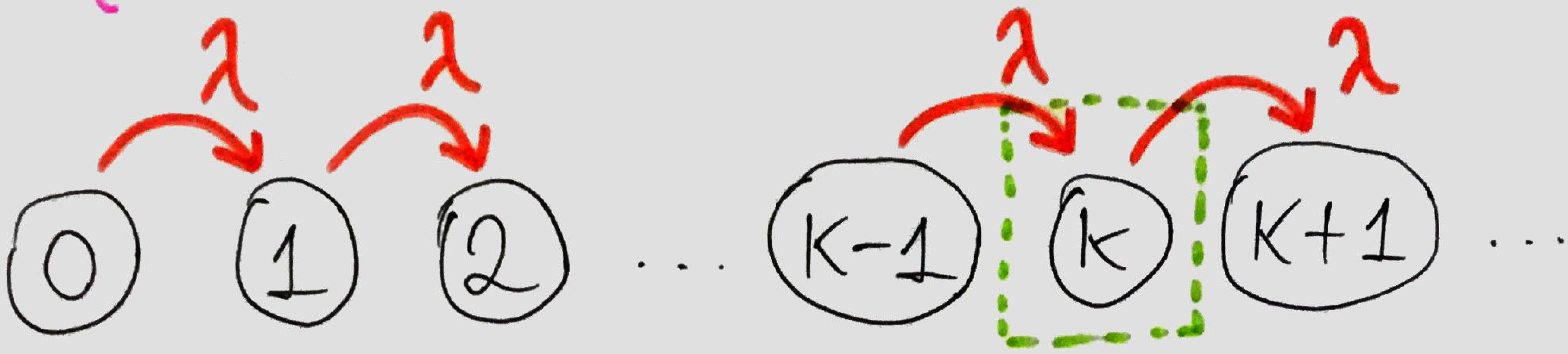
→ INDEPENDÊNCIA ESTATÍSTICA!

$$= p_0(t)\left[\lambda \Delta t + \mathcal{O}[(\Delta t)^2]\right]$$

$$= e^{-\lambda t} \cdot \lambda \Delta t + \mathcal{O}[(\Delta t)^2] = \rho_{T_1}(t)\,\Delta t + \mathcal{O}[(\Delta t)^2],$$

ONDE $\boxed{\rho_{T_1}(t) = \lambda e^{-\lambda t}}$ É A DENSIDADE DE PROBABILIDADE DO TEMPO DE ESPERA ENTRE EVENTOS.

DIAGRAMA DE ESTADOS
(FLUXOS DE PROBABILIDADE)



$$\dot{p}_K(t) = \underbrace{\lambda p_{K-1}(t)}_{\text{FLUXO POSITIVO}} - \underbrace{\lambda p_K(t)}_{\text{FLUXO NEGATIVO}}$$