



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3210 - Mecânica dos Sólidos I

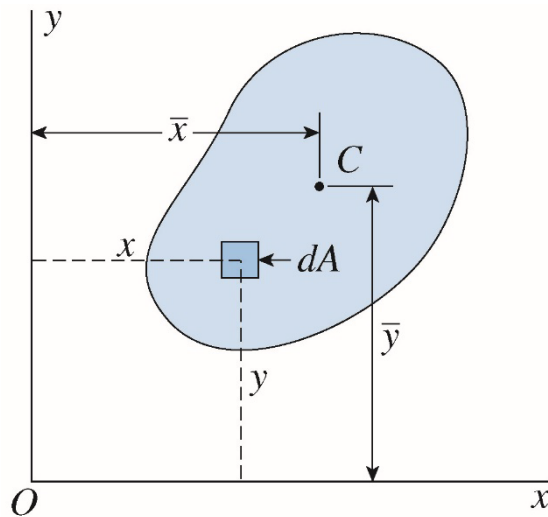
Aula #16

Prof. Dr. Clóvis de Arruda Martins

31/05/22



12.3 Centroides de figuras planas



- Área:

$$A = \int dA$$

- Momentos de área de primeira ordem:

$$Q_x = \int y dA$$

$$Q_y = \int x dA$$

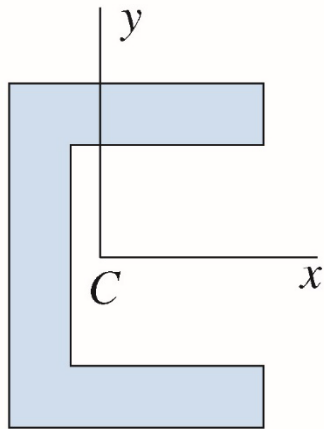
- Centroide: $C = (\bar{x}, \bar{y})$

$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} = \frac{1}{A} \int x dA$$

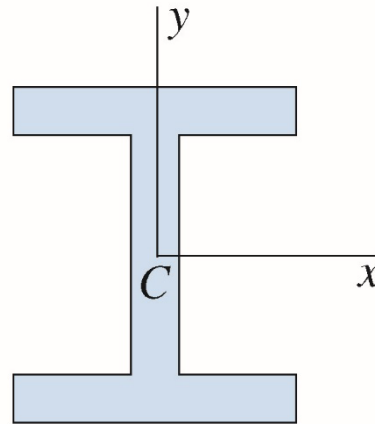
$$\bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{1}{A} \int y dA$$



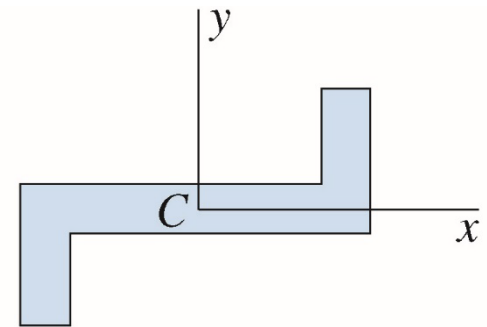
Figuras com simetria



a) um eixo de simetria



b) dois eixos de simetria

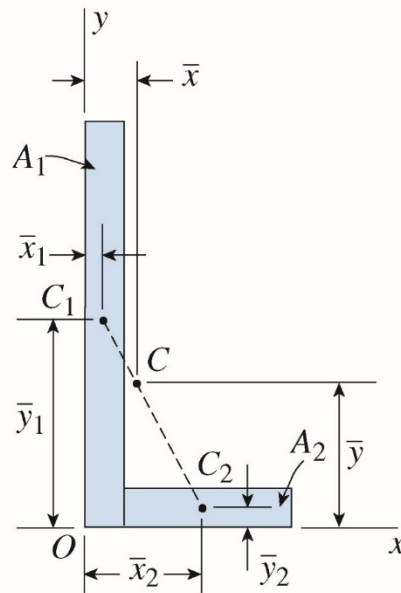
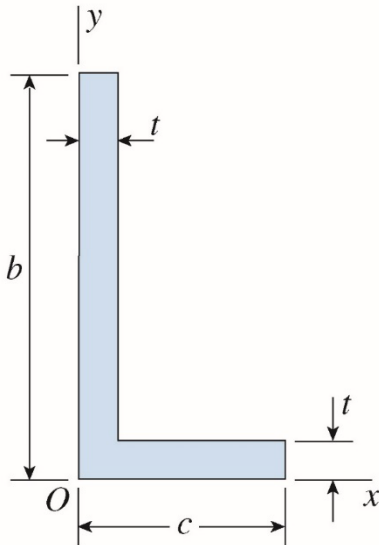


c) centro de simetria

(toda a linha que passa por C intercepta a área de forma simétrica)



12.3 Centroides de áreas compostas



$$A = \sum_{i=1}^n A_i$$

$$Q_x = \sum_{i=1}^n \bar{y}_i A_i \quad Q_y = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i A_i$$

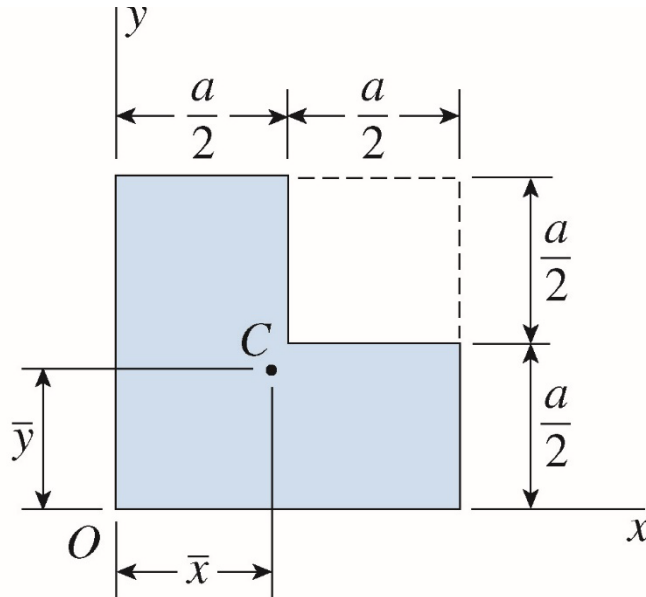
$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^n \bar{x}_i A_i$$

$$\bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^n \bar{y}_i A_i$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exemplo:



$$A_1 = a^2$$

$$A_2 = -\frac{a^2}{4}$$

$$A = A_1 + A_2 = \frac{3}{4}a^2$$

$$\bar{x}_1 = \frac{a}{2}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{3}{4}a$$

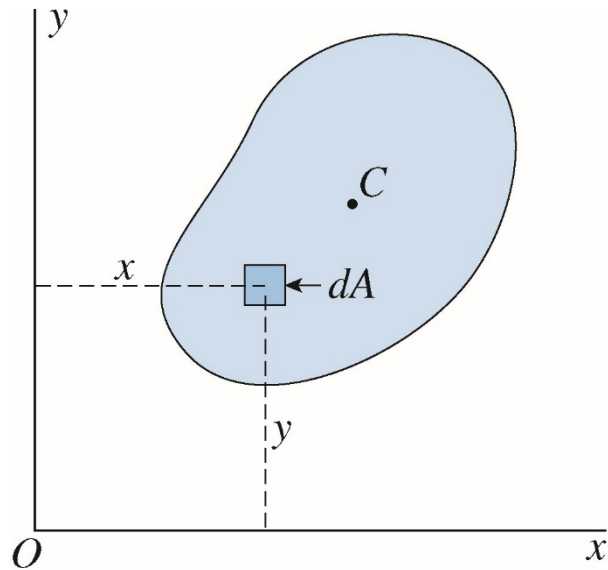
$$\bar{x} = \frac{A_1\bar{x}_1 + A_2\bar{x}_2}{A}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{5}{12}a$$

$$\bar{x} = \bar{y} \text{ (simetria)}$$



12.4 Momentos de inércia de áreas planas



$$I_x = \int y^2 dA$$

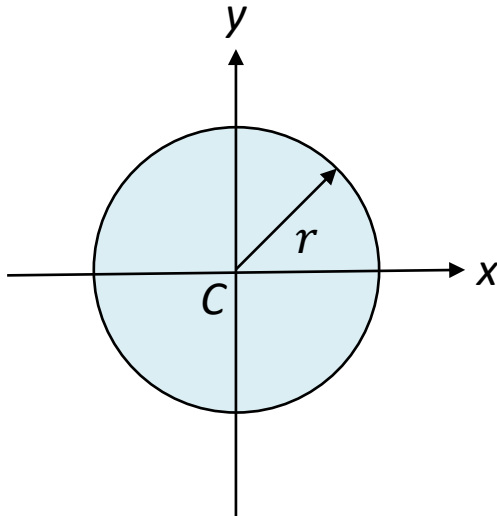
$$I_y = \int x^2 dA$$

(momentos de área de segunda ordem)

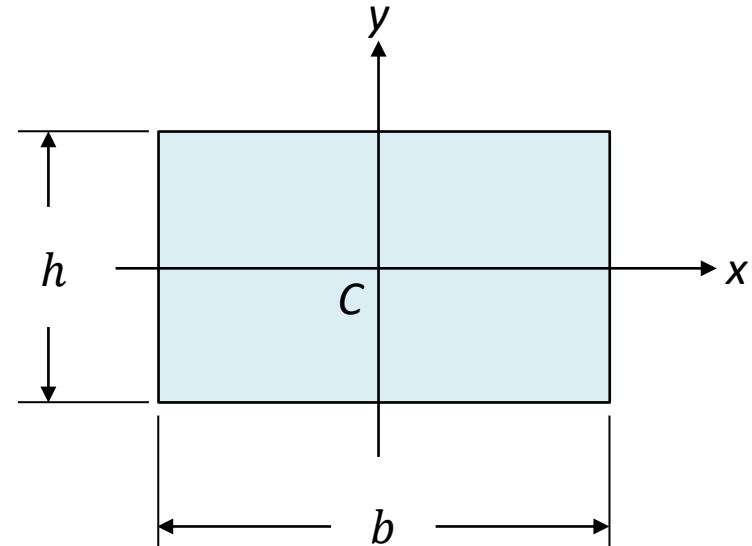


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Figuras comuns:



$$I_x = I_y = \frac{1}{4}\pi r^4 = \frac{1}{64}\pi d^4$$

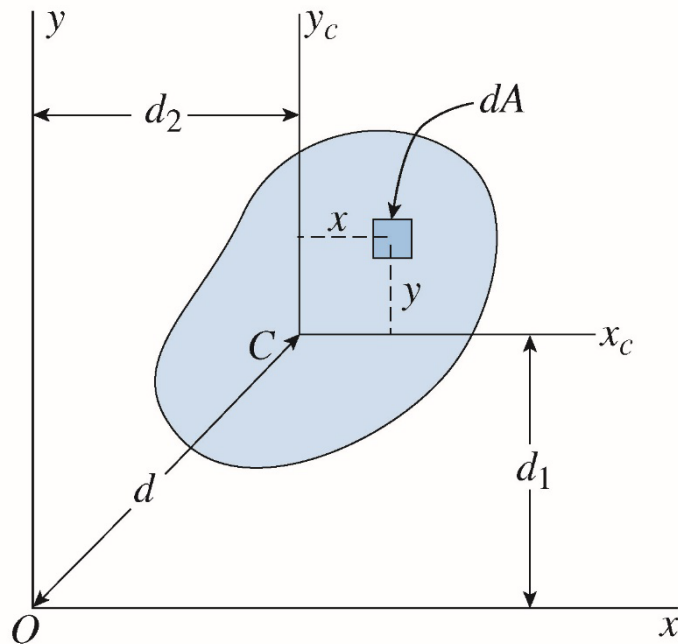


$$I_x = \frac{1}{12}bh^3$$

$$I_y = \frac{1}{12}hb^3$$



12.5 Teorema do eixo paralelo para momentos de inércia



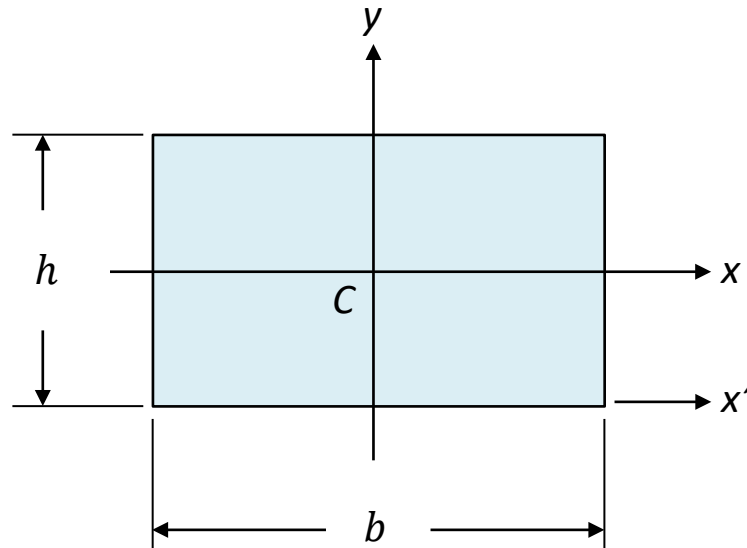
$$I_x = I_{x_c} + Ad_1^2$$

$$I_y = I_{y_c} + Ad_2^2$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

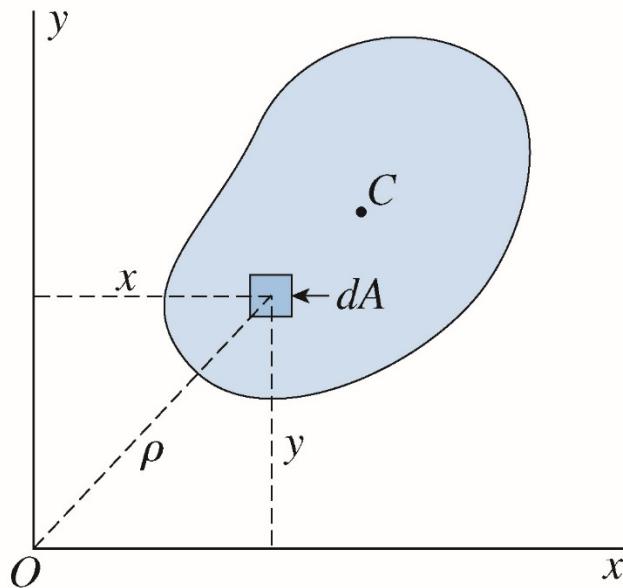
Exemplo:



$$I_x = \frac{1}{12}bh^3$$
$$I_{x'} = I_x + bh \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2$$
$$\Rightarrow I_{x'} = \frac{1}{3}bh^3$$



12.6 Momentos de inércia polar



$$I_O = \int \rho^2 dA$$

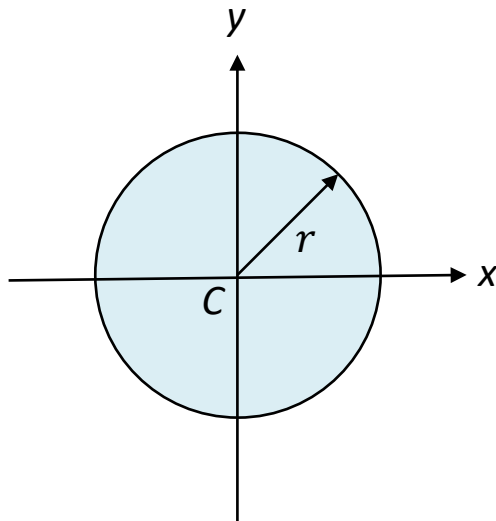
- Propriedade:

$$I_O = I_x + I_y$$

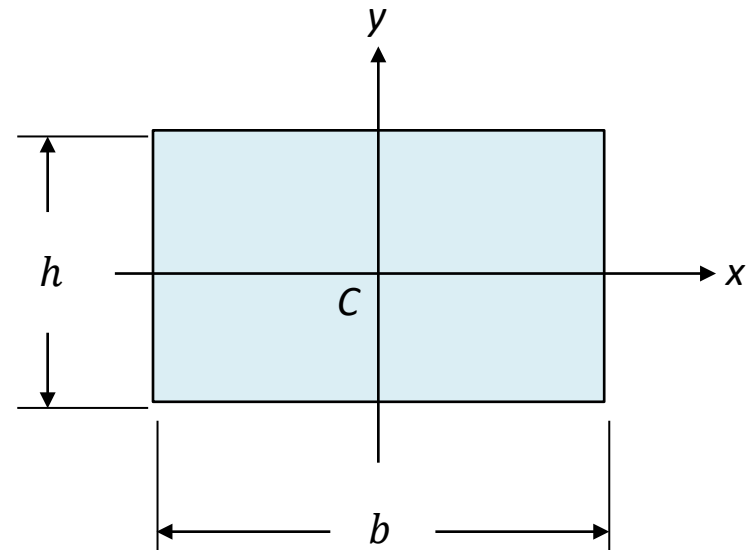


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Figuras comuns:



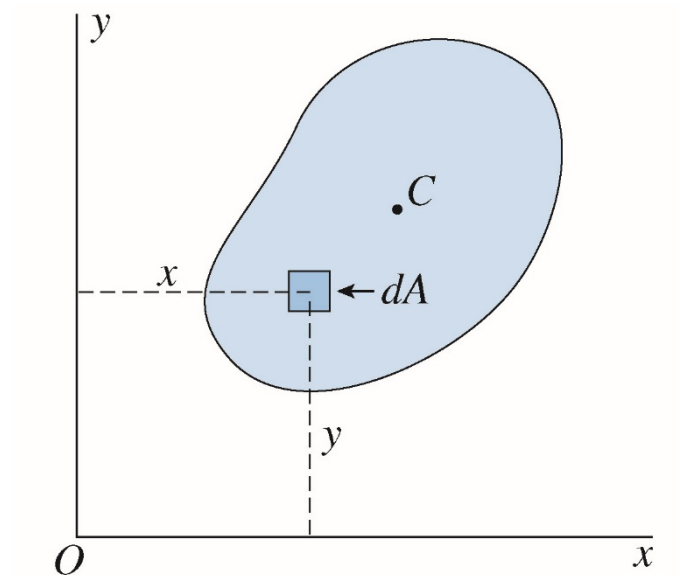
$$I_c = \frac{1}{2} \pi r^4 = \frac{1}{32} \pi d^4$$



$$I_c = \frac{1}{12} b h (b^2 + h^2)$$



12.7 Produtos de inércia



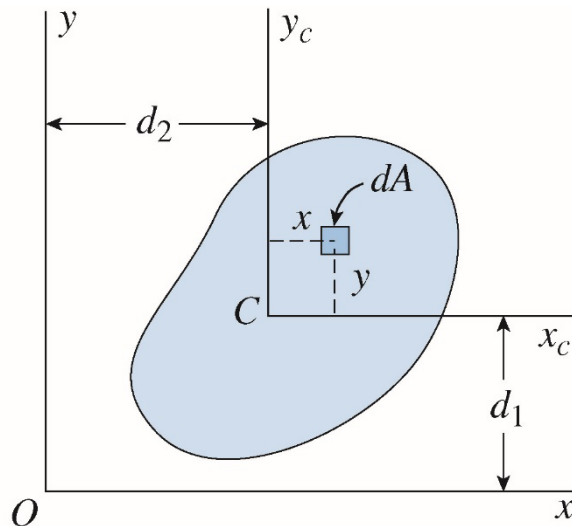
$$I_{xy} = \int xy dA$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

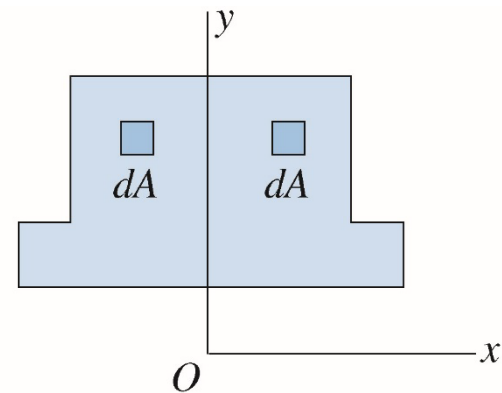
Propriedades:

- Teorema dos Eixos Paralelos:



$$I_{xy} = I_{x_c y_c} + A d_1 d_2$$

- Simetria:

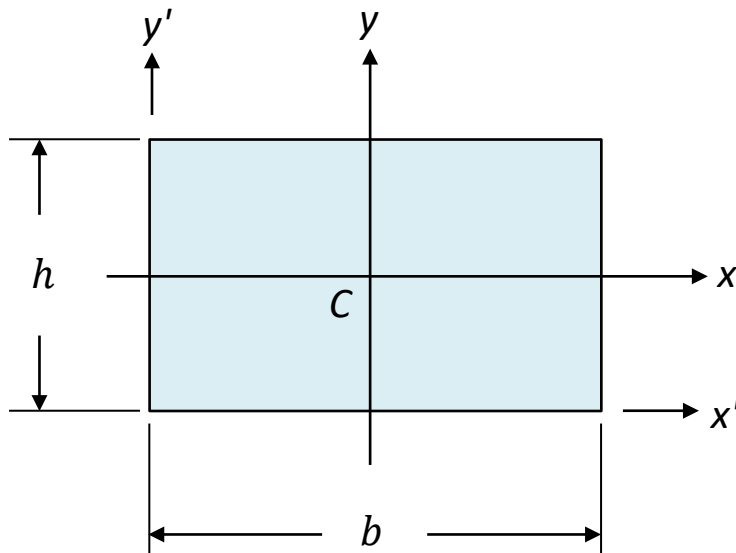


$$I_{xy} = 0$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exemplo:



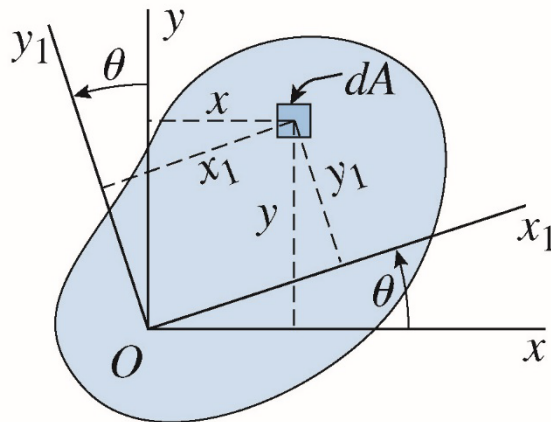
$$I_{xy} = 0 \text{ (simetria)}$$

$$I_{x'y'} = bh \frac{h}{2} \frac{b}{2}$$

$$\Rightarrow I_{x'y'} = \frac{1}{4} b^2 h^2$$



12.8 Rotação de eixos



$$I_{x_1} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{(I_x - I_y)}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{y_1} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{(I_x - I_y)}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{x_1 y_1} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta$$

- Propriedade:

$$I_{x_1} + I_{y_1} = I_x + I_y$$



12.9 Eixos principais e momentos de inércia principais

- Definição:

Os momentos principais de inércia são o momento de inércia mínimo e o momento de inércia máximo, considerando todos os eixos que passam por um ponto.

Os eixos principais de inércia são os eixos em relação aos quais o momento de inércia é mínimo ou máximo.

- Posição dos eixos principais:

$$\tan 2\theta_p = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}$$

- Momentos principais:

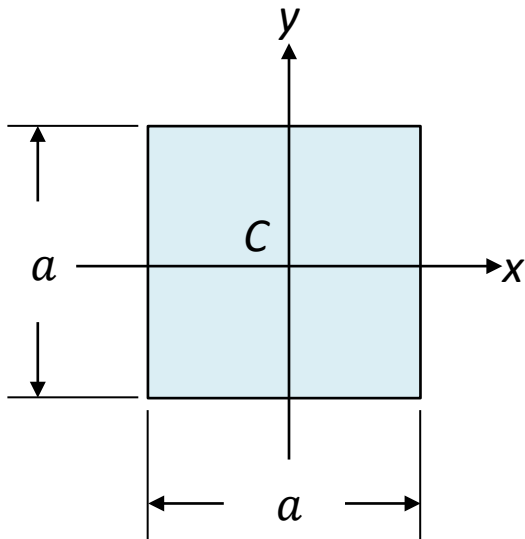
$$I_1 = \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$I_2 = \frac{I_x + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exemplo:



$$I_x = I_y = \frac{1}{12} a^4$$

$$\Rightarrow I_1 = I_2 = \frac{1}{12} a^4$$

$$I_{xy} = 0$$

- Neste caso todos os eixos que passam pelo ponto *C* são eixos principais
- Um ponto como esse é chamado de *ponto principal*.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referência:

Gere, J.M., Goodno, B.J. Mecânica dos Materiais – Tradução da 7ª edição norte-americana. Cengage Learning, 2010, 860p, Capítulo 12.