Física III 2022 (IQ) – Aula 15

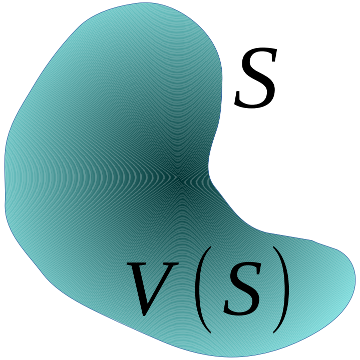
Objetivos de aprendizagem

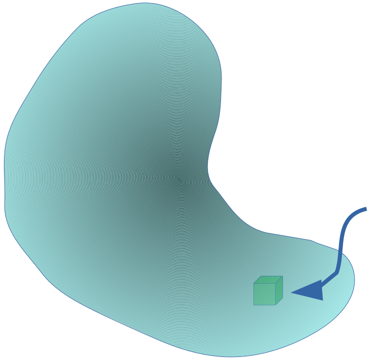
- Enunciar o Teorema de Gauss.
- Expressar o divergente de uma função vetorial em coordenadas cartesianas.
- Calcular o divergente de funções vetoriais em coordenadas cartesianas
- Expressar a forma diferencial da Lei de Gauss
- Obter a densidade de carga de uma região do espaço a partir da expressão do campo elétrico nessa região

“Encontrando” o teorema de Gauss

- Lei de Gauss (forma integral):

$$\Phi_E(S)=\oint_S \vec{E}(\vec{r}).\hat{n}\,dS=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_{V(S)}\rho(\vec{r})\,dV$$





$$dV=\Delta V\rightarrow 0$$

$$\Delta\Phi_E=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{r})\Delta V$$

Fluxo gerado em um pequeno volume
devido à carga elétrica contida nele.

Divergente (def.)

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \Phi_E(\vec{r})}{\Delta V} \equiv \mathrm{div}\,\vec{E} \equiv \vec{\nabla} . \vec{E} = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

Densidade de produção de fluxo em função da posição

Divergente (def.)

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \Phi_E(\vec{r})}{\Delta V} \equiv \mathrm{div}\,\vec{E} \equiv \vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

Densidade de produção de fluxo em função da posição

A integral dessa densidade no volume interno de uma superfície deve dar o fluxo total que atravessa a superfície =

Teorema de Gauss

$$\boxed{\int_{V(S)} \vec{\nabla}.\vec{E}\,dV = \oint_S \vec{E}.\hat{n}\,dS}$$

Lei de Gauss na forma diferencial

Teor. Gauss:

$$\int_{V(S)} \vec{\nabla}.\vec{E}\,dV = \oint_S \vec{E}.\hat{n}\,dS$$

L. Gauss f. integral:

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}).\hat{n}\,dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{V(S)} \rho(\vec{r})\,dV$$

L. Gauss f. diferencial:

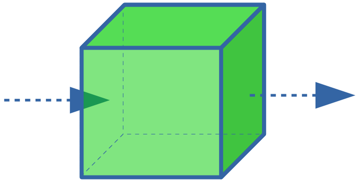
$$\boxed{\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}}$$

Divergente em coordenadas cartesianas

$$\vec{\nabla}.\vec{E}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right).\left(E_x\hat{i}+E_y\hat{j}+E_z\hat{k}\right)$$

$$\boxed{\vec{\nabla}.\vec{E}=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}}$$

$$E_x(x,y,z)$$



$$E_x(x,y,z)+\frac{\partial E_x}{\partial x}dx$$

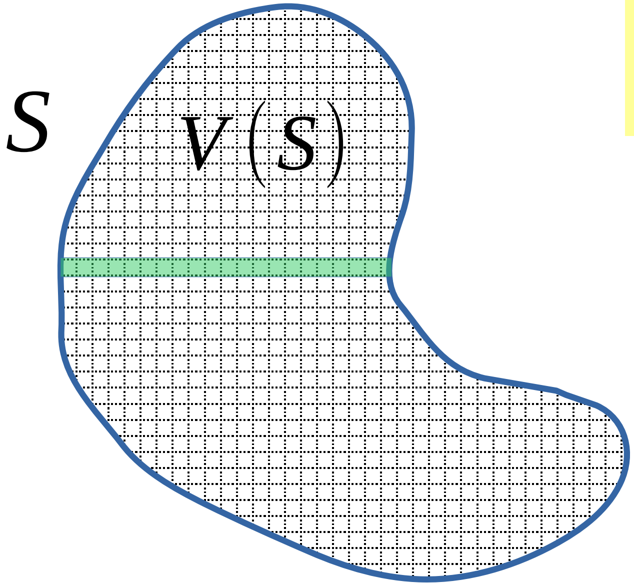
$$dV=dx\,dy\,dz$$

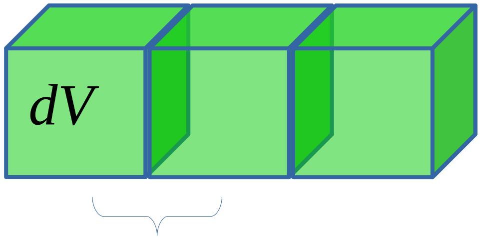
$$d\Phi_{(x)}=(\frac{\partial E_x}{\partial x}\overbrace{dx)\underbrace{dydz}_{da_{(x)}}}^{dV}$$

Teorema de Gauss

- O teorema de Gauss é geral. É uma identidade matemática.

$$\int_{V(S)} \vec{\nabla}.\vec{E}\,dV = \oint_{S} \vec{E}.\hat{n}\,dS$$





A contribuição das paredes internas para o fluxo total é nula

Densidade de carga a partir do campo elétrico

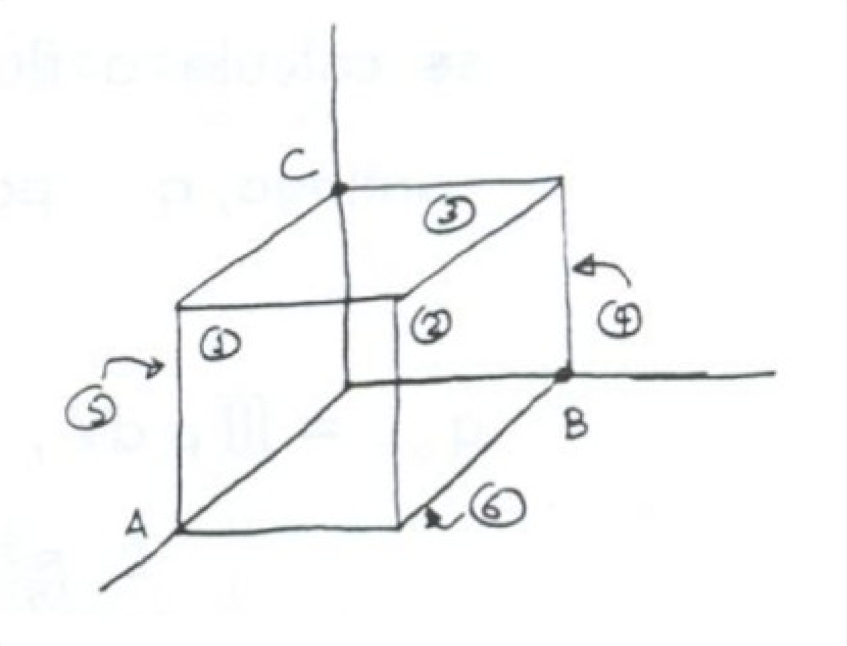
- Dado o campo, é possível determinar a distribuição de carga que o produz:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(x, y, z)$$

$$\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} = \vec{\nabla} . \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Enquete Problema 23/exemplo 1 da Apostila de Física 3 IF-2017 Cap. 23

Verifique a validade do teorema de Gauss para o caso do campo vetorial dado por:
$\vec{F} = x^2\hat{i} + xy\hat{j} + (y^2 - z^2)\hat{k}$, considerando uma superfície fechada que envolve um paralelepípedo, conforme a figura:



Para isso determine o fluxo do campo através da superfície do paralelepípedo e compare com a integral do divergente do campo no volume interno delimitado por ela. O paralelepípedo tem um vértice na origem e outro em $(x, y, z) = (A, B, C)$.

Enquete Problema 23/exemplo 1 da Apostila de Física 3 IF-2017 Cap. 23

Obtenha as distribuições de carga que geram os seguintes campos elétricos (onde λ e α são constantes):

(a) $\vec{E}(\vec{r}) = \lambda e^{-\alpha r}\hat{r}$

(b) $\vec{E}(x,y,z) = \lambda \frac{y\hat{i} - x\hat{j}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$

Obs.(1): Como só discutimos o divergente em coord. cartesianas, é melhor explicitar o raio em termos destas coordenadas:

$$\vec{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}\,; \quad r = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}$$

Obs.(2): A derivada de uma função do raio com relação a x pode ser escrita

$$\frac{\partial f(r)}{\partial x} = \frac{df}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}\,; \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}}{\partial x} = \frac{x}{r}$$

(analogamente para y, e z)