PROVA 1: ESPAÇOS DE HILBERT E EDPS

Exercício 1. (1 ponto) a) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$. Mostre que se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ for contínua e $\int_a^b f(x)x^k dx = 0$, para todo $k \geq 0$, então $f = 0$.

(1 ponto) b) Sejam $(H, (\cdot, \cdot)_H)$ um espaço de Hilbert, $(V, (\cdot, \cdot)_V)$ um espaço vetorial com produto interno e $\mathcal{B}_H = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ uma base de Hilbert de H. Suponha que exista um operador linear bijetor $T : H \to V$ tal que $(Tu, Tv)_V = (u, v)_H$, $\forall u, v \in H$. Mostre que V também é um espaço de Hilbert e $\mathcal{B}_V = \{Te_j : j \in \mathbb{N}\}$ é uma base de Hilbert de V.

Exercício 2. Seja H um espaço de Hilbert e $P_1, P_2 : H \to H$ duas projeções ortogonais (lembramos que P é projeção ortogonal se, e somente se, $P^2 = P$ e P é autoadjunto).

(1 ponto) a) Mostre que $P_1 + P_2$ é uma projeção ortogonal se, e somente se, $P_1P_2 = P_2P_1 = 0$.

Dica: (uma forma de fazer um dos lados da implicação. Não é a única maneira!) Supondo que $P_1 + P_2$ seja uma projeção ortogonal mostre: Primeiro que $P_1P_2 + P_2P_1 = 0$. Segundo que $P_1P_2P_1 = 0$. Terceiro que $(P_1P_2u, P_1P_2u) = 0$, $\forall u \in H$, usando que $P_1P_2 = -P_2P_1$ numa das entradas e que P_1 é projeção ortogonal).

(1 ponto) b) Mostre que P_1P_2 é uma projeção ortogonal se, e somente se, $P_1P_2 = P_2P_1$.

Dado um intervalo aberto $I =]a, b[$, denotamos por $\chi_I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função $\chi_I(x) = 1$, se $x \in I$, e $\chi_I(x) = 0$, se $x \notin I$. Considere o operador $P_I : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ definido por $P_I f = \mathcal{F}^{-1}\chi_I\mathcal{F}f$, ou seja, aplicamos a transformada de Fourier em f, depois multiplicamos por χ_I e, por fim, aplicamos $\mathcal{F}^{-1}$. Em outras palavras,

$$(P_I f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\chi_I(\xi)\hat{f}(\xi)d\xi,$$

em que $\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x)dx$, se $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.

(1 ponto) c) Mostre que P_I é uma projeção ortogonal.

(1 ponto) d) Dados intervalos abertos $I, J \subset \mathbb{R}$, o operador $P_I P_J$ é uma projeção ortogonal? O que I e J devem satisfazer para que $P_I + P_J$ seja uma projeção ortogonal? Dê condições necessárias e suficientes (elas são simples!).

Exercício 3. Dados H_1 e H_2 espaços vetoriais reais, definimos $H_1 \oplus H_2$ como o espaço dos elementos $(x, y) \in H_1 \times H_2$ com a soma definida por $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ e o produto por escalar definido por $\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$. Se H_1 e H_2 têm produto internos $(\cdot, \cdot)_{H_1}$ e $(\cdot, \cdot)_{H_2}$, então $H_1 \oplus H_2$ tem produto interno definido como

$$((x_1, x_2), (y_1, y_2))_{H_1 \oplus H_2} = (x_1, y_1)_{H_1} + (x_2, y_2)_{H_2}.$$

(1 ponto) a) Mostre que $H_1 \oplus H_2$ é um espaço de Hilbert se H_1 e H_2 forem espaços de Hilbert. Use isto para mostrar que

$$H = \left\{(u_1, u_2) \in H^1(0, 1) \oplus H^1(1, 2) : u_1(1) = u_2(1)\right\}$$

é um espaço de Hilbert com o produto interno[1] de $H^1(0, 1) \oplus H^1(1, 2)$.

[1]Seguindo as definições acima, o produto interno de $H^1(0, 1) \oplus H^1(1, 2)$ é igual a

$$((u_1, u_2), (v_1, v_2))_{H^1(0,1) \oplus H^1(1,2)} = \int_0^1 u_1 v_1 dx + \int_0^1 u_1' v_1' dx + \int_1^2 u_2 v_2 dx + \int_1^2 u_2' v_2' dx.$$

Sejam $f_1 \in L^2(0,1)$ e $f_2 \in L^2(1,2)$. Considere o seguinte problema

$$\begin{aligned} u_1(x) - u_1''(x) &= f_1(x), \quad x \in]0,1[, \\ u_2(x) - 2u_2''(x) &= f_2(x), \quad x \in]1,2[, \\ u_1'(0) &= u_2'(2) = 0, \\ u_1'(1) &= 2u_2'(1), \\ u_1(1) &= u_2(1). \end{aligned}$$

Dizemos que $(u_1, u_2) \in H^2(0,1) \oplus H^2(1,2)$ é uma *solução forte* se satisfizer as equações acima.

Uma *solução fraca* do problema acima é uma função $(u_1, u_2) \in H$, em que H foi definido no item a), que satisfaz

$$a((u_1,u_2),(v_1,v_2)) = F((v_1,v_2)), \quad \forall (v_1,v_2) \in H,$$

em que

$$a((u_1,u_2),(v_1,v_2)) = \int_0^1 u_1 v_1 dx + \int_0^1 u_1' v_1' dx + \int_1^2 u_2 v_2 dx + 2\int_1^2 u_2' v_2' dx,$$

$$F((v_1,v_2)) = \int_0^1 v_1 f_1 dx + \int_1^2 v_2 f_2 dx.$$

(1 ponto) b) Mostre que se $(u_1, u_2) \in H^2(0,1) \oplus H^2(1,2)$ for uma solução forte, então (u_1, u_2) é uma solução fraca do problema.

(1 ponto) c) Mostre que existe uma única solução fraca do problema. Conclua que se existir uma solução forte, ela é única.

(1 ponto) d) Mostre que a solução fraca é uma solução forte. (Para isto, deve-se provar que $(u_1, u_2) \in H^2(0,1) \oplus H^2(1,2)$ e que (u_1, u_2) satisfaz as condições de contorno do problema).

Dica: O procedimento é muito semelhante aos exemplos feitos em sala de aula e na lista de exercícios.