



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica*

PME-3210 - Mecânica dos Sólidos I

Aula #15

Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.

27/05/2022



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Agenda:

1. Tubos de Paredes Finas (3.10), [1]
2. Exercícios



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

1. Tubos de Paredes Finas

A teoria de torção descrita nas seções anteriores é aplicável apenas a barras sólidas ou vazadas de seção transversal circular. Tais seções são as mais eficazes para resistir à torção e, conseqüentemente, são as mais usadas normalmente. Contudo, também é possível encontrarmos tubos de paredes finas, com seções transversais não circulares, que podem, eventualmente, estar submetidos a torção.



Fig. 1: Tubos de parede fina de diversos formatos [2].



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

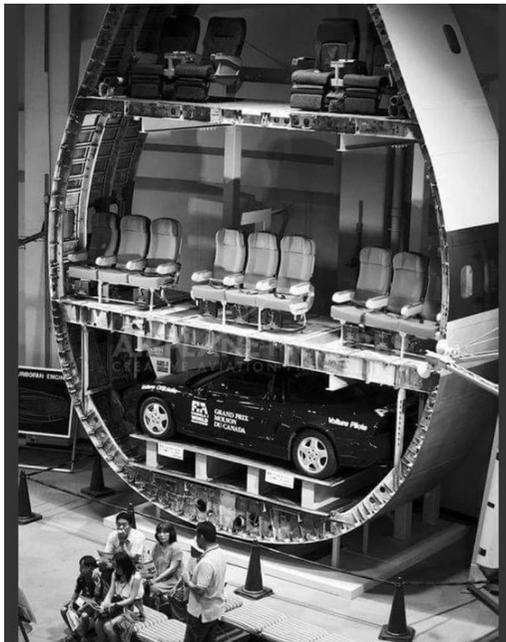


Fig. 2: Seções transversais (não circulares) de diversas aeronaves.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Tensões de Cisalhamento e Fluxo de Cisalhamento

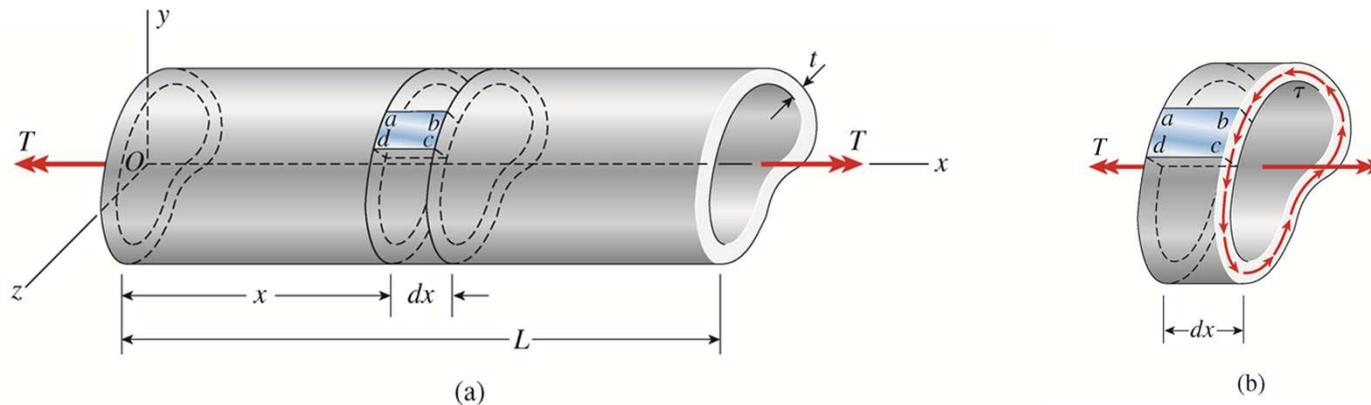
A proposta é obtermos fórmulas aplicáveis a outras formas de seção transversal, que não a circular, com base nas seguintes hipóteses:

- Tubo é cilíndrico em forma: seções transversais não variam ao longo do comprimento e seu eixo central é reto;
- A espessura do tubo não é necessariamente constante, podendo variar ao longo da seção transversal: $t = t(s)$;
- A espessura da parede deve ser pequena quando comparada às dimensões características da seção transversal (digamos, $\frac{t}{a} < \frac{1}{10}$);
- O tubo está submetido à torção pura com torques T agindo nas extremidades;
- O material do tubo é homogêneo, isótropo, e possui comportamento elástico-linear;
- O tubo fechado é uma estrutura unicelular (formado por uma única célula);
- O empenamento é livre (não há tensões normais atuantes nas S.T.'s que impeçam o empenamento).



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

As tensões de cisalhamento agindo sobre uma seção transversal genérica do tubo estão ilustradas abaixo:



Das hipóteses estabelecidas, observamos que:

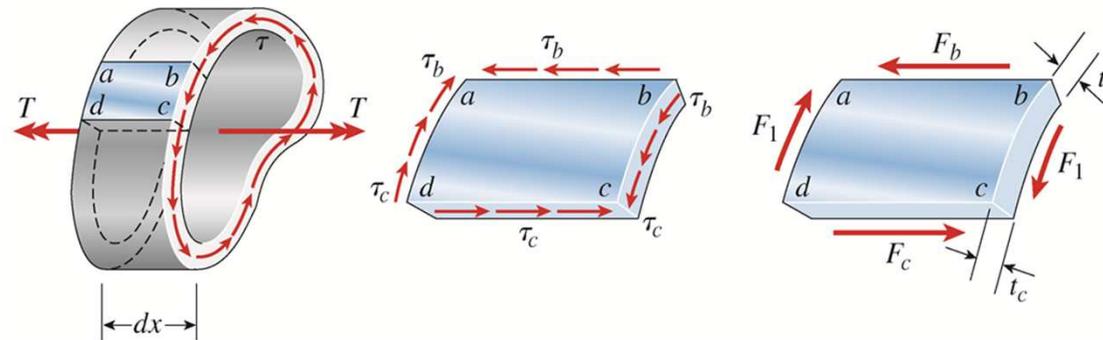
- As tensões de cisalhamento em qualquer seção transversal devem gerar um torque igual (em magnitude) ao torque T aplicado nas extremidades;
- As tensões de cisalhamento ocorrem nas seções transversais e têm a direção do versor tangente à curva definida pela linha de meia espessura da seção transversal;
- Como o tubo é de parede fina, podemos admitir que as tensões de cisalhamento são praticamente uniformes ao longo da espessura.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Para determinarmos a magnitude das tensões de cisalhamento nas seções transversais, consideremos o elemento infinitesimal $abcd$ extraído do tubo por meio de cortes apropriados:

- Dois cortes efetuados em planos da seção transversal distantes dx entre si;
- Dois cortes longitudinais (paralelos ao eixo central do tubo) e ortogonais aos versores tangentes à curva definida pela linha de meia espessura nos pontos b e c (ou a e d).

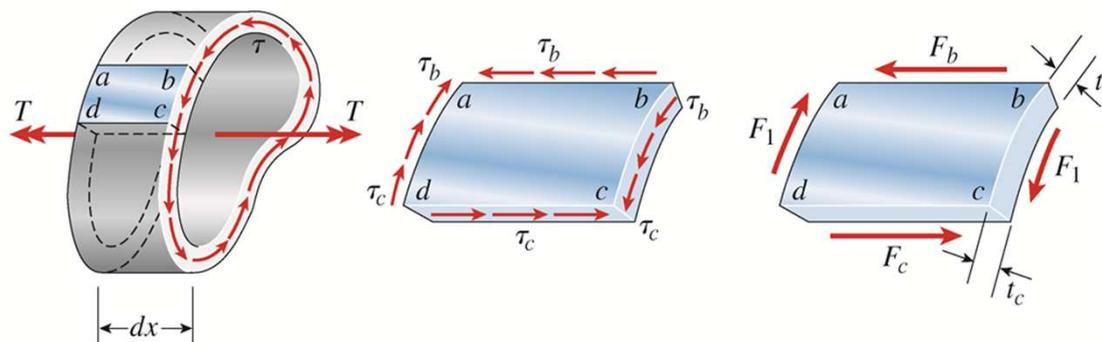




Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Observamos que:

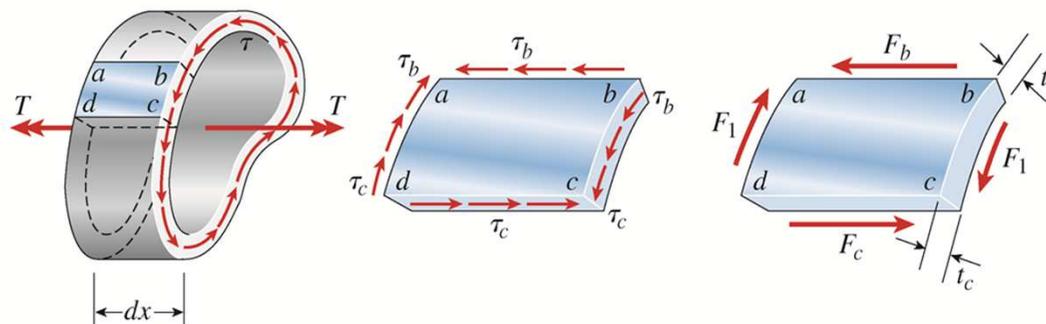
1. As tensões de cisalhamento são (por hipótese) uniformes ao longo da espessura, mas podem variar ao longo da coordenada curvilínea (s) associada à curva fechada definida pela linha de meia espessura da seção transversal (ou seja, podemos ter $\tau_b \neq \tau_c$);
2. Do equilíbrio de momentos em cada vértice do elemento $abcd$ podemos concluir que as tensões existentes nas faces longitudinais serão iguais a τ_b (na face ab) e τ_c (na face cd).





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Admitindo a inexistência de outras tensões (que não as de cisalhamento indicadas na figura) e impondo o equilíbrio de forças na direção longitudinal para o elemento $abcd$, encontramos:



$$F_b = F_c \Leftrightarrow \tau_b(t_b dx) = \tau_c(t_c dx) \Leftrightarrow \tau_b t_b = \tau_c t_c$$

Conclusão: $f = \tau(s)t(s) = cte$ \longrightarrow $\left[\begin{array}{l} \text{Se } t \uparrow \Rightarrow \tau \downarrow \\ \text{Se } t \downarrow \Rightarrow \tau \uparrow \end{array} \right.$

Denominamos f fluxo de cisalhamento. Unidade no S.I.: $[f] = \text{N/m}$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Fórmula da Torção para Tubos de Paredes Finas

Sejam:

f = fluxo de cisalhamento atuando na seção transversal (e sempre tangente ao contorno);

s = coordenada curvilínea medida a partir de um dado ponto da seção e ao longo da linha de meia espessura;

$t = t(s)$ = espessura ao longo do contorno da seção transversal;

$r = r(s)$ = distância entre a linha de ação do fluxo (para um dado valor de s) até um determinado ponto O (tomado arbitrariamente).

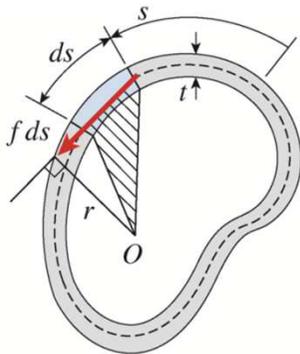


FIG. 3-41 Cross section of thin-walled tube

Calculando o torque interno associado ao fluxo f teremos:

$$T = \oint dT = \oint_0^{L_m} f r(s) ds = f \oint_0^{L_m} r(s) ds$$

Mas:
$$dA = \frac{ds \cdot r(s)}{2} \Leftrightarrow r(s) ds = 2dA$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Logo:
$$T = f \int_0^{L_m} r(s) ds = 2f \oint_{A_m} dA \Leftrightarrow T = 2f A_m$$

Onde:

T = torque aplicado ao tubo;

$f = \tau(s)t(s)$ = fluxo de cisalhamento na seção transversal;

A_m = área interna à linha de meia espessura que define o contorno da seção transversal (**NÃO é a área da seção transversal**).

Do exposto:
$$\tau(s) = \frac{T}{2A_m t(s)}$$

As fórmulas acima são devidas ao engenheiro alemão Rudolph Bredt (1842-1900) publicadas em um artigo em 1896.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exemplo de aplicação:

Considerando um tubo de parede fina de seção circular, onde t é a espessura da parede e r é o raio médio, submetido à torção pura, teremos:

$$\tau = \frac{T}{2A_m t} = \frac{T}{2\pi r^2 t}$$

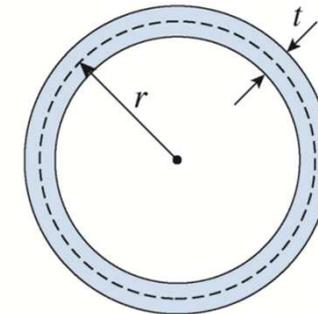


FIG. 3-42 Thin-walled circular tube

Por outro lado, da teoria de Coulomb (para seções circulares), vimos que:

$$\tau = \frac{T}{I_p} \rho \cong \frac{T}{(2\pi r^3 t)} r = \frac{T}{2\pi r^2 t}$$

... o que demonstra a validade da fórmula de Bredt neste caso.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exemplo de aplicação:

Dados:

T = torque aplicado;

h, b = dimensões da seção;

t_1, t_2 = espessuras

Pede-se: $\tau_{m\acute{a}x}$

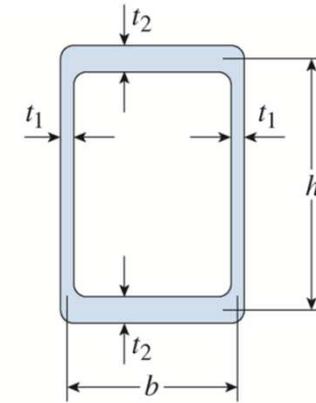


FIG. 3-43 Thin-walled rectangular tube

Solução:

$$T = 2fA_m = 2fbh \Leftrightarrow f = \frac{T}{2bh} \quad (\text{determina\c{c}\~{a}o do fluxo de cisalhamento})$$

$$f = \tau(s)t(s) \Leftrightarrow \tau(s) = \frac{f}{t(s)} \Leftrightarrow \tau_{m\acute{a}x} = \frac{f}{t_{m\acute{i}n}} = \frac{T}{2bht_1}$$

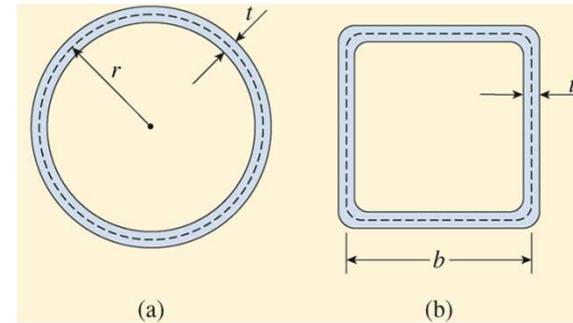
A máxima tensão de cisalhamento ocorrerá nas paredes verticais (onde a espessura é a menor).



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exemplo 3.14:

Um tubo circular e um tubo quadrado são construídos do mesmo material e submetidos ao mesmo torque. Ambos têm o mesmo comprimento, mesma espessura de parede e mesma área de seção transversal. Determine a razão entre as tensões de cisalhamento nas paredes.



Solução:

Como as áreas de seção transversal são iguais, temos:

$$2\pi r t = 4bt \Leftrightarrow \frac{b}{r} = \frac{\pi}{2}$$

Para o tubo circular (1):

$$f_1 = \tau_1 t = \frac{T}{2A_{m1}} = \frac{T}{2\pi r^2}$$

Para o tubo quadrado (2):

$$f_2 = \tau_2 t = \frac{T}{2A_{m2}} = \frac{T}{2b^2}$$

Logo:
$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{f_1}{f_2} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{b}{r}\right)^2 = \frac{\pi}{4} \cong 0,785$$

(A tensão de cisalhamento no tubo circular é cerca de 21% menor que aquela encontrada no tubo quadrado).



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

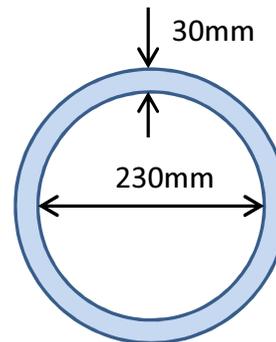
2. Exercícios

3.10-1: Um tubo circular vazado, com diâmetro interno de 230 mm e espessura de parede de 30 mm está submetido a um torque $T = 136$ kNm.

Determina a tensão de cisalhamento máxima no tubo usando:

- A teoria aproximada de tubos de parede fina e
- A teoria de torção exata.

A teoria aproximada fornece resultados conservativos ou não conservativos?





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Solução (3.10-1):

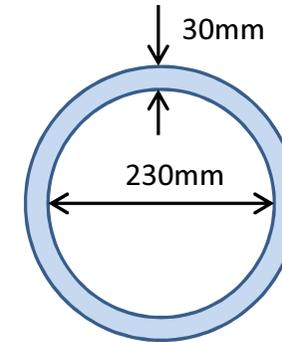
a) $D_m = D_i + t = 260\text{mm}$

$$f = \frac{T}{2A_m} = \frac{2T}{\pi D_m^2} = \frac{2 \cdot 136 \cdot 10^6 \text{Nmm}}{\pi (260\text{mm})^2} = 1281 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

$$\tau_{ap} = \frac{f}{t} = \frac{1281}{30} = 42,7\text{MPa}$$

b) $D_o = D_i + 2t = 290\text{mm}$

$$\tau_{ex} = \frac{T D_o}{I_p} = \frac{16TD_o}{\pi(D_o^4 - D_i^4)} = 47\text{MPa}$$



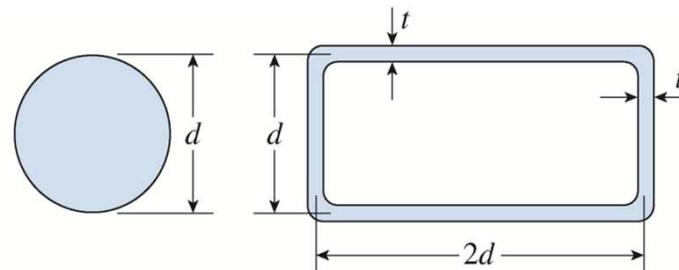
O resultado fornecido pela teoria aproximada é não conservativo. Devemos observar, contudo, que, neste caso:

$$\frac{R_m}{t} = \frac{130}{30} \cong 4,33$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

3.10-2: Uma barra circular maciça de diâmetro d deve ser substituída por um tubo retangular com dimensões de seção transversal $d \times 2d$ até a linha média da seção transversal. Determine a espessura necessária (t_{\min}) do tubo, de forma que a tensão de cisalhamento máxima no tubo não exceda a tensão de cisalhamento na barra sólida (quando ambos estiverem sob a ação de um mesmo torque).



PROB. 3.10-2



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Solução (3.10-2):

$$\tau_{1,m\acute{a}x} = \frac{T}{I_{p1}} \frac{d}{2} = \frac{32T}{\pi d^4} \frac{d}{2} = \frac{16T}{\pi d^3}$$

(máxima tensão na barra circular)

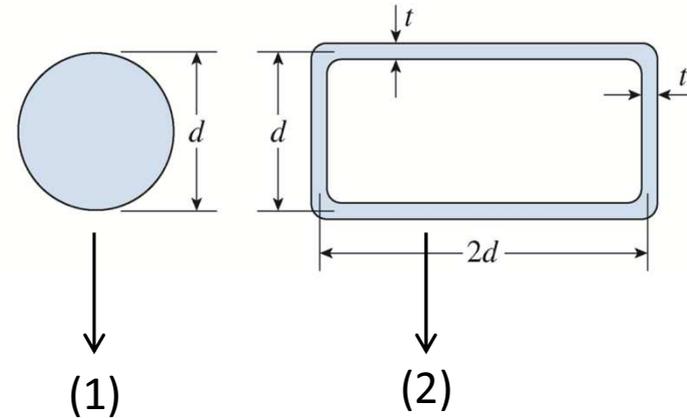
$$\tau_{2,m\acute{a}x} = \frac{T}{2A_{m2}t} = \frac{T}{2(2d^2)t} = \frac{T}{4d^2t}$$

(máxima tensão no tubo retangular)

$$\tau_{2,m\acute{a}x} \leq \tau_{1,m\acute{a}x} \Leftrightarrow \frac{T}{4d^2t} \leq \frac{16T}{\pi d^3} \Leftrightarrow t \geq \frac{\pi}{64} d \quad \text{Logo:} \quad t_{m\acute{i}n} = \frac{\pi}{64} d$$

Obs: Neste caso a razão entre as áreas de seção transversal é dada por:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{1}{6dt} = \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{64}{6\pi d^2} \cong 2,67$$

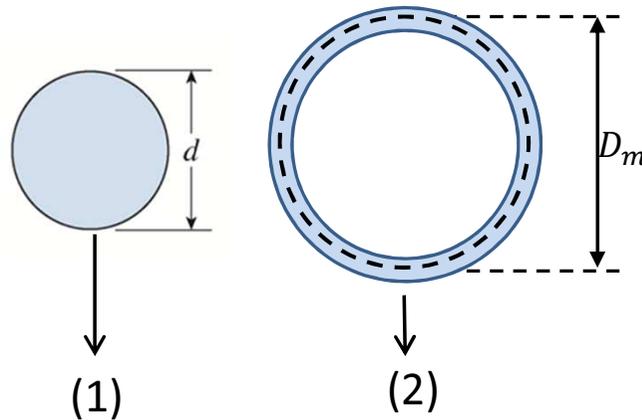




Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Extensão do 3.10-2:

Uma barra de seção circular e diâmetro d será substituída por um tubo circular com diâmetro médio D_m . Considerando que as áreas de seção transversal sejam as mesmas, determine a razão entre as máximas tensões de cisalhamento considerando que o mesmo torque seja aplicado nos dois casos.





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

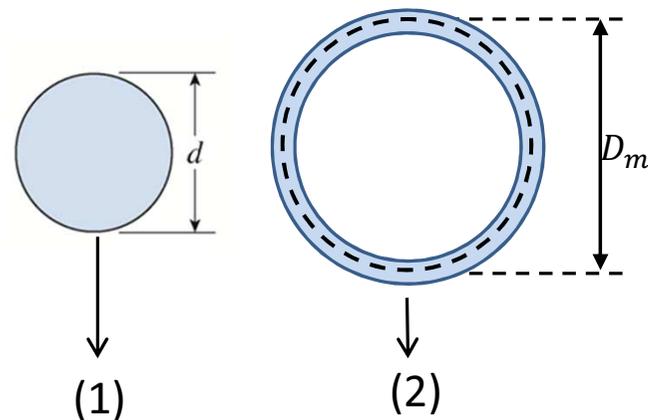
Solução:

$$\tau_{1,m\acute{a}x} = \frac{T}{I_{p1}} \frac{d}{2} = \frac{32T}{\pi d^4} \frac{d}{2} = \frac{16T}{\pi d^3}$$

(máxima tensão na barra circular)

$$\tau_{2,m\acute{a}x} = \frac{T}{2A_{m2}t} = \frac{T}{2(\pi D_m^2/4)t} = \frac{2T}{\pi D_m^2 t}$$

(máxima tensão no tubo circular)



Como as áreas de seção transversal são as mesmas: $\frac{\pi d^2}{4} = \pi D_m t \Leftrightarrow d = 2\sqrt{D_m t}$

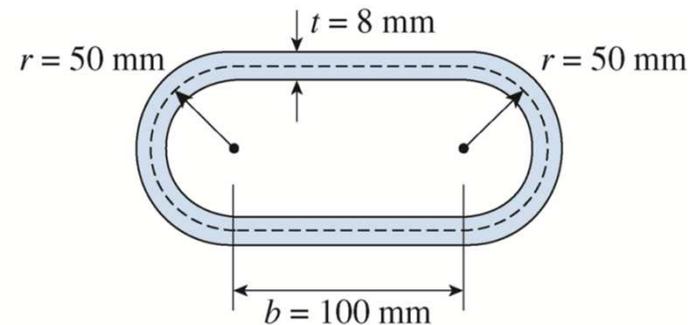
Logo:
$$\frac{\tau_{1,m\acute{a}x}}{\tau_{2,m\acute{a}x}} = \frac{16T}{\pi d^3} \cdot \frac{\pi D_m^2 t}{2T} \Leftrightarrow \frac{\tau_{1,m\acute{a}x}}{\tau_{2,m\acute{a}x}} = 8 \frac{D_m^2 t}{d^3} = \frac{D_m^2 t}{\sqrt{(D_m t)^3}} = \sqrt{\frac{D_m}{t}}$$

Assim, se $D_m/t = 16$:
$$\frac{\tau_{1,m\acute{a}x}}{\tau_{2,m\acute{a}x}} = 4$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

3.10-6: Calcule a tensão de cisalhamento para um tubo de aço com a seção transversal ilustrada na figura abaixo quando submetido a um torque $T = 10$ kNm.



PROB. 3.10-6

Solução:

$$f = \tau \cdot t = \frac{T}{2A_m} = \frac{T}{2(\pi r^2 + 2br)} = \frac{10 \cdot 10^6 (Nmm)}{2(\pi 50^2 + 2 \cdot 100 \cdot 50)mm^2} = 280 N/mm$$

$$\tau = \frac{f}{t} = \frac{280}{8} = 35 MPa$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referências:

- [1] Gere, J.M.; Goodno, B.J.; Mecânica dos Materiais, Tradução da 7ª edição norte-americana. Cengage Learning, 2010, 860p, Cap.3.
- [2] <https://centurytubos.com.br/category/century-tubos/>