Eletromagnetismo — 7600021
Solução das questões que não são do livro-texto.

Terceira lista e terceira lista suplementar.

28/05/2022

Terceira lista

1. Uma superfície plana infinita está carregada com densidade superficial uniforme σ. Calcule a diferença de potencial entre um ponto P a uma distância x da superfície e o ponto $\bar{P}$, simétrico de P em relação ao plano.

   Solução: A diferença de potencial é $\Delta V \equiv V(\bar{P}) - V(P) = \int_{\bar{P}}^{P} \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$. Tomamos um sistema de coordenadas no ponto médio O entre P e $\bar{P}$, isto é, na superfície, e escolhemos o eixo $\hat{z}$ de forma que ele aponte no sentido $\bar{P} \to P$ (do ponto inicial até o final na integração). Se chamarmos de a a distância entre cada ponto e o plano, veremos que $\bar{P}$ está na posição $(0, 0, -a)$ enquanto P está em $(0, 0, a)$. Nessas condições, $\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}z\,\hat{z}$. O campo elétrico tem módulo $\sigma/2\epsilon_0$ e aponta no sentido contrário a $\hat{z}$ no trecho $\bar{P}O$, e no sentido $\hat{z}$ no trecho OP. Assim,

   $$\Delta V = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\int_{-a}^{0} \mathrm{d}z + \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\int_{0}^{a} \mathrm{d}z.$$

   As duas integrais se cancelam e o resultado é $\Delta V = 0$. Isso acontece porque o potencial cresce na primeira metade do caminho (deslocamento contra o campo), mas diminui na segunda metade (deslocamento no sentido do campo).

5. Mostre que a energia de uma distribuição de cargas com densidade volumétrica $\rho(\vec{\mathbf{r}})$ pode ser escrita na forma

   $$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\int\int \frac{\rho(\vec{\mathbf{r}}_1)\rho(\vec{\mathbf{r}}_2)}{\mathscr{r}}\,\mathrm{d}\tau_1\,\mathrm{d}\tau_2\,, \tag{1}$$

   onde $\mathscr{r} \equiv |\vec{\mathbf{r_1}} - \vec{\mathbf{r_2}}|$.

   Solução: Como demonstrado em aula, a energia eletrostática pode ser escrita na forma

   $$W = \frac{1}{2}\int \rho(\vec{\mathbf{r}}_1)V(\vec{\mathbf{r}}_1)\mathrm{d}\tau_1, \tag{2}$$

   e o potencial $V(\vec{\mathbf{r}}_1)$ devido a uma distribuição de carga $\rho(\vec{\mathbf{r}}_2)$ é dado pela expressão

   $$V(\vec{\mathbf{r}})_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{\mathbf{r}}_2)}{\mathscr{r}}\mathrm{d}\tau_2, \tag{3}$$

onde $\mathscr{r} = |\vec{\mathbf{r}}_1 - \vec{\mathbf{r}}_2|$. Basta agora substituir o lado direito da Eq. (3) na Eq. (2) para chegar ao resultado pedido.

9. Uma esfera condutora de raio R está carregada com carga Q.

   (a) Calcule o potencial em função da distância r a partir do centro da esfera;

   (b) Mostre o potencial em gráfico;

   (c) A partir do potencial, encontre o campo elétrico num ponto externo à esfera e próximo de sua superfície. Compare com o campo elétrico perto de um condutor plano com a mesma densidade superficial de carga.

   (d) Calcule a energia armazenada na esfera, a partir da expressão para a energia no campo elétrico.

Solução:

(a) Fora da esfera, tudo se passa como se a carga da esfera estivesse no centro. O potencial é

$$V(r \geq R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r}.$$

Dentro da esfera, o potencial é constante, igual ao potencial da superfície:

$$V(r \leq R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R}.$$

(b) Veja figura à direita.

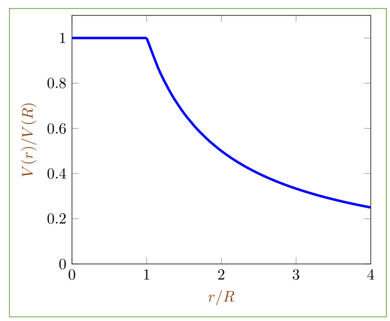

Figura 1: Questão 9(b).

(c) O campo elétrico é o gradiente de V com sinal trocado. Como V depende apenas de r, seu gradiente é $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\hat{r}$. Para $r \approx R$, resulta que

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^2}\hat{r},$$

ou seja

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{r},$$

onde $\sigma = Q/(4\pi R^2)$ é a densidade de carga na superfície da esfera.

(d) O campo elétrico é nulo no interior da esfera. No exterior

$$\vec{\mathbf{E}}(r \geq R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}.$$

A energia é $W = \frac{\epsilon_0}{2}\int E^2\,\mathrm{d}\tau$, isto é,

$$W = \frac{1}{2(4\pi)^2\epsilon_0}\int_R^\infty \frac{Q^2}{r^4}4\pi r^2\,\mathrm{d}r\,.$$

A integral pode ser facilmente feita, e resulta que

$$W = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

10. Um capacitor é formado por duas placas condutoras planas paralelas, separadas por uma distância s. A área A de cada placa é muito maior do que s^2. Carrega-se o capacitor com carga Q em uma das placas e $-Q$ na outra. Trate o campo na região entre as placas como se fosse elas fossem planos infinitos.

(a) Encontre a diferença de potencial entre as placas;

(b) Encontre a energia W armazenada no capacitor a partir da expressão para a energia num campo elétrico;

(c) Compare o resultado com o dado pela expressão $W = Q^2/2C$, que você conhece da Física III.

Solução:

(a) O campo elétrico entre as placas é σ/ϵ_0, onde $\sigma = Q/A$. A diferença de potencial é

$$\Delta V = \frac{Q}{A\epsilon_0}s.$$

(b) A energia vale

$$W = \frac{\epsilon_0}{2}\int\left(\frac{Q}{A\epsilon_0}\right)^2\mathrm{d}\tau,$$

que resulta na igualdade

$$W = \frac{\epsilon_0}{2}\frac{Q^2}{A\epsilon_0^2}s,$$

ou

$$W = \frac{Q^2}{2A\epsilon_0}s.$$

(c) A capacitância do capacitor plano é

$$C = \epsilon_0\frac{A}{s}.$$

Assim, a expressão acima para W pode ser escrita na forma equivalente

$$W = \frac{Q^2}{2C}.$$

Terceira lista suplementar

1. Um capacitor cilíndrico é constituído por duas cascas cilíndricas condutoras concêntricas. A externa tem raio R_2 e a interna, R_1, e as duas têm comprimento L. A carga no condutor externo é Q e a no interno é $-Q$.

   (a) Calcule a energia do capacitor como integral sobre o campo elétrico quadrado;

   (b) A partir da expressão $W = Q^2/(2C)$, encontre a capacitância do par.

   Solução:

   (a) A lei de Gauss nos dá o campo elétrico na região entre as cascas. Em coordenadas cilíndricas

   $$E(s) = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0 L}\frac{Q}{s}\hat{s}.$$

   A energia associada é proporcional à integral de E^2 sobre o volume entre as cascas. Uma vez que a altura das cascas é L, a energia é dada pela igualdade

   $$W = \frac{\epsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L}\right)^2 L\int_{R_1}^{R_2}\frac{2\pi s}{s^2}\mathrm{d}s,$$

   ou, efetuada a integral,

   $$W = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 L}\log\frac{R_2}{R_1}.$$

   (b) A comparação entre a expressão imediatamente acima e a do enunciado mostra que

   $$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\log\frac{R_2}{R_1}}.$$

2. Um capacitor esférico é constituído por duas cascas esféricas condutoras concêntricas. A externa tem raio R_2 e a interna, R_1. A carga no condutor externo é Q e a no interno é $-Q$.

   (a) Calcule a capacitância do capacitor;

   (b) Supondo que $R_1 = R$ e $R_2 = R + \delta R$, onde $\delta R \ll R$, mostre por expansão em série de Taylor que a capacitância é aproximadamente proporcional à área das cascas e inversamente proporcional à separação entre elas.

   Solução:

(a) No espaço entre as cascas, no que se refere ao campo elétrico, tudo se passa como se a carga $-Q$ estivesse no centro, e não houvesse carga na casca externa. A diferença de potencial entre as cascas (em módulo) é, portanto,

$$\Delta V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\Big(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\Big),$$

equação que pode ser escrita na forma

$$\Delta V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}.$$

A capacitância é a razão entre Q e ΔV:

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

(b) Substituímos R_1 por R e R_2 por $R + \delta R$ na expressão acima. Resulta que

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R(R + \delta R)}{\delta R}.$$

A expansão Taylor do numerador na fração à direita na última equação acima dá R^2 mais pequena correção. Assim,

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{s},$$

onde $A = 4\pi R^2$ é a área das cascas, e s é a separação entre elas.