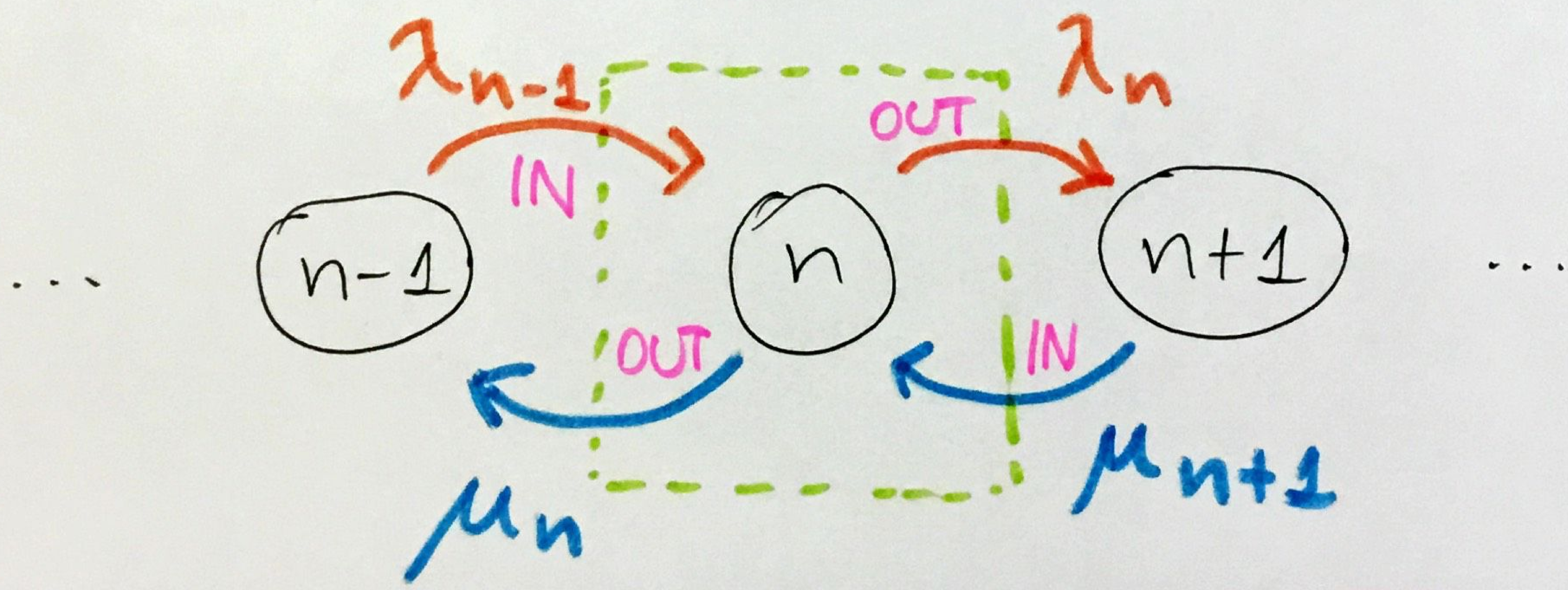
2020-1, "STATPHYS", AULA 15

OBJETIVOS: APRESENTAR MAIS EXEMPLOS E <u>TÉCNICAS</u> <u>DE</u> <u>SOLUÇÃO</u> DE EQS. MESTRAS.

ONDE ESTAMOS: 2. PROCESSOS ESTOCÁSTICOS, 2.3 EQUAÇÕES MESTRAS

* <u>EXEMPLOS ADICIONAIS</u>

(i) PROCESSOS DE UM PASSO (ONE STEP PROCESSES)



$$\boxed{\dot{p}_n = \lambda_{n-1} \cdot p_{n-1} + \mu_{n+1} \cdot p_{n+1} - (\lambda_n + \mu_n) \cdot p_n}$$

• PROCESSO DE YULE (NASCIMENTO LINEAR)

$$\boxed{\begin{aligned}\mu_n &= 0\\ \lambda_n &= \lambda . n\end{aligned}} \qquad \boxed{\dot{p}_n = \lambda(n-1).p_{n-1} - \lambda n . p_n}$$

• POISSON $\boxed{\begin{aligned}\mu_n &= 0\\ \lambda_n &= \lambda\end{aligned}}$ $\boxed{\dot{p}_n = \lambda p_{n-1} - \lambda p_n}$

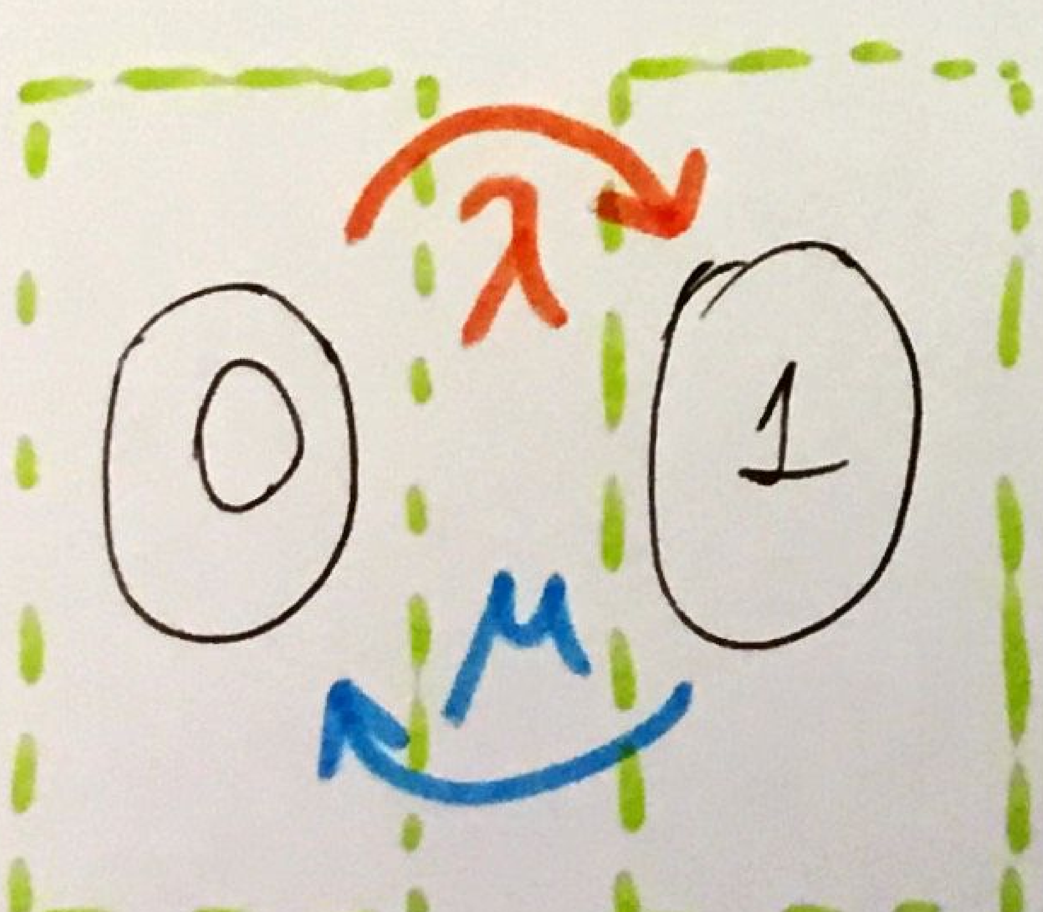
• NASCIMENTO E MORTE (BIRTH AND DEATH)

$$\boxed{\begin{aligned}\mu_n &= \mu . n\\ \lambda_n &= \lambda . n\end{aligned}}$$

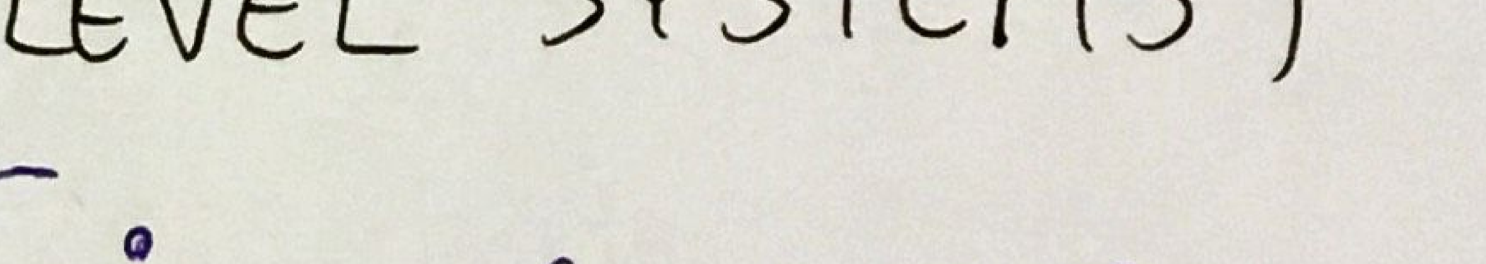
IMIGRAÇÃO?

$$\boxed{\dot{p}_n = \lambda(n-1)p_{n-1} + \mu(n+1)p_{n+1} - (\lambda+\mu)np_n + \alpha}$$

• TELÉGRAFO (RANDOM TELEGRAPH PROCESS - TWO-LEVEL SYSTEMS)



$$\begin{cases}\dot{p}_0 = -\lambda p_0 + \mu p_1\\ \dot{p}_1 = +\lambda p_0 - \mu p_1\end{cases}$$



RUÍDO, VIDA REAL

ii · REAÇÕES QUÍMICAS

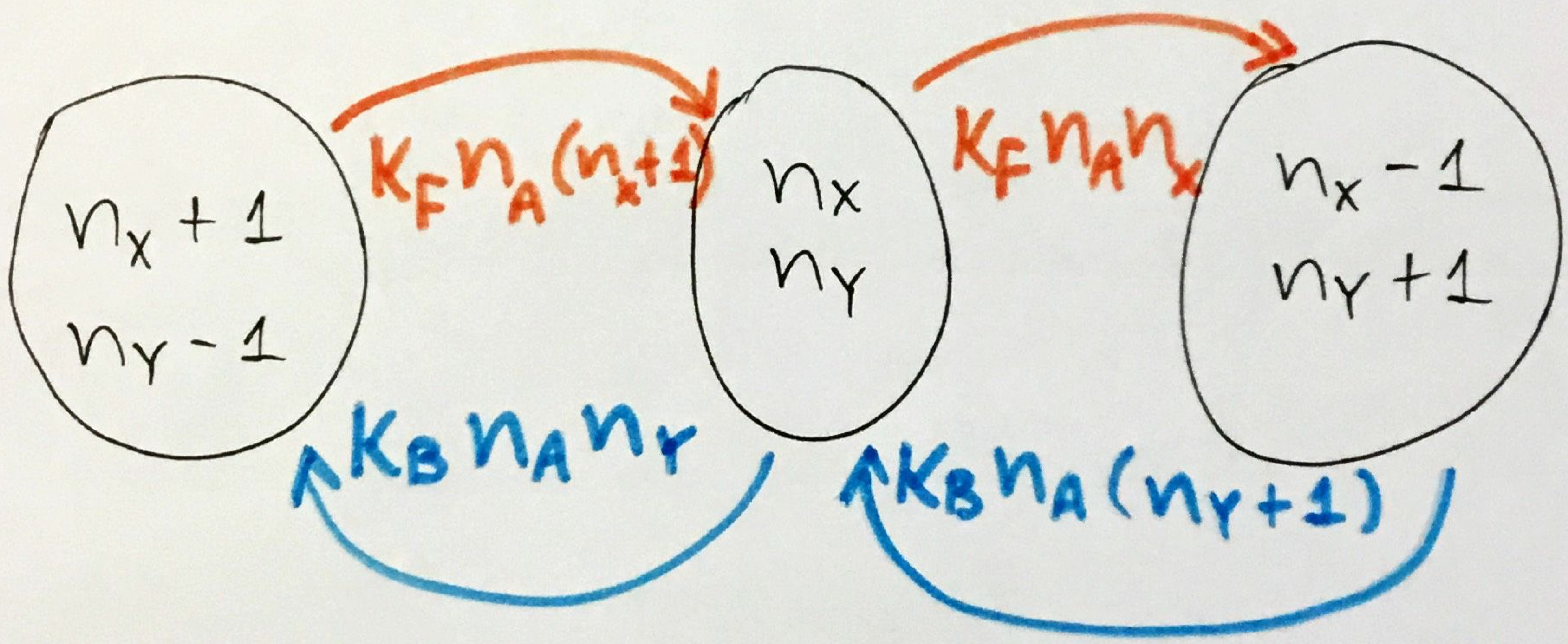
→ CINÉTICA QUÍMICA <u>ESTOCÁSTICA</u>

É NECESSÁRIA QUANDO HÁ PEQUENAS QUANTIDADES DE MOLÉCULAS.

· MODELO SIMPLES DE CATÁLISE

$$A + X \underset{K_B}{\overset{K_F}{\rightleftharpoons}} A + Y$$

$$\boxed{\begin{array}{l} n_A \text{ CTE} \\ n_X + n_Y \text{ CTE} \end{array}}$$

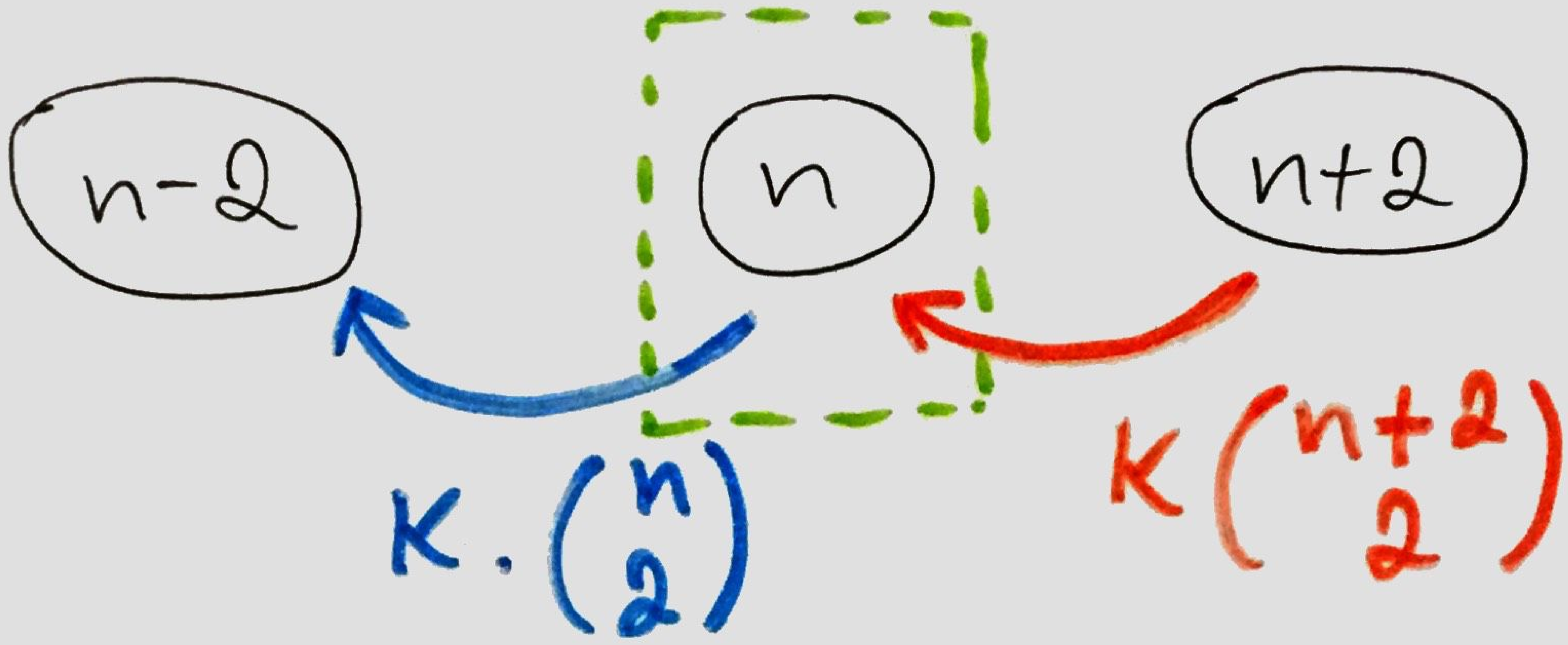


$$\boxed{\begin{array}{l} n_X + n_Y = N \\ n_X \to n \\ n_Y \to N - n \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\rho}_n = {} & K_F n_A (n+1) \rho_{n+1} + \\ & + K_B n_A (N-n+1) \rho_{n-1} - \\ & - \left\{ K_F n_A n + K_B n_A (N-n) \right\} \rho_n \end{aligned}}$$

· ESTEQUIOMETRIA NÃO TRIVIAL

$$2X \xrightarrow{K} B \qquad n_x \to n$$



$$\dot{\rho}_n = -K\binom{n}{2}\rho_n + K\binom{n+2}{2}\rho_{n+2}$$

QUADRÁTICO EM n

* MÉTODOS DE SOLUÇÃO

(i) BUSCAR "MOMENTOS" PARTICULARES (MÉDIA, VARIÂNCIA, ...), INFORMAÇÃO INCOMPLETA

→ POR EXEMPLO, NO PROCESSO DE YULE, SE $\boxed{\mu(t) \equiv \sum_n n \cdot \rho_n(t)}$ E

$$\boxed{\sigma(t) \equiv \sum_n n^2 \cdot p_n(t)}$$, É POSSÍVEL MOSTRAR QUE $\boxed{\dot{\mu}(t) = \lambda \cdot \mu(t)}$ E QUE

$$\boxed{\dot{\sigma}(t) = 2\lambda \cdot \sigma(t) + \lambda \mu(t)}.$$

◆ **EXERCÍCIO:** DEMONSTRE E RESOLVA AS EDO's ACIMA. ◆

(ii) MÉTODO DA FUNÇÃO GERADORA

(MÉTODO DAS <u>CARACTERÍSTICAS</u> PARA EDP's LINEARES DE 1ª ORDEM)

→ PREÂMBULO: POISSON

$$g(z,t) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) \cdot z^n$$

$$\dot{p}_n = \lambda p_{n-1} - \lambda p_n \quad \cdot z^n \quad \sum_{n=0}^{\infty}$$

$$\vdots$$

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial t}(z,t) = -\lambda(1-z) \cdot g(z,t)}$$

SEM t? FÁCIL!

$$g(z,t) = g(z,0)\, e^{-\lambda t(1-z)}$$

$$\Downarrow \quad \sum_n \underbrace{p_n(0)}_{\delta_{n,0}} . z^n = 1$$

$$g(z,t) = e^{-\lambda t} . e^{\lambda t z}$$

$$= e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t z)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} \right] z^n$$

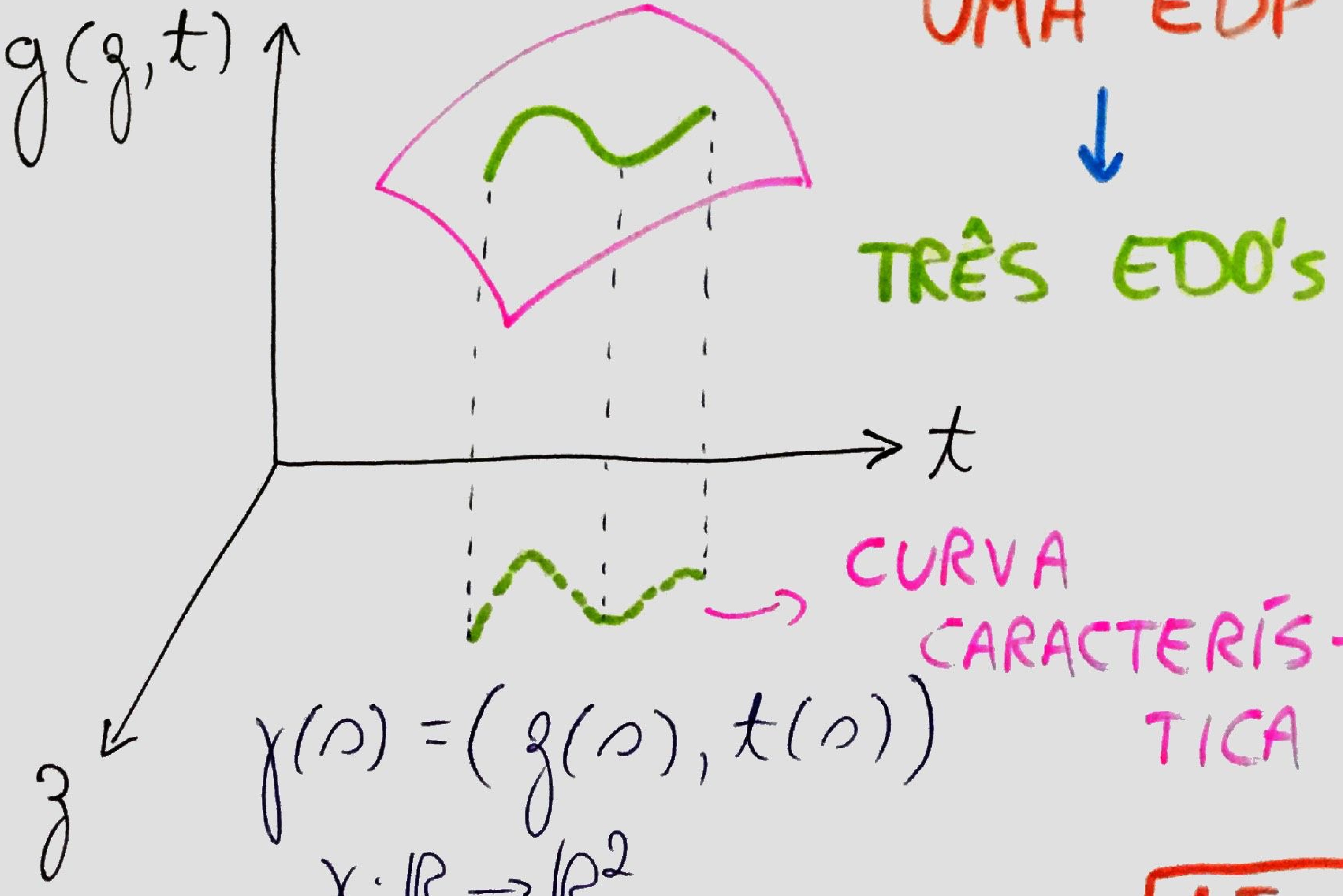
$$\therefore \boxed{p_n(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}}$$

→ MÉTODO GERAL

UMA EDP

↓

TRÊS EDO's



$$\gamma(s) = (z(s), t(s))$$

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

- REGRA DA CADEIA P/ FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS: $g(z,t)$; $z=z(s)$; $t=t(s)$

$$\tilde{g}(s) \equiv g(z(s),t(s))$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d\tilde{g}}{ds}(s) = \frac{\partial g}{\partial z}(z(s),t(s)) \cdot \frac{dz}{ds}(s) + \frac{\partial g}{\partial t}(z(s),t(s)) \cdot \frac{dt}{ds}(s)$$

- DADA UMA EQ. MESTRA, A GERADORA OBEDECE UMA EDP LINEAR DE 1ª ORDEM, QUE PODE SER "MAPEADA NA REGRA DA CADEIA".

- OBTEREMOS $z(s)$, $t(s)$ E $\boxed{\tilde{g}(s)}$. "POR INSPEÇÃO", EXTRAIREMOS A FORMA DE $g(z,t)$.

◇ EXEMPLO: NASCIMENTO E MORTE

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \left[\lambda z^2 - (\mu+\lambda) z + \mu\right] \cdot \frac{\partial g}{\partial z}$$

$$\frac{d\tilde{g}}{ds} = \frac{\partial g}{\partial z}\frac{dz}{ds} + \frac{\partial g}{\partial t}\frac{dt}{ds}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dt}{ds} = 1 \\[2ex] \dfrac{dz}{ds} = -\left[\lambda z^2 - (\mu+\lambda) z + \mu\right] \\[2ex] \dfrac{d\tilde{g}}{ds} = 0 \end{cases}$$

◆ **EXERCÍCIO:** USANDO FRAÇÕES PARCIAIS, MOSTRE QUE, P/ $\mu \neq \lambda$,

$$\boxed{z(s) = \frac{1 - \frac{\mu}{\lambda} e^{-(\lambda-\mu)s}\left(\frac{z(0)-1}{z(0)-\mu/\lambda}\right)}{1 - e^{-(\lambda-\mu)s}\left(\frac{z(0)-1}{z(0)-\mu/\lambda}\right)}}.$$ ◆

$$\boxed{t(s) = s + K}$$

$K = 0$, S/ PERDA DE GENERALIDADE

$$\tilde{g}(s) = \text{CTE} \boxed{= \tilde{g}(0)} = g(z(0), t(0)) =$$

$$= g(z(0), 0)$$

IMPORTANTE!

DIGAMOS QUE $p_n(0) = \delta_{n,m}$.

ENTÃO $g(z,0) = \sum_n p_n(0) \cdot z^n = z^m$ E

$$\boxed{\tilde{g}(s) = [z(0)]^m}.$$

DEVERÍAMOS TER EXPRESSADO $z(0)$ COMO FUNÇÃO DE $z(s)$, E NÃO O CONTRÁRIO!

$$\boxed{z(0) = \frac{\frac{\mu}{\lambda}(1-z) + \left(z - \frac{\mu}{\lambda}\right)e^{-(\lambda-\mu)s}}{1 - z + \left(z - \frac{\mu}{\lambda}\right)e^{-(\lambda-\mu)s}}}$$

$s \to t$, $z(s) \to z$, $\tilde{g}(s) \to g(z,t)$

$$\boxed{g(z,t) = \left[\frac{\frac{\mu}{\lambda}(1-z) + \left(z - \frac{\mu}{\lambda}\right)e^{-(\lambda-\mu)t}}{1 - z + \left(z - \frac{\mu}{\lambda}\right)e^{-(\lambda-\mu)t}}\right]^m}$$