

Física I



A Lei da Gravitação Universal

Física I

Módulo IV, Aula 3

Lei da Gravitação Universal:

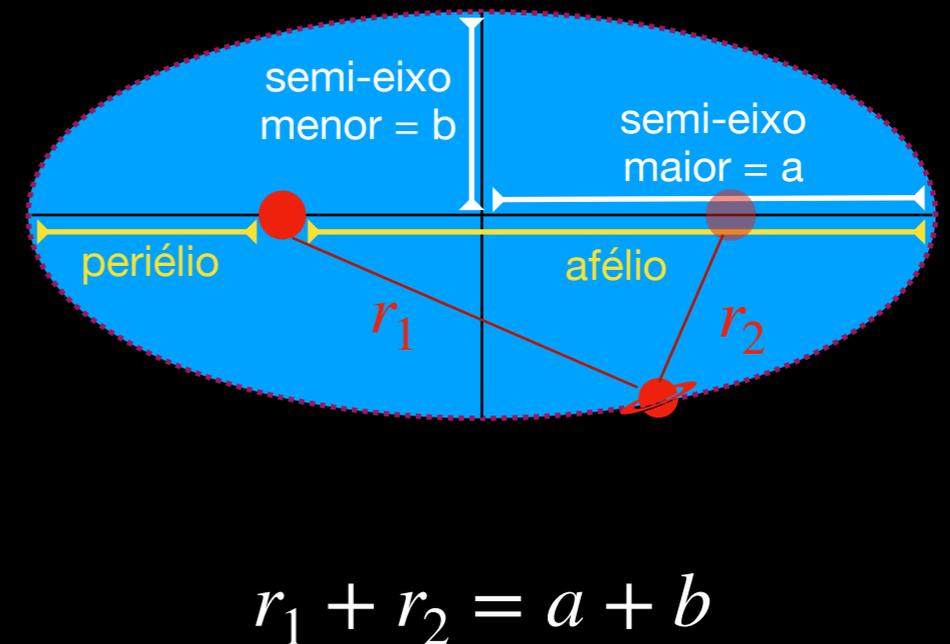
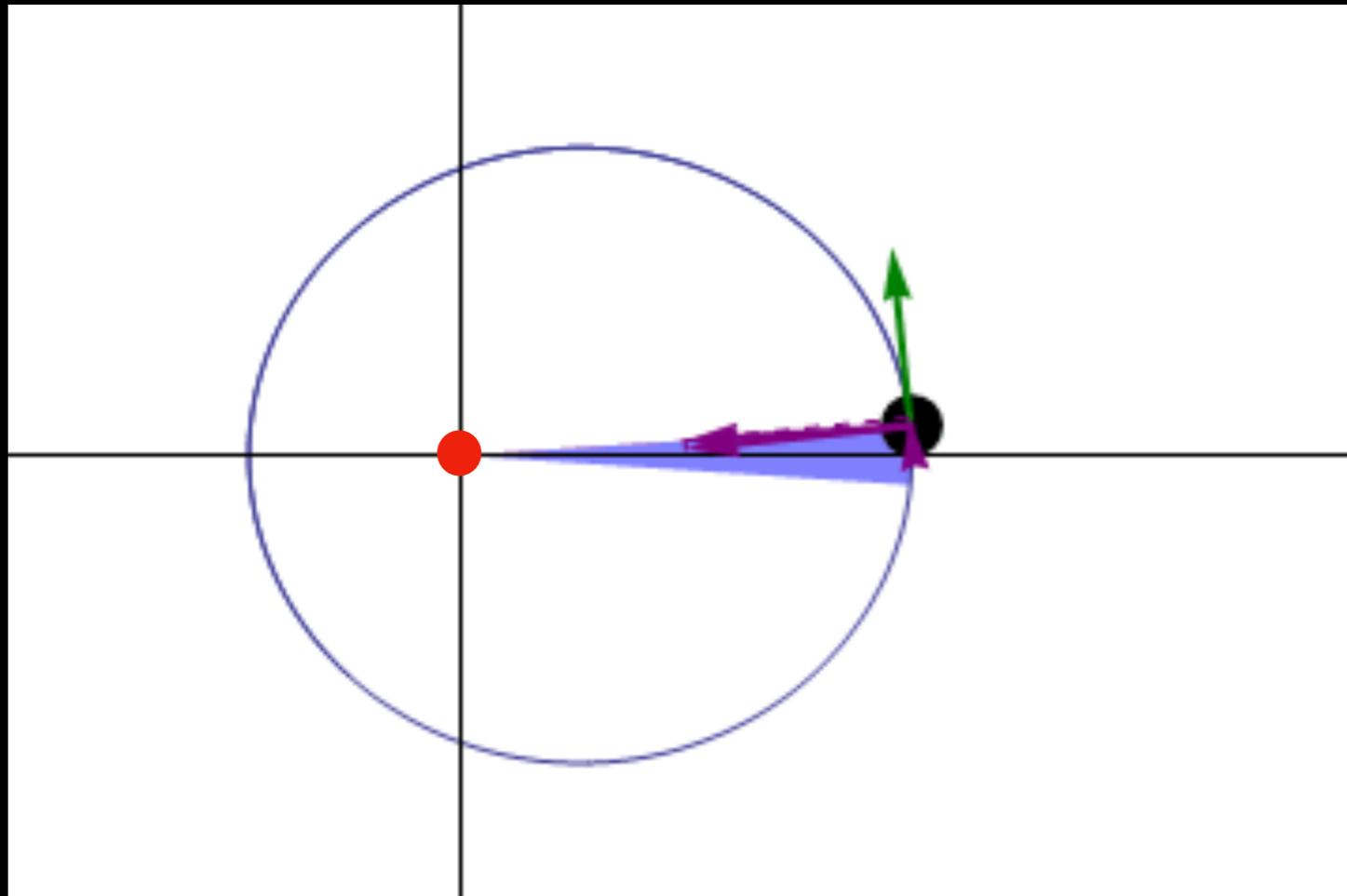
As órbitas Keplerianas

O vetor de Laplace-Runge-Lenz

As seções cônicas

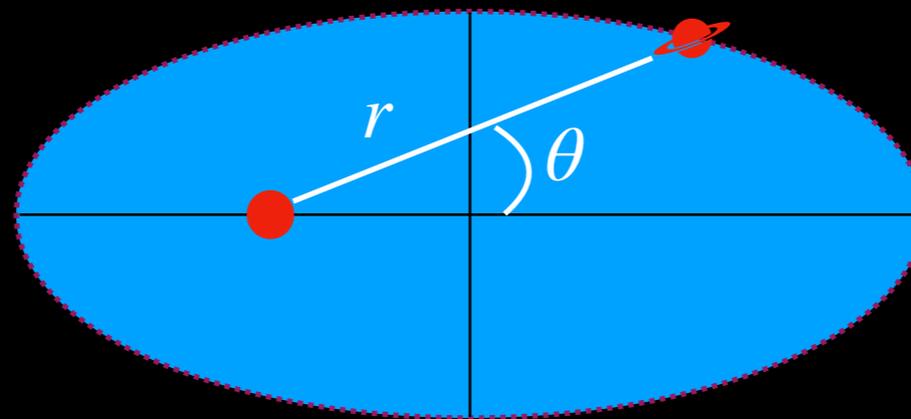
O potencial efetivo

As órbitas Keplerianas (elipses)



Um corpo em órbita ao redor do **Centro de Massa** de um sistema de 2 corpos se move numa elipse

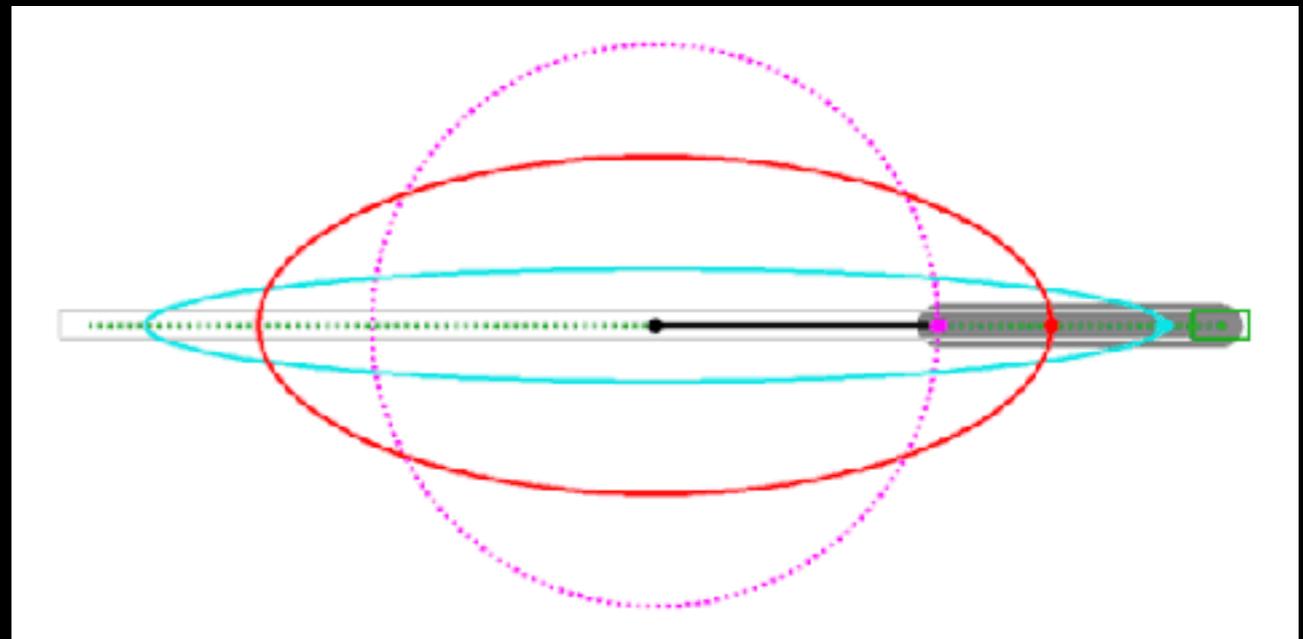
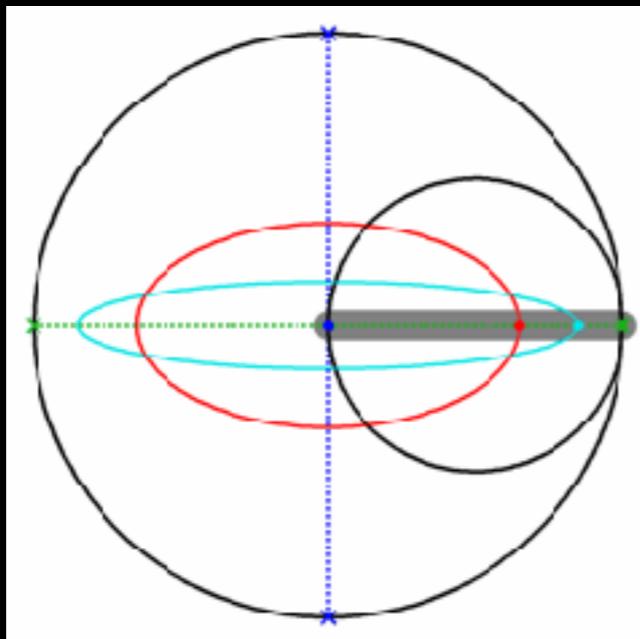
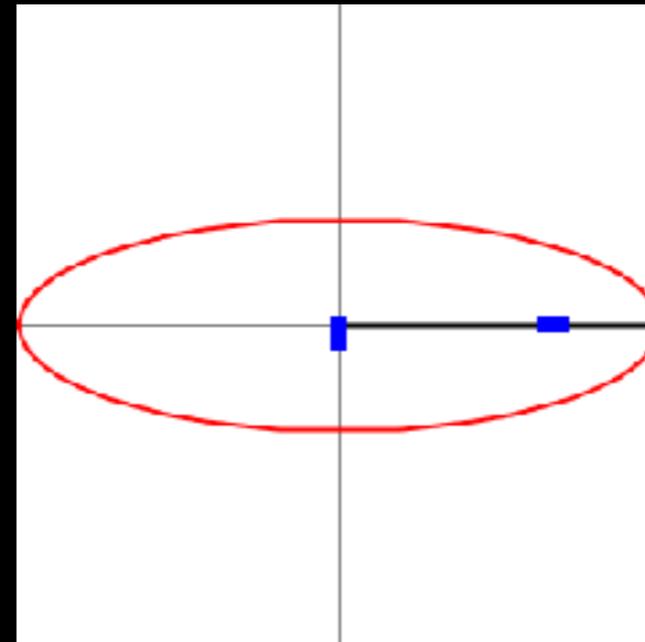
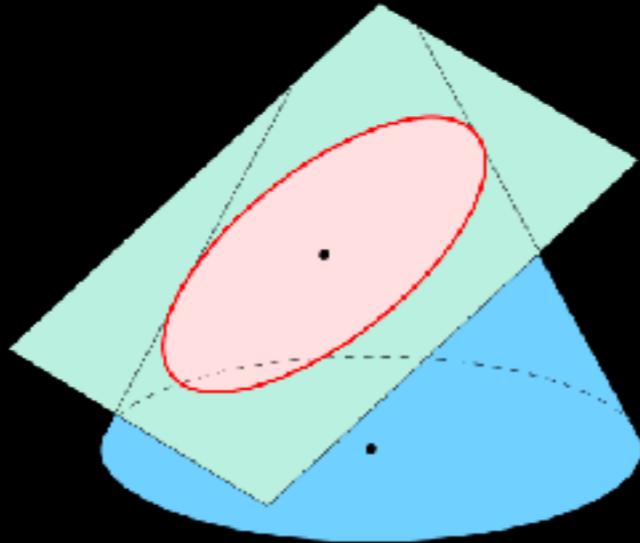
As órbitas Keplerianas (elipses)



$$r(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 \pm \cos \theta} \quad e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

As elipses são curvas realmente mágicas...
veja <https://en.wikipedia.org/wiki/Ellipse>

As órbitas Keplerianas (elipses)



As elipses são curvas realmente mágicas...
veja <https://en.wikipedia.org/wiki/Ellipse>

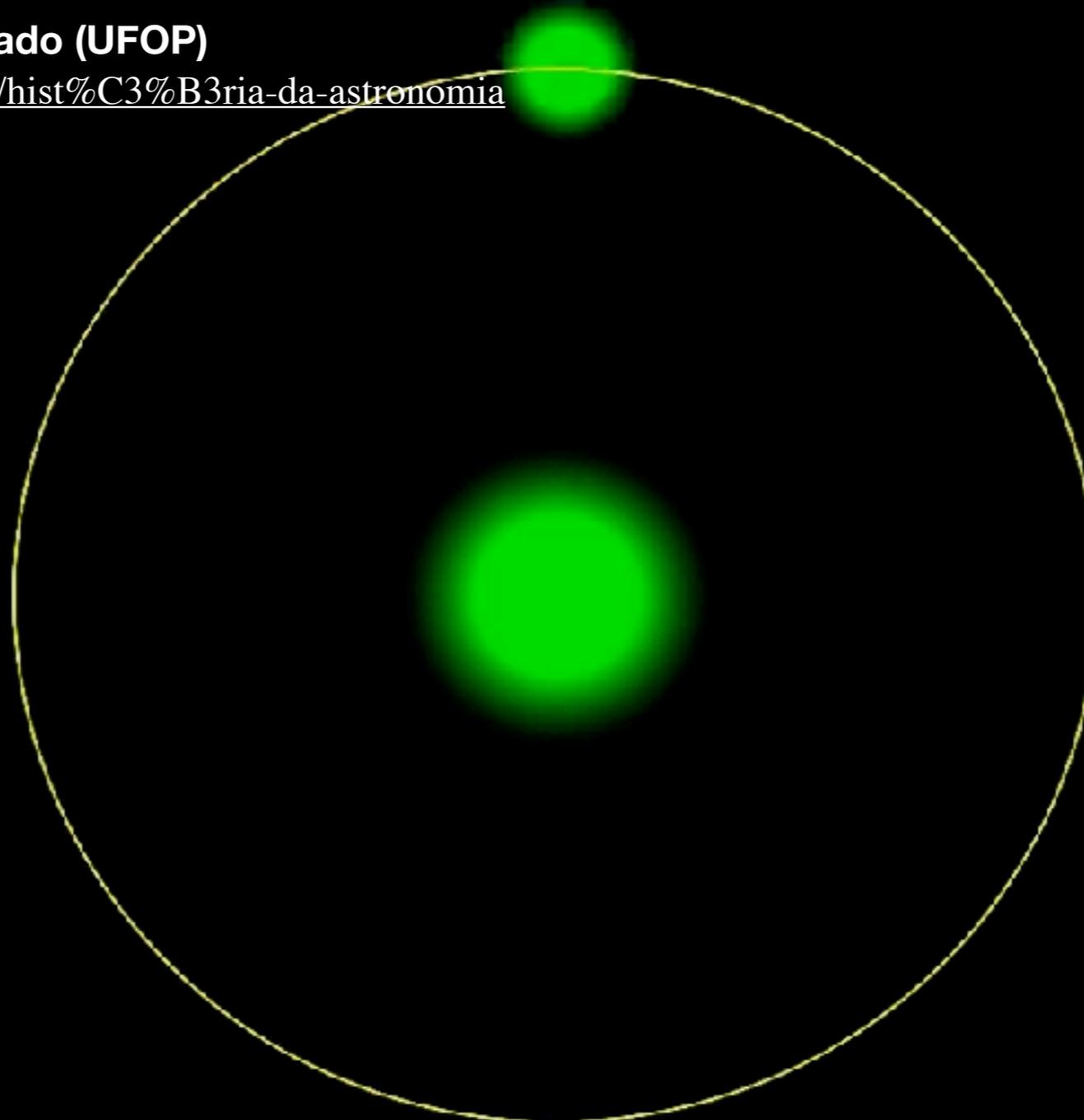
As órbitas Keplerianas (elipses)

time : 33.2000

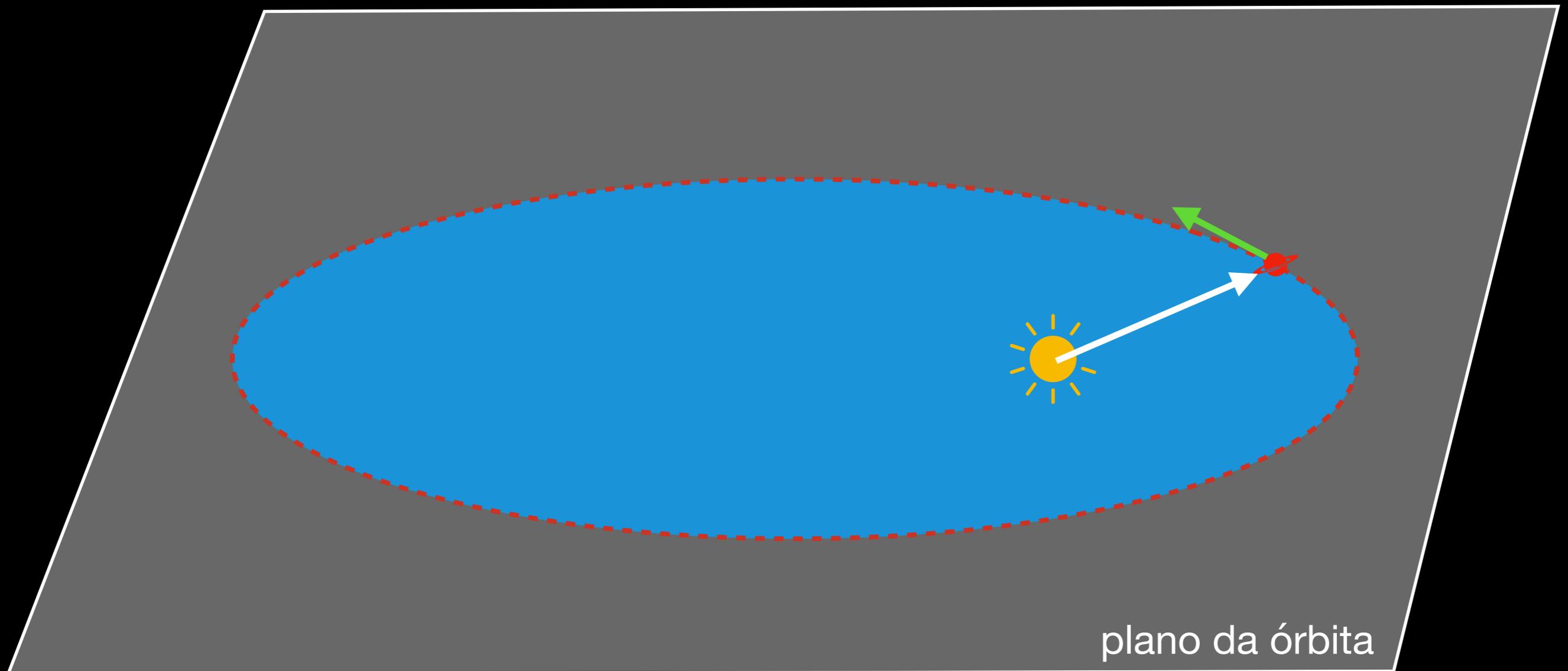
Simulações de Rubens Machado (UFOP)

<http://professor.ufop.br/rgmachado/hist%C3%B3ria-da-astronomia>

circular orbit

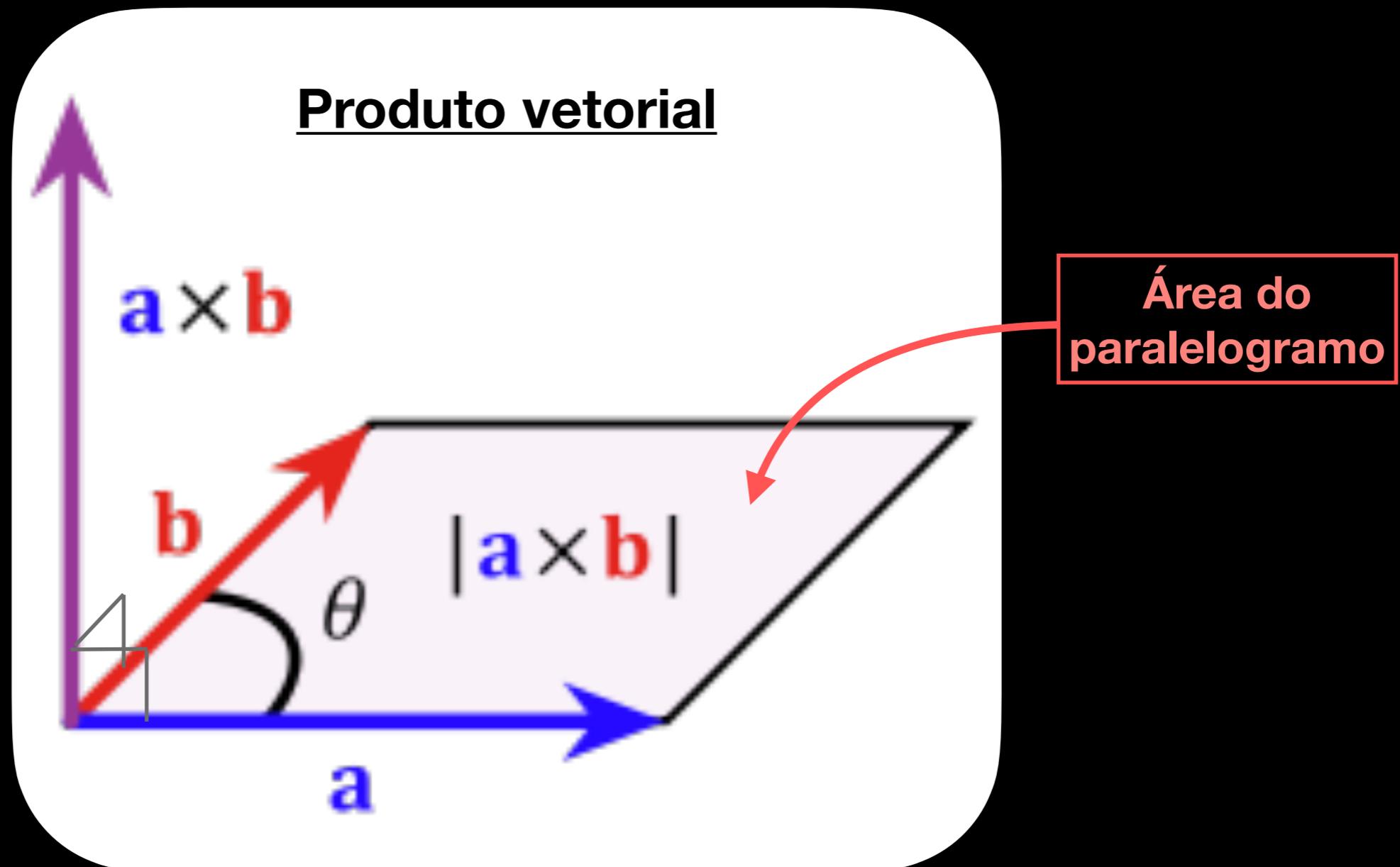


O plano da órbita



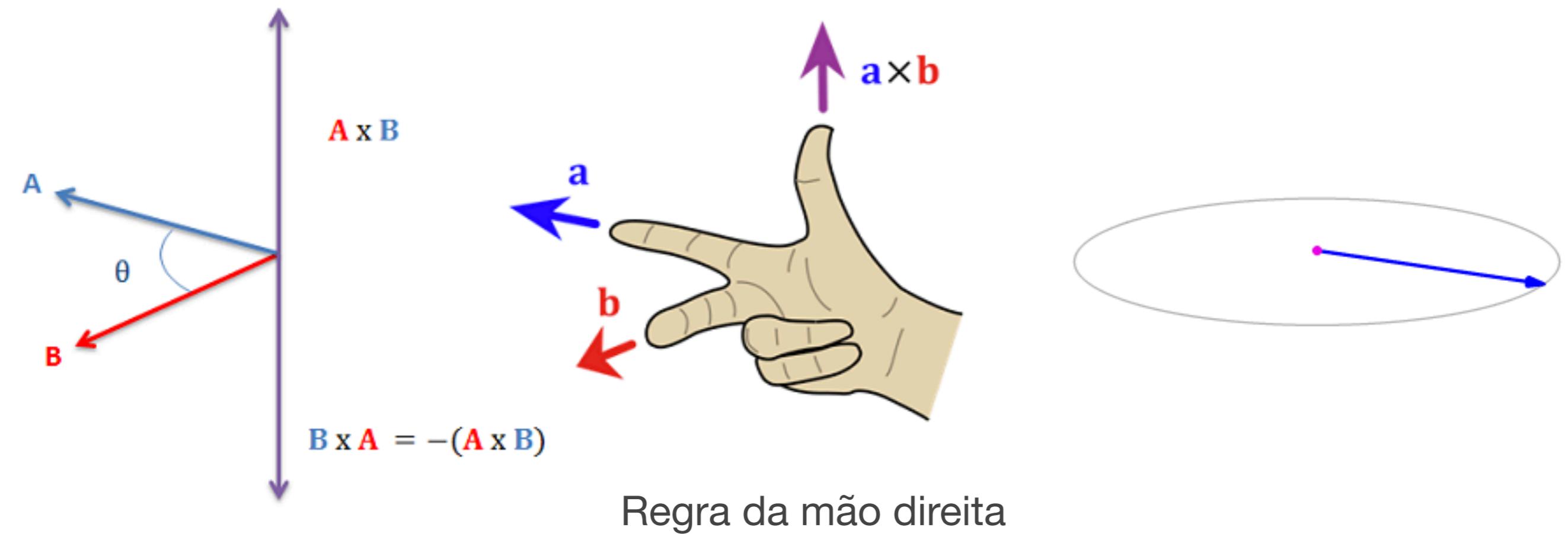
Mas vamos retornar ao problema de 2 corpos.
Comece notando que o ***plano da órbita é fixo.***

O plano da órbita



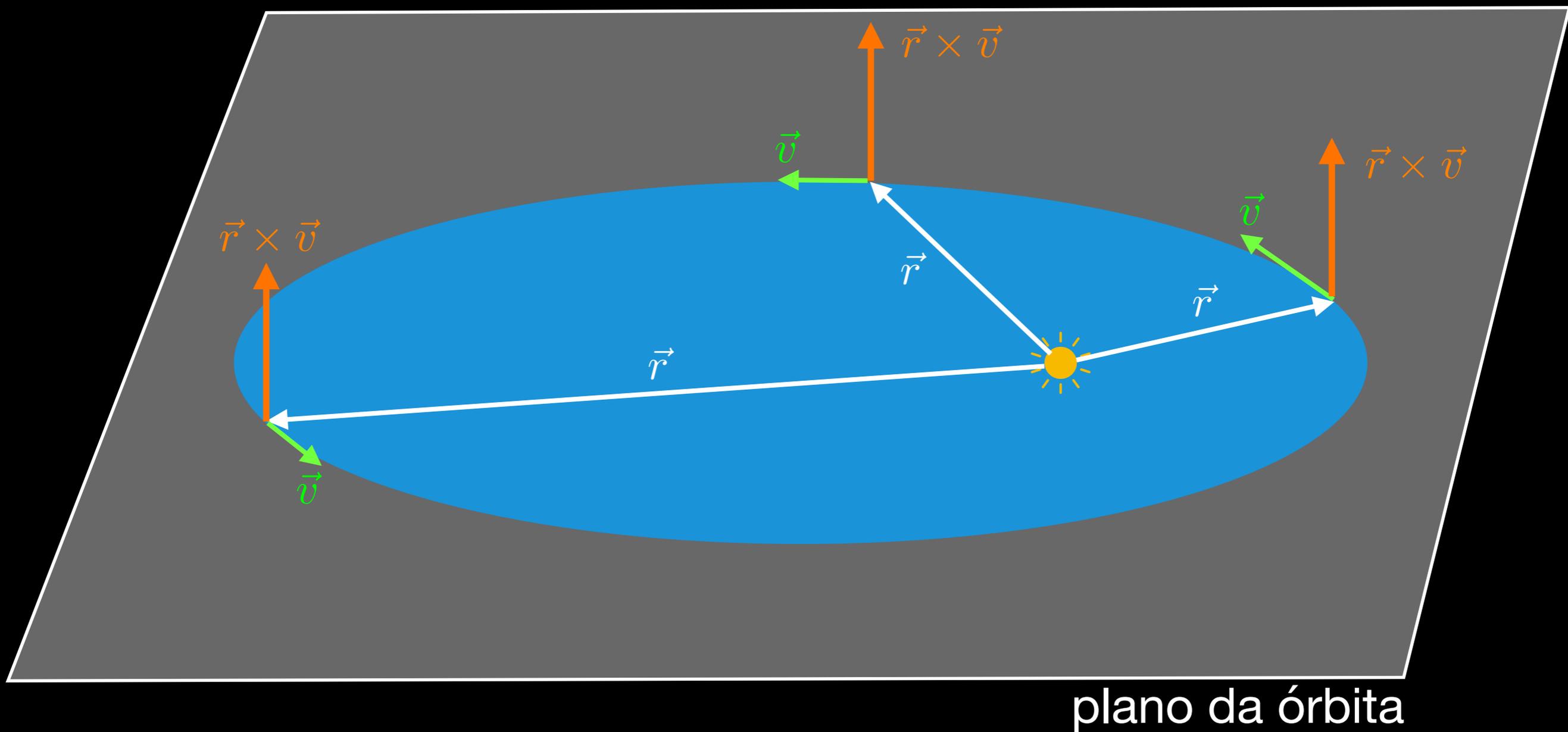
$$|\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \theta$$

O plano da órbita



$$|\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \theta$$

O plano da órbita



Duas observações, três teoremas

- Vamos partir da observação de *duas propriedades das órbitas*:
 - (a) O *plano da órbita* não muda com o tempo: o eixo perpendicular ao movimento é fixo.
 - (b) A *direção dos semi-eixos* da elipse são fixas (não mudam com o tempo). Isso é equivalente a dizer que as *órbitas são fechadas*.
- Essas propriedades seguem de três Teoremas, que vamos provar nesta aula:
 - (i) Para forças centrais ($\vec{F} \sim \hat{r}$), a quantidade $\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{v}$ (um vetor perpendicular ao plano da órbita) permanece constante.
 - (ii) No caso específico de uma força central que decai com $\sim 1/r^2$, a direção definida pelo semi-eixo maior pode ser expressa pelo vetor de Laplace-Runge-Lenz, e esse vetor também permanece fixo (constante).
 - (iii) No caso particular da força Newtoniana, as trajetórias são seções cônicas.

Duas observações, três teoremas

Teorema (i)

- Vamos mostrar agora que, quando a força é na direção radial $\vec{F} \sim \hat{r}$, a quantidade $\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{v}$ se conserva (ou seja, ela permanece constante).
- Se $\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{v}$ é constante, então sua derivada deve ser nula:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{\ell} &= \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{v}) = \dot{\vec{r}} \times \vec{v} + \vec{r} \times \dot{\vec{v}} \\ &= \vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{a} = 0 + \vec{r} \times \frac{\vec{F}}{m} \end{aligned}$$

A rigor, aqui em vez de m deveríamos escrever a *massa reduzida*, μ ; e o raio r se refere à distância entre as duas massas (M e m).

- Mas forças centrais são tais que $\vec{F} \sim \hat{r}$, portanto $\vec{r} \times \vec{F} \sim \vec{r} \times \hat{r} = 0$.
- Portanto, está demonstrado que $\vec{\ell}$ é uma **constante do movimento**.



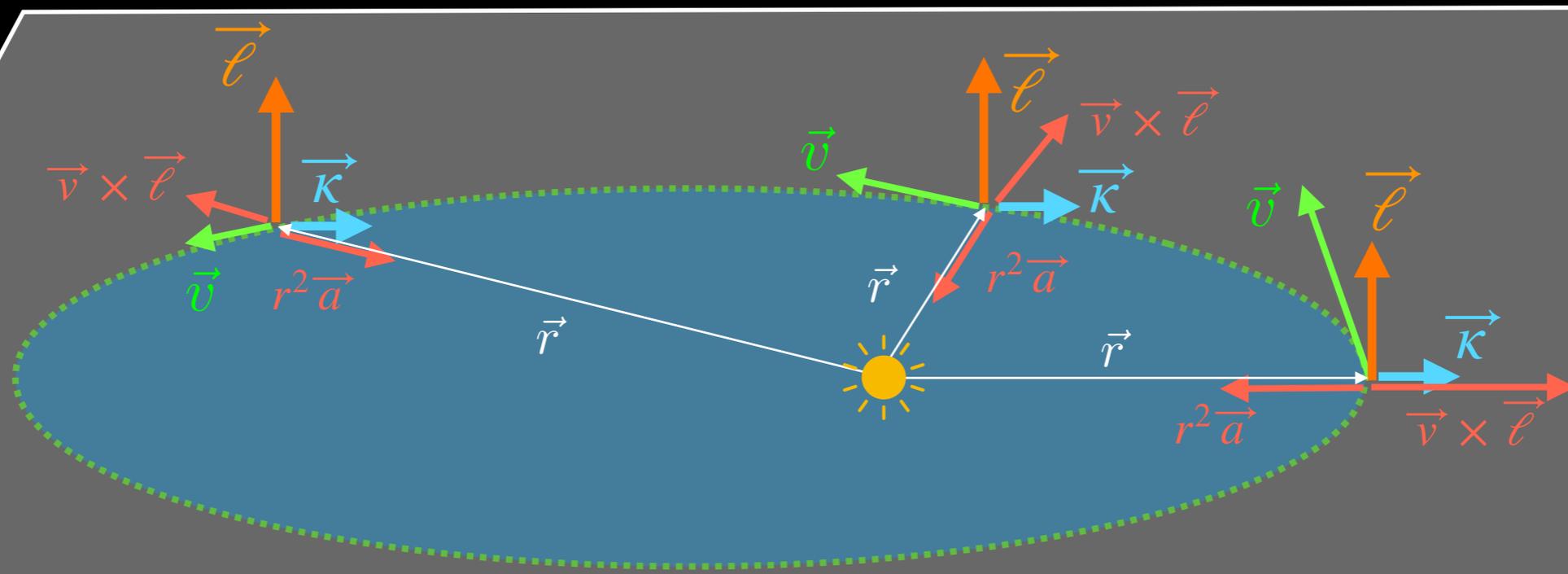
Duas observações, três teoremas

Teorema (ii)

- Vamos introduzir o **vetor de Laplace-Runge-Lenz** (às vezes chamado de **vetor de Lenz**), e mostrar que ele *se conserva*. Pela definição:

$$\vec{\kappa} = \vec{v} \times \vec{\ell} + \frac{r^2 \vec{F}}{m} = \vec{v} \times \vec{\ell} + r^2 \vec{a}, \quad \text{com } \vec{F} = m \vec{a} \sim r^{-2} \hat{r}$$

- É útil, antes de demonstrar esse teorema, visualizar esse vetor:



Duas observações, três teoremas

Teorema (ii)

- Vamos demonstrar que de fato $\vec{\kappa} = \vec{v} \times \vec{\ell} + r^2 \vec{F}/m = \vec{v} \times \vec{\ell} - GM\hat{r}$ é um vetor "conservado" (constante). Vejamos:

$$\frac{d}{dt} \vec{\kappa} = \frac{d}{dt} (\vec{v} \times \vec{\ell}) - \frac{d}{dt} \left(GM \frac{\vec{r}}{r} \right) = \vec{a} \times \vec{\ell} - GM \left(\frac{\vec{v}}{r} - \frac{\dot{r} \vec{r}}{r^2} \right),$$

onde note que $d\vec{r}/dt = \vec{v}$, mas $\dot{r} \hat{r} \neq \vec{v}$!

- Agora, lembre-se que, por hipótese, $\vec{a} = \vec{F}/m = -GM\vec{r}/r^3$, logo, usando $\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{v}$:

$$\frac{d}{dt} \vec{\kappa} = -\frac{GM}{r^3} \vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{v}) - GM \left(\frac{\vec{v}}{r} - \frac{\dot{r} \vec{r}}{r^2} \right)$$

$$= -\frac{GM}{r^3} [\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{v}) - \vec{v}(\vec{r} \cdot \vec{r})] - GM \left(\frac{\vec{v}}{r} - \frac{\dot{r} \vec{r}}{r^2} \right)$$

$$= -\frac{GM}{r^3} [\cancel{\vec{r}(r\dot{r})} - \vec{v}r^2] - GM \left(\cancel{\frac{\vec{v}}{r}} - \cancel{\frac{\dot{r} \vec{r}}{r^2}} \right)$$

$$= 0 !!!$$

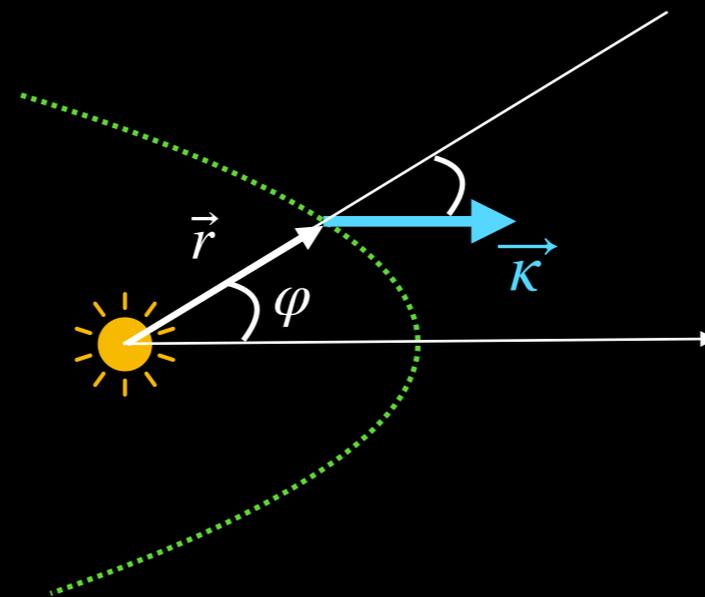


Duas observações, três teoremas

Teorema (iii)

- Finalmente, vamos agora mostrar que, no caso da força da gravidade de Newton, que é atrativa, e cai com a distância como $1/r^2$, as trajetórias e órbitas são sempre *seções cônicas*.
- Lembrando que o vetor de Laplace-Runge-Lenz é $\vec{\kappa} = \vec{v} \times \vec{\ell} - GM\hat{r}$, e notando que ele é *constante* no caso da Lei da Gravitação, vamos ver como a posição \vec{r} se orienta com relação a $\vec{\kappa}$:

$$\vec{r} \cdot \vec{\kappa} = r \kappa \cos \varphi$$



A rigor, aqui o raio r se refere à distância entre o CM (o foco da elipse) e a massa m . Porém, até agora estávamos usando r como sendo a distância entre as duas massas (M e m).

Para corrigir isso, lembre-se da relação obtida na aula passada (Aula 2):

$$r_{CM \leftrightarrow m} = \frac{M}{M+m} r_{M \leftrightarrow m}$$

A partir disso você pode corrigir os meus resultados por esse fator, $M/(M+m)$.

Duas observações, três teoremas

Teorema (iii)

- Vamos abrir essa expressão:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$$

$$\begin{aligned} \vec{r} \cdot \vec{\kappa} &= \vec{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{\ell}) - \vec{r} \cdot (GM \hat{r}) \\ &= \vec{\ell} \cdot (\vec{r} \times \vec{v}) - GM r = \vec{\ell} \cdot \vec{\ell} - GM r \end{aligned}$$

- Portanto, temos que:

$$\vec{r} \cdot \vec{\kappa} = r \kappa \cos \varphi = \ell^2 - GM r$$

- Invertendo isso para obter r chegamos em:

$$r (GM + \kappa \cos \varphi) = \ell^2$$

$$\implies r = \frac{\ell^2}{GM + \kappa \cos \varphi}$$

- Ou, usando uma notação mais adequada:

$$r = \frac{r_0}{1 + \epsilon \cos \varphi}, \quad \text{onde } r_0 = \ell^2 / (GM) \text{ e } \epsilon = \kappa / (GM) \text{ é a excentricidade}$$

Trajетórias: seções cônicas!

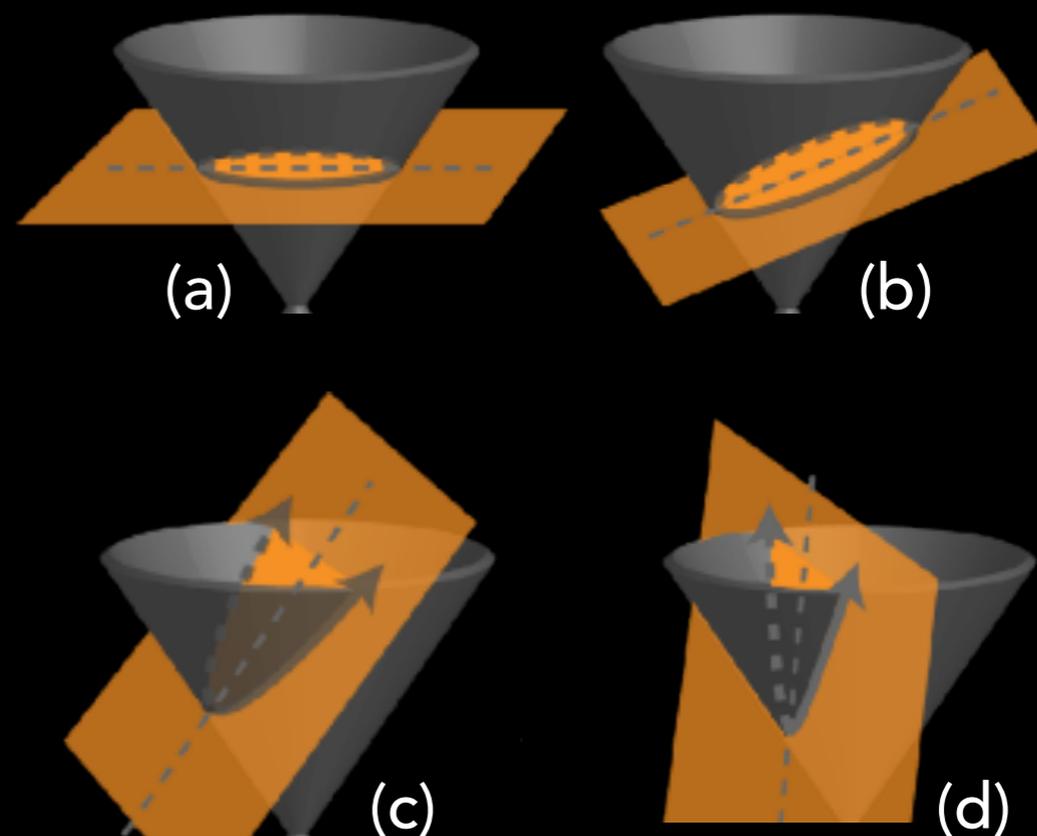
Teorema (iii)

- Isso não é nada mais, nada menos do que a *equação para seções cônicas*:

$$r = \frac{r_0}{1 + \epsilon \cos \varphi} \quad ,$$

onde:

- (a) $\epsilon = 0$ são círculos
- (b) $0 < \epsilon < 1$ são elipses
- (c) $\epsilon = 1$ são parábolas
- (d) $\epsilon > 1$ são hipérbolas



Trajетórias: seções cônicas!

● Seções cônicas: $r = \frac{r_0}{1 + \epsilon \cos \varphi}$,

onde $r_0 = \ell^2 / (GM)$ e $\epsilon = \kappa / (GM)$ é a **excentricidade**

(a) Órbita circular ($\epsilon = 0$)

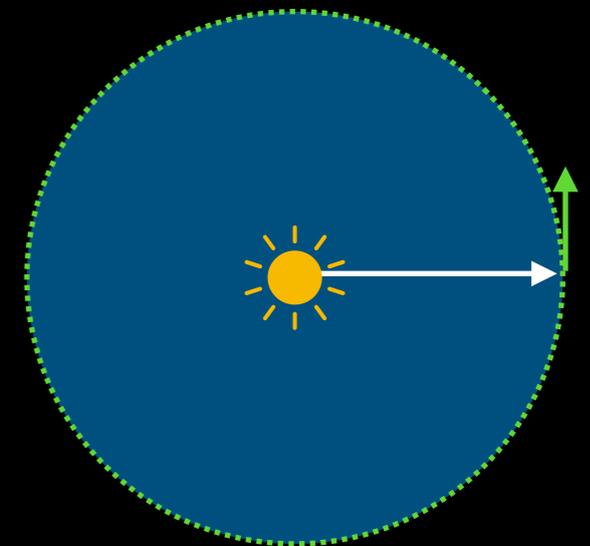
$$r = r_0 \hat{r} \quad , \quad v_0 = \omega_0 r_0$$

$$\vec{a} = -\omega_0^2 r_0 \hat{r} = -\frac{GM}{r_0^2} \hat{r} \quad , \quad GM = \omega_0^2 r_0^3$$

$$\vec{\ell} = r_0 v_0 \hat{z} = \omega_0 r_0^2 \hat{z}$$

$$\vec{\kappa} = \vec{v} \times \vec{\ell} - GM \hat{r} = \omega_0^2 r_0^3 \hat{r} - (\omega_0^2 r_0^3 \hat{r}) = 0 !$$

$$\implies r(\varphi) = \frac{(\omega_0 r_0^2)^2 / (\omega_0^2 r_0^3)}{1 + 0 \cos \varphi} = r_0 !$$



Trajетórias: seções cônicas!

- Seções cônicas: $r = \frac{r_0}{1 + \epsilon \cos \varphi}$,

onde $r_0 = \ell^2/(GM)$ e $\epsilon = \kappa/(GM)$ é a **excentricidade**

(b) Órbita elíptica ($0 < \epsilon < 1$)

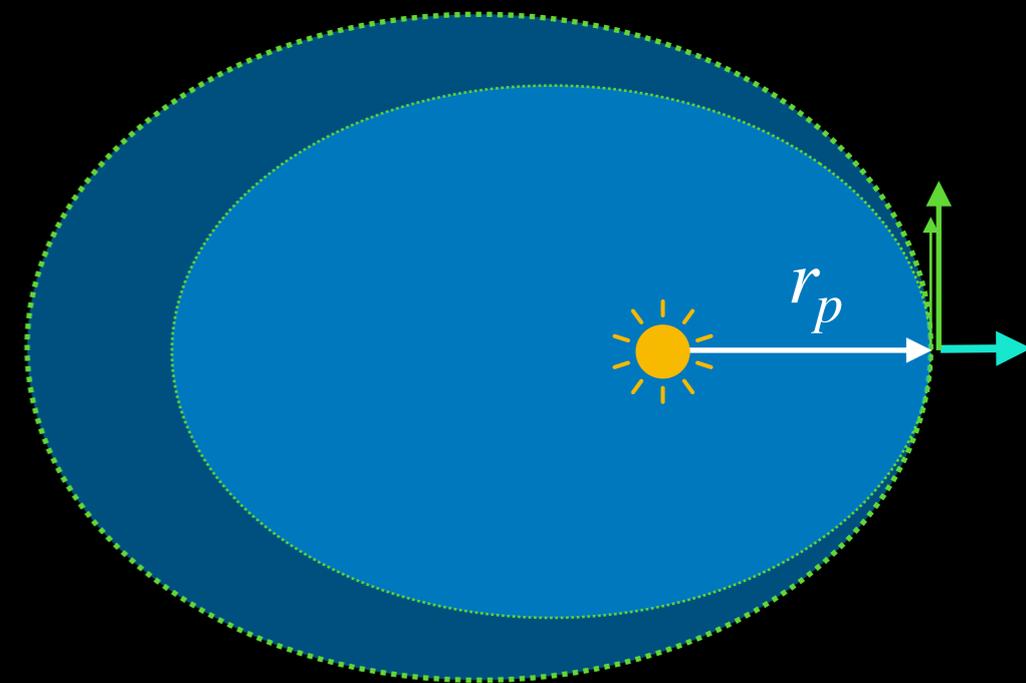
Aqui é útil tomar como referência o periélio:

$$\vec{r}(r_p) = r_p \hat{i} \quad , \quad \vec{v}(r_p) = v_{max} \hat{j} \quad , \quad \vec{\ell} = r_p v_{max} \hat{z}$$

$$\vec{\kappa} = \vec{v} \times \vec{\ell} - GM \hat{r} \xrightarrow{r_p} r_p v_{max}^2 \hat{i} - GM \hat{i} \quad ,$$

$$r_0 = \ell^2/(GM) \text{ e portanto } \epsilon = \ell^2/(r_p GM) - 1$$

$$\Rightarrow r(\varphi) = \frac{\ell^2/GM}{1 + \left(\frac{\ell^2}{r_p GM} - 1 \right) \cos \varphi}$$



Trajетórias: seções cônicas!

- Seções cônicas: $r = \frac{r_0}{1 + \epsilon \cos \varphi}$,

onde $r_0 = \ell^2/(GM)$ e $\epsilon = \kappa/(GM)$ é a **excentricidade**

(c) Órbita parabólica ($\epsilon = 1$)

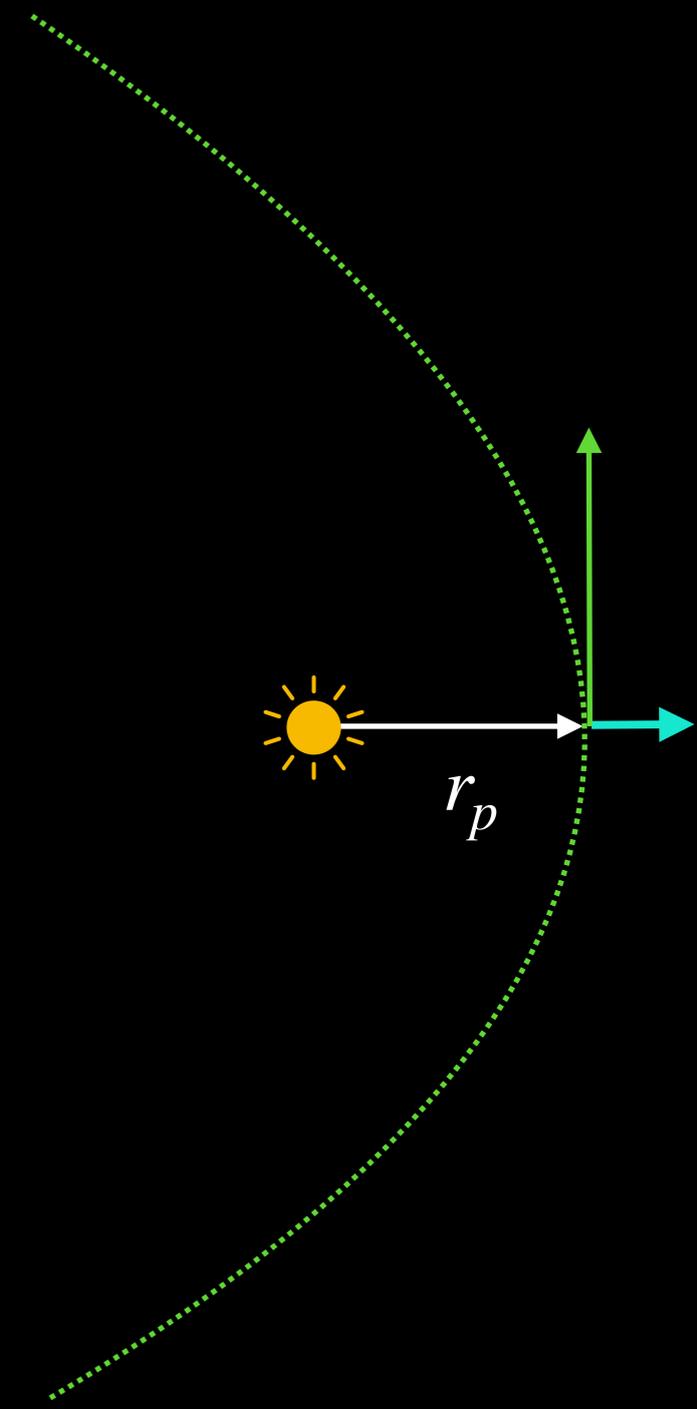
A partícula vem do infinito, atinge um ponto de máxima aproximação, e depois retorna ao infinito

$$\vec{r}(r_p) = r_p \hat{i} \quad , \quad \vec{v}(r_p) = v_{max} \hat{j} \quad , \quad \vec{\ell} = r_p v_{max} \hat{z}$$

$$\vec{\kappa} = \vec{v} \times \vec{\ell} - GM \hat{r} \xrightarrow{r_p} r_p v_{max}^2 \hat{i} - GM \hat{i} \quad ,$$

$$r_0 = \ell^2/(GM) \quad , \quad \epsilon = \ell^2/(r_p GM) - 1 = 1$$

$$\Rightarrow r(\varphi) = \frac{\ell^2/GM}{1 + \left(\frac{\ell^2}{r_p GM} - 1 \right) \cos \varphi} = \frac{2 r_p}{1 + \cos \varphi}$$



Trajетórias: seções cônicas!

- Seções cônicas: $r = \frac{r_0}{1 + \epsilon \cos \varphi}$,

onde $r_0 = \ell^2/(GM)$ e $\epsilon = \kappa/(GM)$ é a **excentricidade**

(d) Órbita hiperbólica ($\epsilon > 1$)

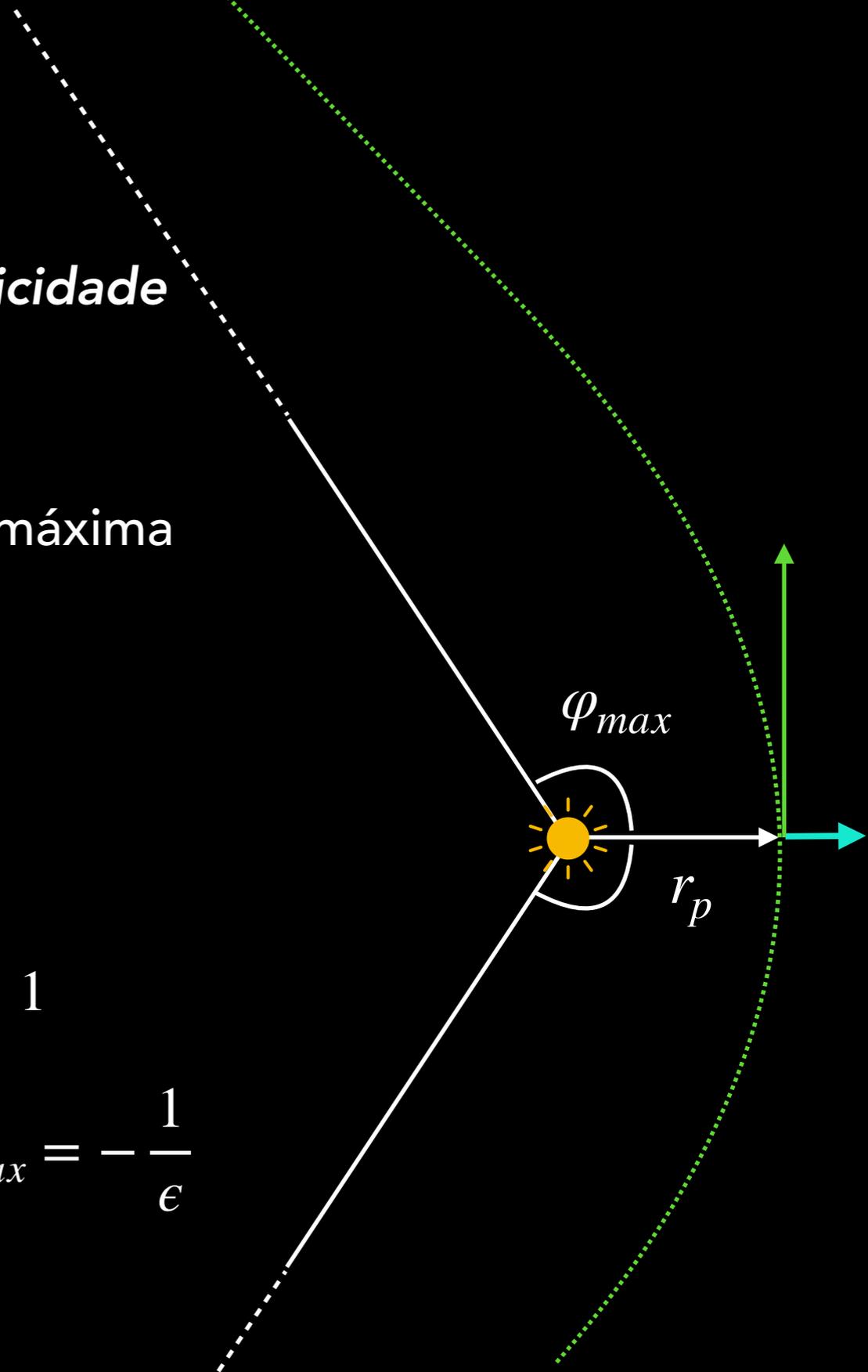
A partícula vem do infinito, atinge um ponto de máxima aproximação, e depois retorna ao infinito

$$\vec{r}(r_p) = r_p \hat{i}, \quad \vec{v}(r_p) = v_{max} \hat{j}, \quad \vec{\ell} = r_p v_{max} \hat{z}$$

$$\vec{\kappa} = \vec{v} \times \vec{\ell} - GM \hat{r} \xrightarrow{r_p} r_p v_{max}^2 \hat{i} - GM \hat{i},$$

$$r_0 = \ell^2/(GM) \text{ e portanto } \epsilon = \ell^2/(r_p GM) - 1 > 1$$

$$\Rightarrow r(\varphi) = \frac{\ell^2/GM}{1 + \left(\frac{\ell^2}{r_p GM} - 1\right) \cos \varphi}, \quad \cos \varphi_{max} = -\frac{1}{\epsilon}$$



A energia potencial e o potencial efetivo

- Vimos na aula passada que, se as *forças* são *conservativas*, existe um *balanço* entre a energia cinética e a energia potencial, de tal forma que a *energia total se conserva*:

$$E = K + U \quad \Longrightarrow \quad \frac{dE}{dt} = 0 = \frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt}$$

- Para uma única partícula, e em *uma dimensão* (x), $K = \frac{1}{2}m \dot{x}^2$, e $U = U(x)$, assim:

$$0 = \frac{1}{2}m 2 \dot{x} \ddot{x} + \frac{dU}{dx} \frac{dx}{dt} = \dot{x} \left(m\ddot{x} + \frac{dU}{dx} \right)$$

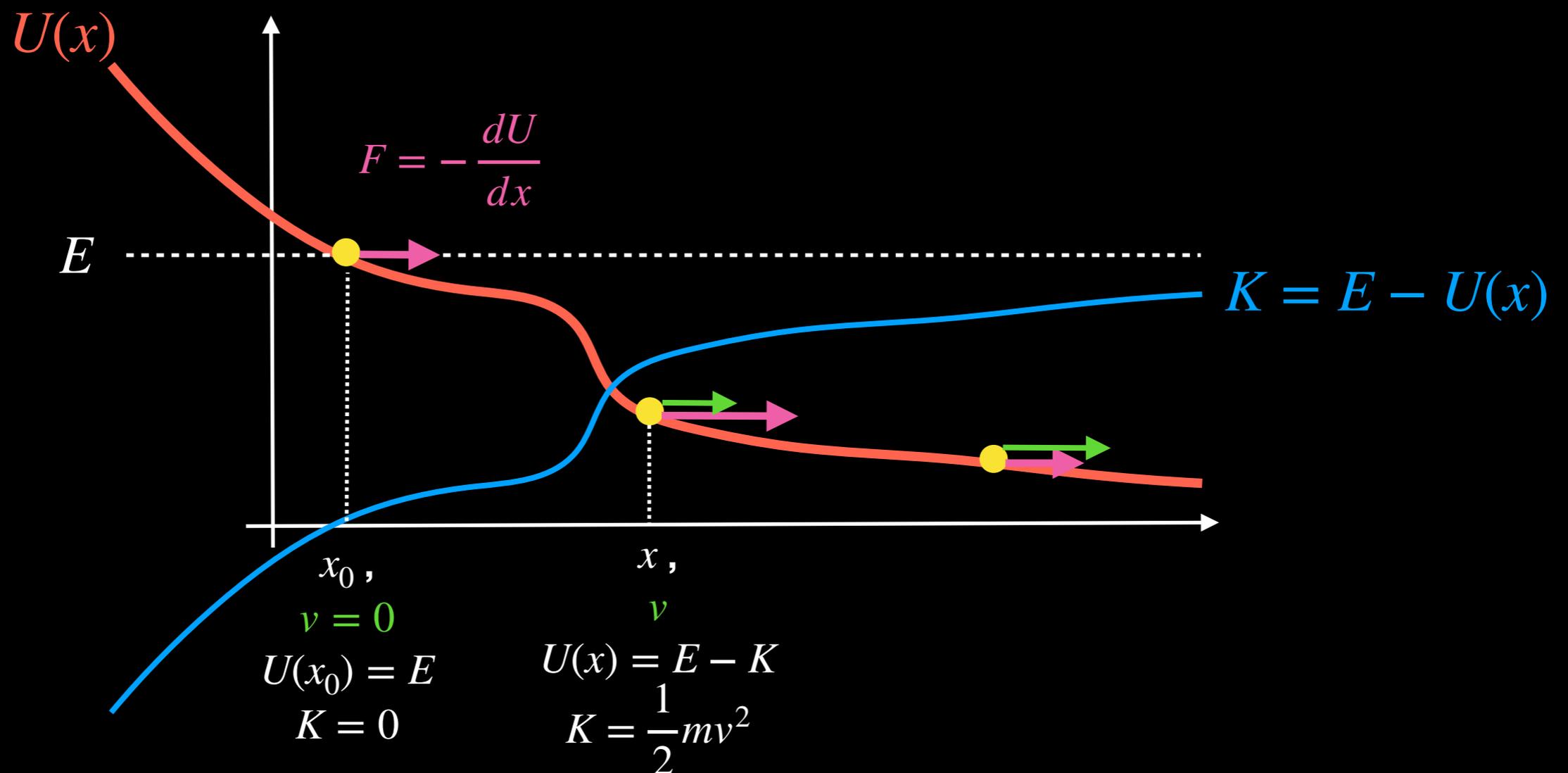
- Em 3D temos $K = \frac{1}{2}m \vec{v}^2$, e $U = U(\vec{r})$, assim:

$$0 = \frac{1}{2}m 2\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} + \vec{\nabla} U \cdot \dot{\vec{r}} = \vec{v} \cdot \left(m\vec{a} + \vec{\nabla} U \right)$$

- Ou seja, a *conservação de energia* implica na 2a Lei de Newton: $m\vec{a} = -\vec{\nabla} U = \vec{F}$
- A equação $E = K + U$ é uma "*primeira integral*" da equação de movimento $\vec{F} = m\vec{a}$

A energia potencial e o potencial efetivo

- É interessante analisar o movimento do ponto de vista da equação $E = K + U$, com a energia E sendo uma constante.
- A ilustração abaixo mostra como se dá esse balanço para um movimento em uma dimensão (x), detalhando a energia potencial $U(x)$ e a energia cinética K .



A energia potencial e o potencial efetivo

- Agora vamos retornar ao nosso problema das trajetórias e órbitas no contexto da Lei da Gravitação Universal de Newton.
- Nesse caso, podemos nos ater ao *plano da trajetória*, definido como sendo o plano perpendicular ao vetor $\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{v}$ — que, lembre-se, pelo Teorema (ii), é conservada.
- Nesse caso a velocidade pode ser decomposta em uma *componente paralela* à posição \vec{r} , e o movimento na direção *perpendicular*:

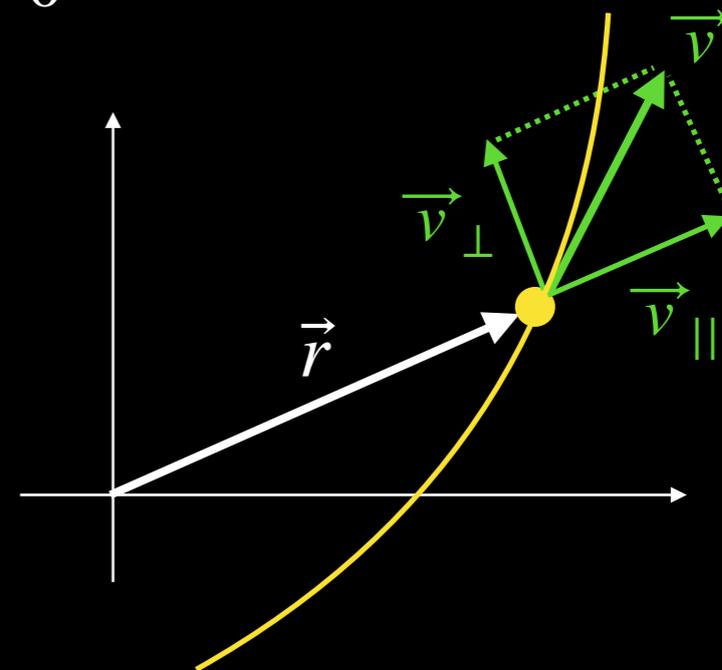
$$\vec{v} = v_{\parallel} \hat{r} + \vec{v}_{\perp}, \quad \text{onde } v_{\parallel} = \dot{r} \quad \text{e} \quad \vec{v}_{\perp} \cdot \hat{r} = 0$$

- Agora, note que:

$$|\vec{\ell}| = |\vec{r} \times \vec{v}| = r v_{\perp}$$

- Portanto, podemos escrever:

$$\vec{\ell}^2 = r^2 v_{\perp}^2 \quad \Leftrightarrow \quad v_{\perp}^2 = \ell^2 / r^2$$



A energia potencial e o potencial efetivo

- Escrevendo então $v_{\perp}^2 = \ell^2/r^2$ (onde, lembre-se, ℓ é constante), podemos escrever a energia cinética da partícula como:

$$K = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{r^2}\right)$$

- Agora podemos substituir isso na expressão para a conservação da energia, obtendo:

$$E = K + U = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{m\ell^2}{2r^2} + U(r)$$

$$= K_r + U_{ef}(r) \quad , \quad \text{onde} \quad K_r = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \quad \text{e} \quad U_{ef}(r) = U(r) + \frac{m\ell^2}{2r^2}$$

- Dado o potencial Newtoniano $U(r) = -GMm/r$, temos:

$$U_{ef}(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{m\ell^2}{2r^2}$$

- Reduzimos, assim, um problema em 3D a um problema em 1D (o raio r):

A energia potencial e o potencial efetivo

- O potencial efetivo para as trajetórias e órbitas de partículas são, portanto, determinadas em termos do potencial efetivo para o movimento radial:

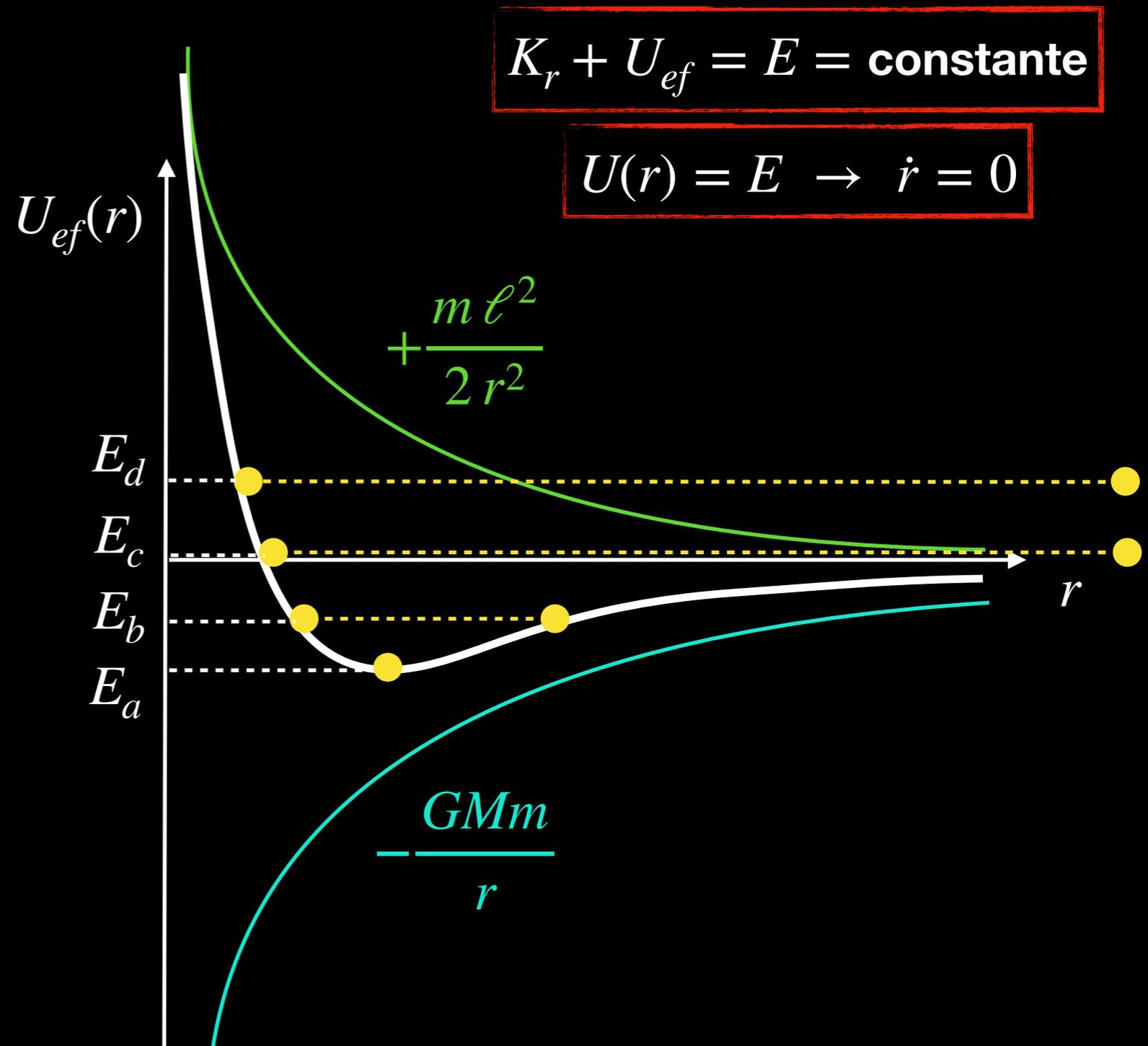
$$U_{ef}(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{m\ell^2}{2r^2}$$

(a) Órbita circular

(b) Órbita elíptica

(c) Trajetória parabólica

(d) Trajetória hiperbólica



Física I

Fim da Aula 3



Próxima aula:
Momento angular