Princípios Variacionais

material extra

Oscar Éboli 20 de maio de 2022

Motivação:

- Feynman: “When I was in high school, my physics teacher (Mr. Bader) called me down one day after a physics class and said `You look bored, I want to tell you something interesting’ ...”
- Feynman foi apresentado ao princípio da mínima ação e ficou fascinado!

Até abelhas minimizam

25/10/2010 - 12h21

Abelhas fazem cálculos complexos para determinar rota mais curta de voo

DAS AGÊNCIAS DE NOTÍCIAS

Abelhas podem solucionar problemas matemáticos complexos, superando até a capacidade de computadores para cálculos.

Esse é o cerne de um estudo desenvolvido por cientistas do departamento de ciências biológicas, a Royal Holloway, da Universidade de Londres, no Reino Unido.

Abelhas operárias fazem treinamento de voo para aprender a ir e a voltar à colmeia
Arqueólogos acham abelhas domésticas mais antigas do mundo

Os insetos aprendem a pegar a rota mais curta para chegar até as flores que costumam ser encontradas aleatoriamente pelo caminho. Ou seja, a que economiza tempo e poupa gasto de energia, um dos princípios da questão matemática conhecida como "problema do caixeiro-viajante" ("traveling salesman problem", em inglês).

"Apesar de seu pequeno cérebro, elas são capazes de façanhas extraordinárias", comenta Nigel Raine, que participou da pesquisa.

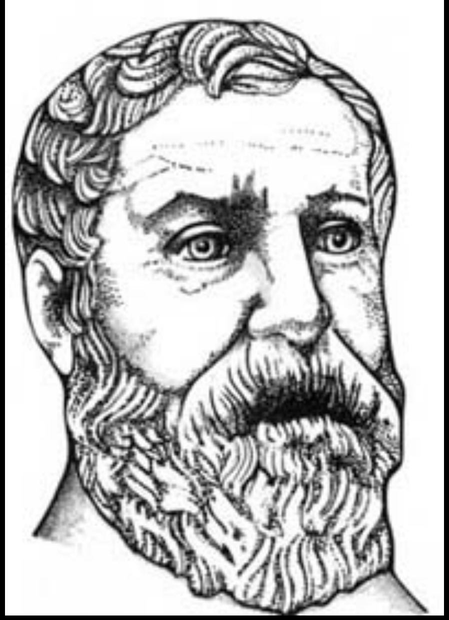
A conclusão foi possível com a ajuda de um computador que controlou flores artificiais para identificar o comportamento das abelhas.

A ideia era mostrar se os insetos seguiam uma rota comum conforme encontravam as flores ou se procuraram instintivamente a mais curta. Depois de explorar o região florida, elas rapidamente tendem a voar pela

João Justi Junior/Divulgação

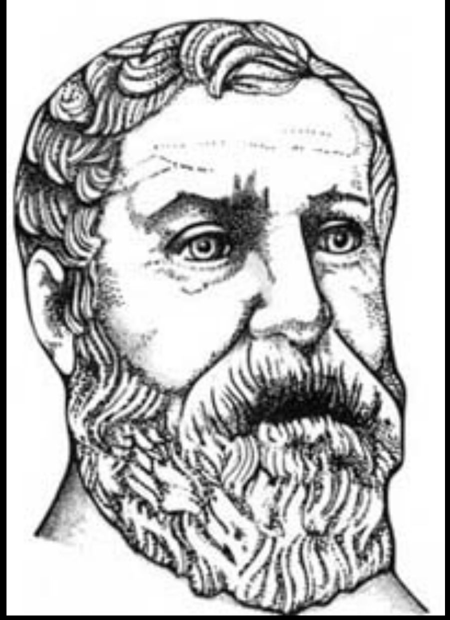
Como computadores, abelhas processam rota de voo com menor distância e de menor gasto de energia

Primórdios



- Heron de Alexandria (10-70 dc); matemático e engenheiro

Primórdios



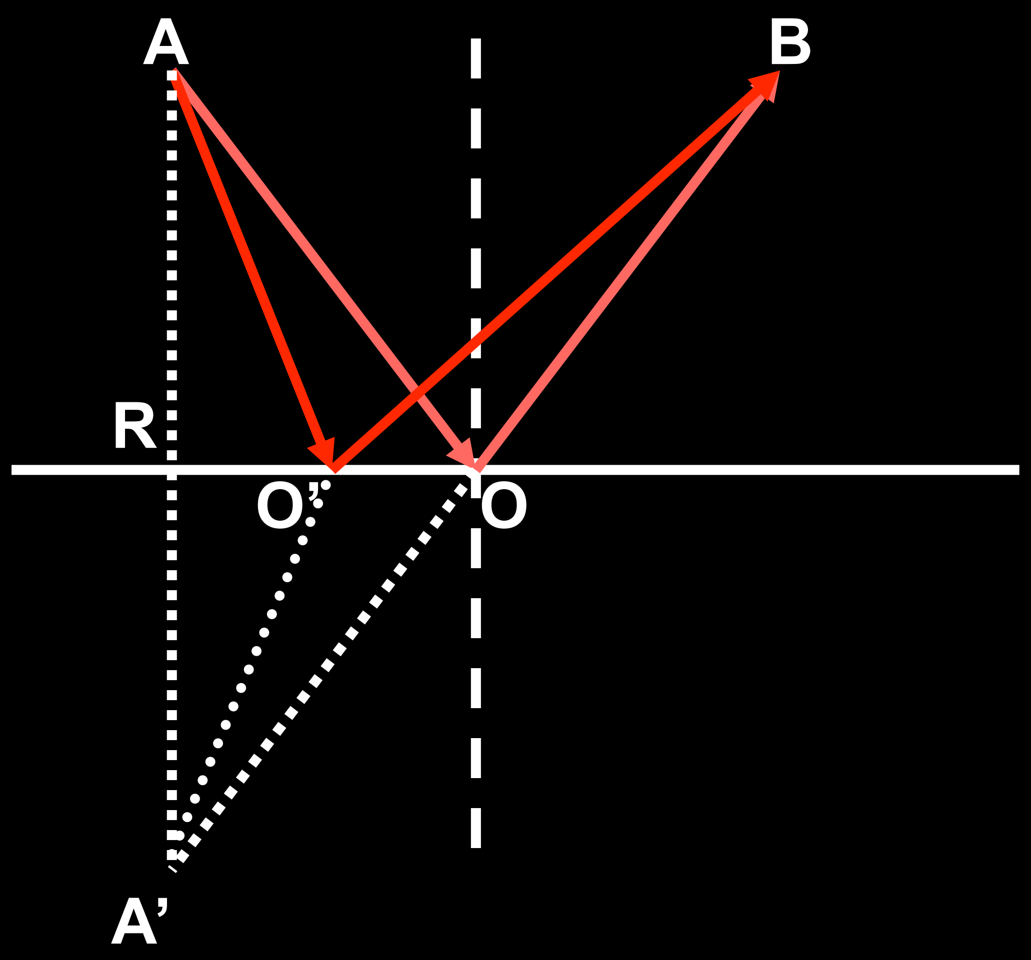
- Heron de Alexandria (10-70 dc); matemático e engenheiro

- quando uma raio luminoso reflete num espelho, o trajeto da fonte aos olhos do observador é mais curto que qualquer outro caminho alternativo

- motivação metafísica

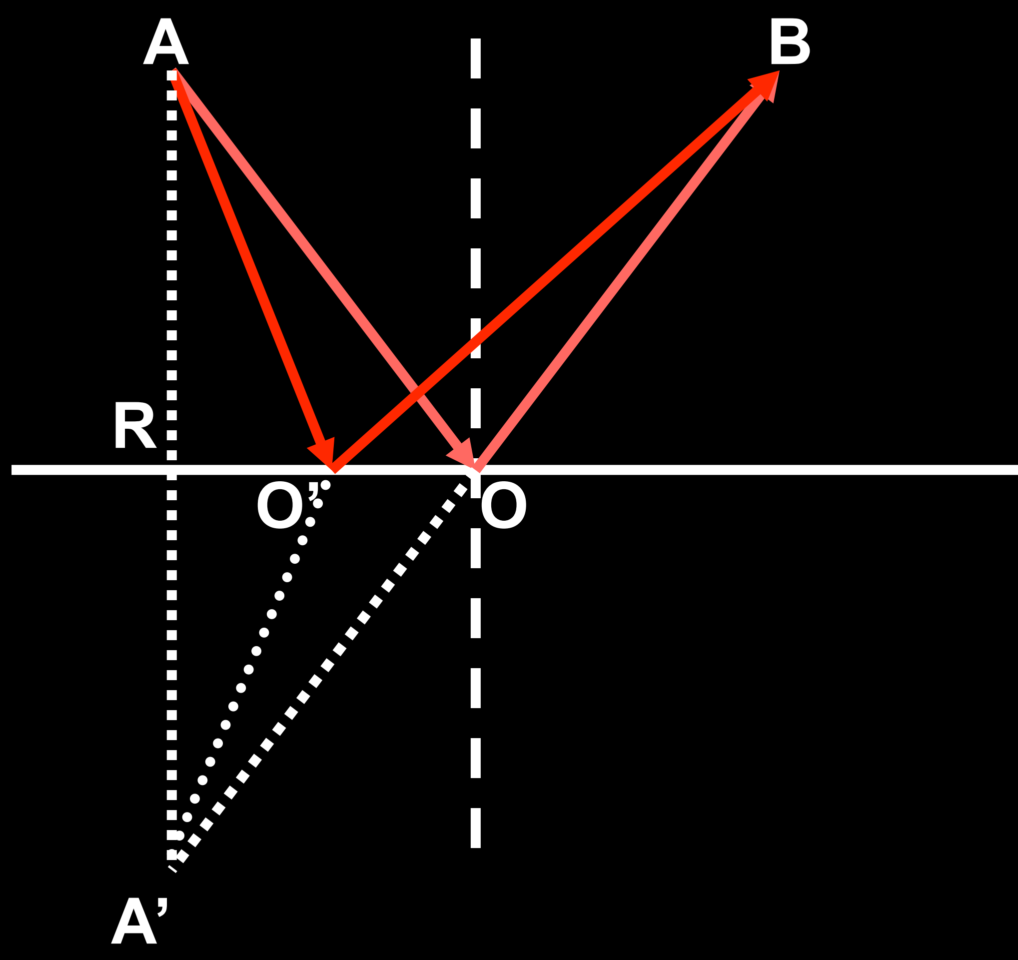
- Heron verificou que seu princípio está de acordo com experimentos.

Consequência: ângulo de reflexão igual ao de incidência



- OA =OA'
- O'A=O'A'
- AO'B > AOB
- ângulos iguais!

Consequência: ângulo de reflexão igual ao de incidência



- OA =OA'
- O'A=O'A'
- AO'B > AOB
- ângulos iguais!

Crítica de Feynman: não é o tempo mínimo! Direto é mais rápido

Pierre de Fermat (1601-1665)

advogado francês e matemático amador

- Na refração a luz percorre o caminho de tempo mínimo entre a fonte e observador (1/1/1662).
- motivação metafísica novamente!
- demonstrou a lei de Snell (1621).
- relacionava índice de refração e velocidade da luz no meio, o que não era conhecido. Luz viaja mais lentamente em meios densos (X Decartes).

Requerendo tempo do trajeto estacionário (varia em segunda ordem)

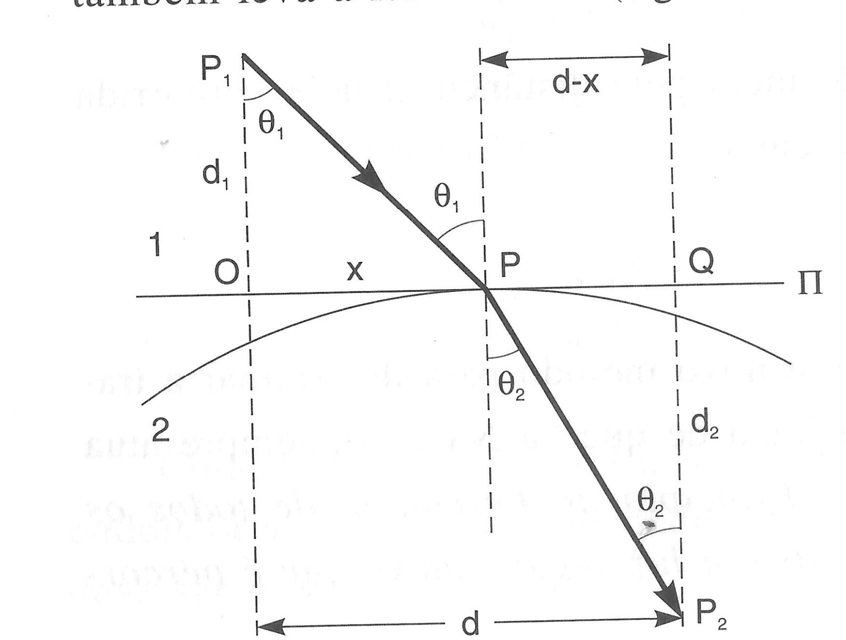


Fig. 2.14 Princípio de Fermat na refração

$$T = \frac{\overline{P_1P}}{c/n_1} + \frac{\overline{PP_2}}{c/n_2}$$
$$= \frac{1}{c}\left(n_1\sqrt{d_1^2 + x^2} + n_2\sqrt{d_2^2 + (d-x)^2}\right)$$

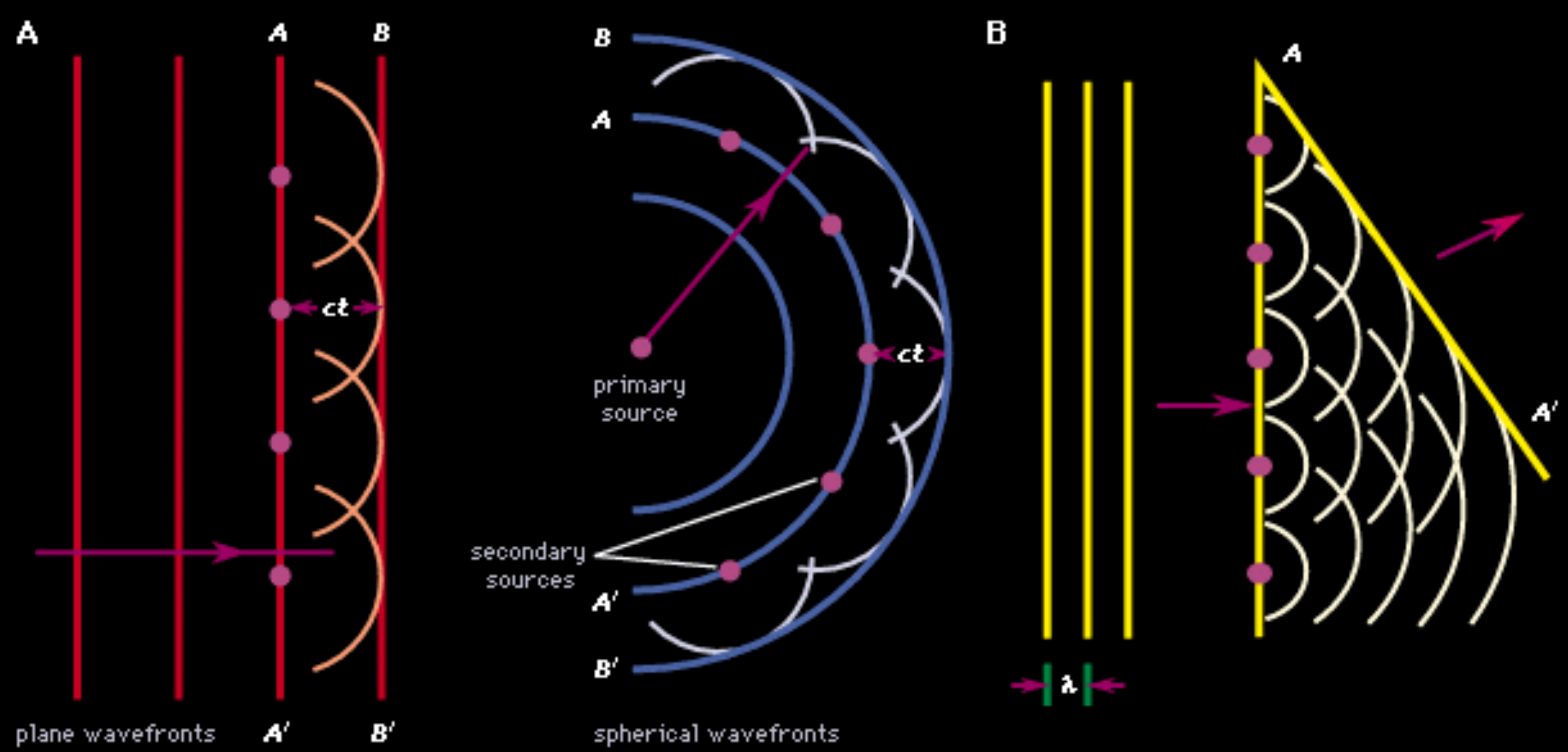
Mínimo (dT/dx=0)

$$0 = n_1 \frac{x}{\sqrt{d_1^2 + x^2}} - n_2 \frac{d-x}{\sqrt{d_2^2 + (d-x)^2}}$$
$$= n_1 \frac{x}{\overline{P_1P}} - n_2 \frac{(d-x)}{\overline{PP_2}}$$
$$= n_1 \sin\theta_1 - n_2 \sin\theta_2$$

Como a luz sabe o caminho de menor tempo?

- Christiaan Huygens (1629-1695) físico, matemático, astrônomo, holandês

- luz é uma onda
- mostrou relação entre índice de refração e velocidade
- cada ponto da frente de onda é uma fonte de ondas



- interferência entre as ondas gera a nova frente de onda
- a cada instante a onda prova todas as possibilidades!
- pode-se mostrar o princípio de Fermat a partir da ótica ondulatória

- interferência entre as ondas gera a nova frente de onda
- a cada instante a onda prova todas as possibilidades!
- pode-se mostrar o princípio de Fermat a partir da ótica ondulatória

Expressão matemática do princípio de Fermat:

$$\delta \int_Q^P \frac{ds}{v} = 0$$

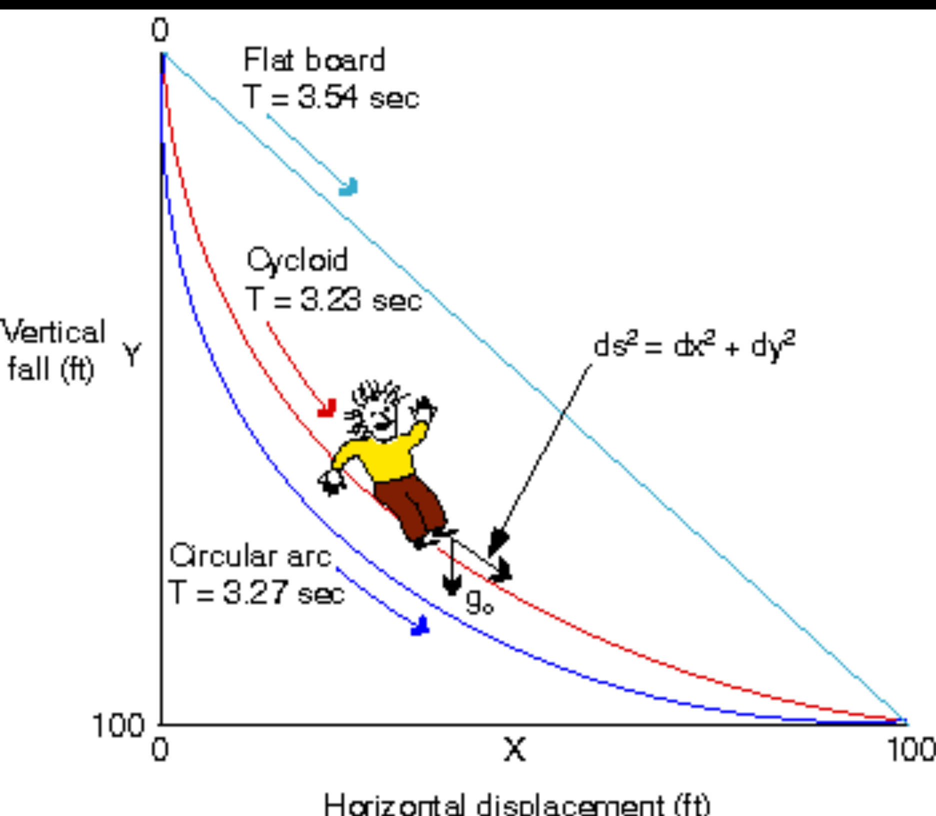
,i.e., a variação é estacionária para caminhos infinitesimalmente próximos

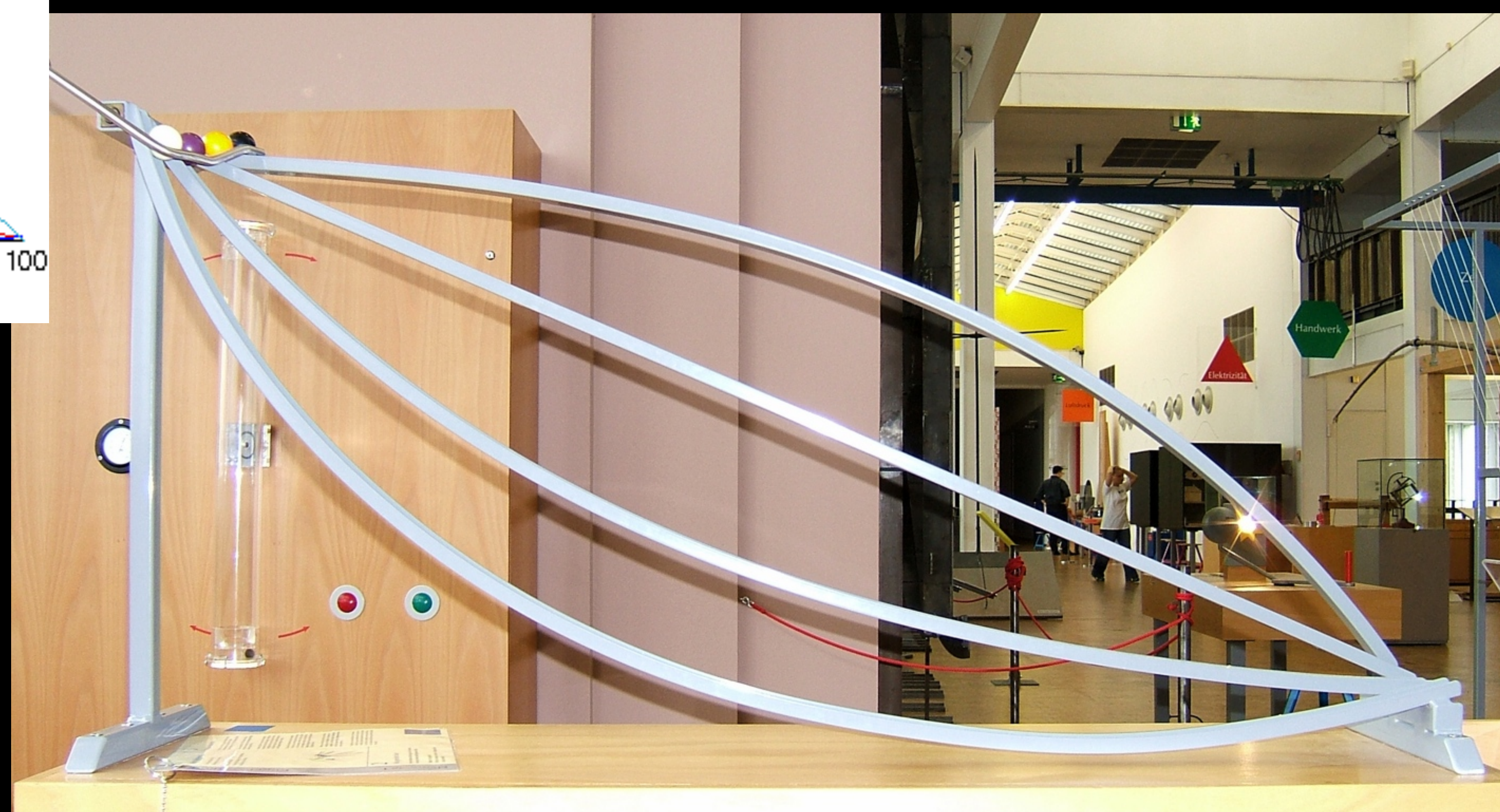
Enquanto isso na matemática...

- Fundação de Cartago (813 ac) por Dido: círculo é a curva com dado perímetro de maior área.
- solução dada por Zenodorus (200ac-140ac).

• Johaan Bernoulli (1696) define o problema da braquistócrona: dados A e B qual a trajetória que vai de A até B num tempo mínimo sob ação da gravidade?

• solução usando o princípio de Fermat.





Essa curva tem propriedades interessantes:

https://www.youtube.com/watch?v=MIAiwdHLtaA

Essa curva tem propriedades interessantes:

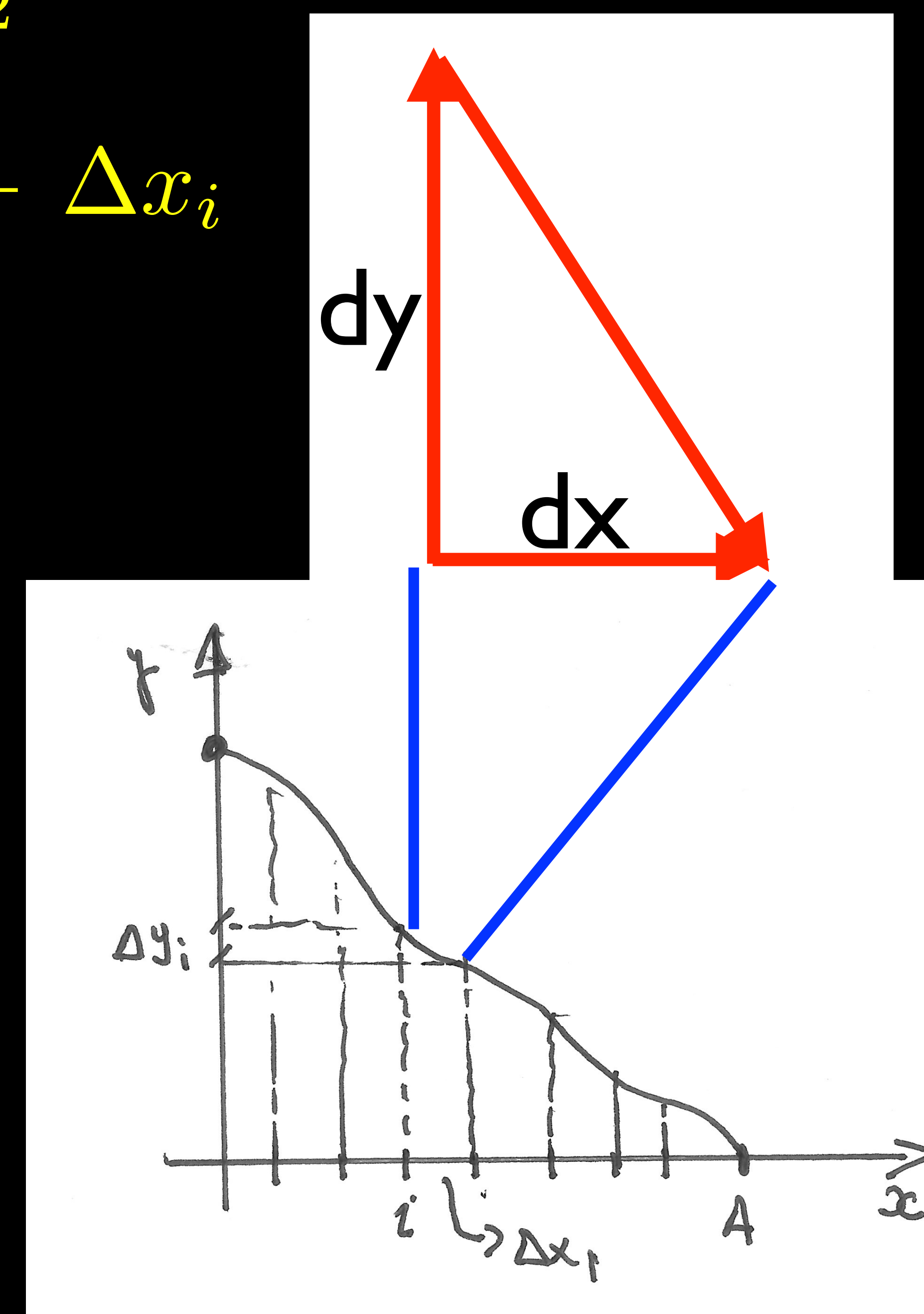
https://www.youtube.com/watch?v=MIAiwdHLtaA

Qual o problema matemático? Queremos uma curva y(x)

conservação de energia implica $v = \sqrt{2gh}$

pico a curva em pedacinhos

$$\Delta t_i = \sqrt{\frac{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}{2gy_i}} = \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}{2gy_i}}\, \Delta x_i$$



$$T = \sum_i \Delta t_i = \sum_i \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}{2gy_i}}\, \Delta x_i$$

$$\to \int_0^A dx \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{2gy}}$$

- Nova área: cálculo variacional.
- Euler foi o primeiro a tratar do assunto em 1733 (Elementa Calculi Variationum)
- Muitos contribuiram: Newton, Leibnitz, Lagrange, Legendre, Gauss, Brunacci, Poisson, Ostrogradsky, Jacobi, etc

UNIVERSO

MECÂNICO

Leonardo da Vinci: “natura semper agit per vias brevissimas”

Mínima ação de Maupertuis (1744)

- Pierre-Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759)
- francês; matemático, físico, astrônomo, etc
- filho de pirata rico; favorito de Luis XV
- Formulou o princípio da mínima ação:

“La Nature, dans la production de ses effets, agit toujour par les moyens les plus simples”

“Lorsqui’il arrive quelque changement dans la Nature, la quantité d’action, nécessaire pour ce changement, est la plus petite qu’il soit possible”

queria uma base teológica da mecânica...

- A definição de ação era obscura: $m\ v\ s$
- O que é v? O que é s?
- Deu alguns exemplos:

1) Colisão inelástica de 2 corpos: s distância em tempo unitário (v). Usou a velocidade relativa(!!):

$$\delta S = \qquad m_1(u_1 - v)^2 + m_2(u_2 - v)^2 = \text{ minimo}$$
$$m_1(u_1 - v) + m_2(u_2 - v) = 0$$

obtendo a conservação de momento

2) Colisão perfeitamente elástica:

$$\delta S = \quad m_1(u_1 - v_1)^2 + m_2(u_2 - v_2)^2 = \text{ minimo}$$
$$m_1u_1 + m2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2$$

Apesar dos problemas na definição e ação, teve um grande impacto abrindo uma linha de pesquisa nova.

Contribuição de Euler

- Leonhard Euler (1707-1783)

Notas: inspirado por Maupertuis; trajetória virtual; ação estacionária;

Contribuição de Euler

- Leonhard Euler (1707-1783)
- físico e matemático suiço
- grande matemático do século XVIII
- orientado de Johaan Bernoulli

A trajetória de uma partícula entre dois pontos dados satisfaz

$$\delta S = \int_P^Q v ds = 0$$

onde a diferença é entre a trajetória real e uma virtual infinitesimalmente próxima. Assume-se conservação de energia para a trajetória real e a virtual. (1744)

Notas: inspirado por Maupertuis; trajetória virtual; ação estacionária;

- Aperfeiçoa Maupertuis pois define o que é a ação;
- A proposta e Euler é equivalente as leis de Newton;
- Ainda possuia uma influência metafísica.
- Validade para muitas partículas baseado em argumentos metafísicos.

Contribuição de Lagrange

- Joseph Louis Lagrange (1736-1813)
- italiano/francês, matemático e astrônomo
- aluno de doutorado de Euler
- um dos fundadores do cálculo variacional.....
- generalizou a mínima ação para muitas partículas:

o sistema move-se uma configuração à outra de tal modo que a ação total é estacionária com respeito a movimentos virtuais próximos. As configurações inicial e final estão fixas, sendo a energia conservada mesmo para as configurações virtuais.

$$\delta_{E=const}\left(\sum_j m_j \int_A^B v_j ds_j\right) = 0$$

- Esse princípio leva a segunda lei de Newton

$$m_j \frac{d^2\vec{x}_j}{dt^2} = \vec{F}_j$$

- Lagrange não possuia uma visão metafísica

- Lagrange também desenvolveu o uso de coordenadas generalizadas:

"... it is perhaps one of the principal advantages of our method that it expresses the equations of every problem in the most simple form..."

- Caso de uma partícula em 1D

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{m}{2}\dot{x}^2\right) = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{m}{2}\dot{x}^2 - V\right)\right] = +\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{m}{2}\dot{x}^2 - V\right)$$

- É útil definir a lagrangiana

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - V = T - V$$

onde T é a energia cinética

- Para um conjunto geral de coordenadas q_j
usamos a expressão de T e V nessas coordenadas e

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

Equação de Euler-Lagrange

- O princípio de mínima ação em coordenadas generalizadas é

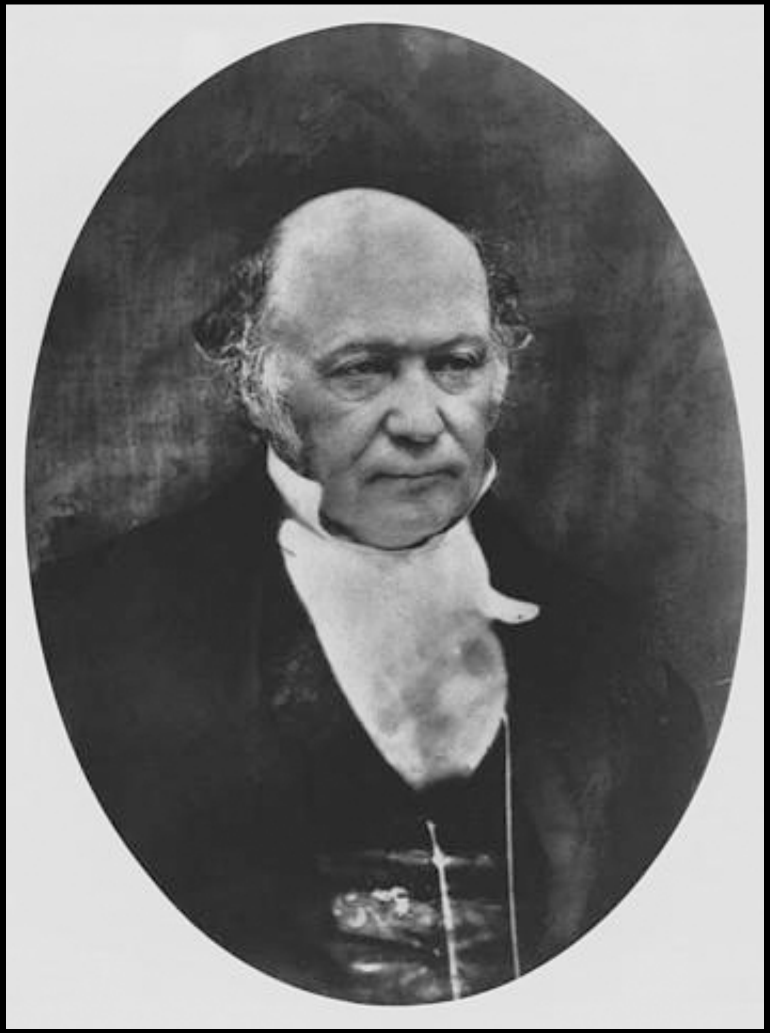
$$\delta \int \sum_j p_j dq_j = 0$$

onde o momento generalizado é $p_j \equiv \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$

a energia ainda é conversada nas configurações virtuais

Contribuição de Hamilton

- William Rowan Hamilton (1805-1865)
- físico, matemático, astrônomo, irlandês
- generalizou o princípio variacional, removendo o vínculo de conservação de energia:



$$\delta \int L dt = 0$$

a variação da integral acima entre a trajetória seguida e trajetórias virtuais vizinhas começando e terminando nos mesmos pontos e instantes de tempo é nula; i.e., a integral é estacionária.

a condição para a ação ser estacionária é que as equações de Euler-Lagrange sejam satisfeitas.

Prova

$$S[q,\dot{q}] = \int_{t_i}^{t_f} dt\ L(q,\dot{q})$$

$$S[q+\delta q,\dot{q}+\delta\dot{q}] = \int_{t_i}^{t_f} dt\ L(q+\delta q,\dot{q}+\delta\dot{q})$$

com $$\delta q(t_i) = \delta q(t_f) = 0$$

então $$\begin{aligned}\delta S &= S[q+\delta q,\dot{q}+\delta\dot{q}] - S[q,\dot{q}] = 0 \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt\ \left[L(q+\delta q,\dot{q}+\delta\dot{q}) - L(q,\dot{q})\right] \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt\ \left[\frac{\partial L}{\partial q}\ \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ \delta\dot{q}\right]\end{aligned}$$

$$\int_{t_i}^{t_f} dt\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ \delta\dot{q} = \int_{t_i}^{t_f} dt\ \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ \delta q\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\ \delta q\right]$$

$$\begin{aligned}
\delta S &= S[q+\delta q, \dot{q}+\delta\dot{q}] - S[q,\dot{q}] = 0 \\
&= \int_{t_i}^{t_f} dt\ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}\ \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\ \delta\dot{q}\right] \\
&= \int_{t_i}^{t_f} dt\ \delta q\ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right)\right]
\end{aligned}$$

como δq é arbitrário

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\partial L}{\partial q}$$

Recreio!

- a Lagrangiana de uma partícula relativística é:

$$S = -mc \int_A^B ds \qquad \text{com} \qquad ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{x}^2$$

i.e.

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

- o momento conjugado é $\vec{p} = \dfrac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \dfrac{d\vec{x}}{dt}$

Generalização para sistemas contínuos

- sistemas contínuos (fluidos) também descritos por Lagrangianas
- a Lagrangiana é dada em termos de uma integral no volume

pxpxpxpxpxpx

$$L = \int d^3x \; \mathcal{L} \qquad \text{onde} \quad \mathcal{L} \quad \text{é a densidade Lagrangiana}$$

$$\delta S = \int dt \int d^3x \mathcal{L}(u, \partial_t, \partial_x u) = 0$$

- As eqs. de Euler são

pxpxpxpxpxpx

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t u)}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_x u)}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}$$

✳ Para uma corda temos

$$\mathcal{L} = \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \frac{T}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$$

e a equação de movimento é

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{T}{\rho}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Simetrias e formalismo lagrangiano

- simetrias levam soluções em soluções.
- simetrias deixam a ação invariante.
- Teorema de Noether (1915):

para cada simetria contínua do sistema
existe uma quantidade conservada

- translação espacial => conservação do momento linear
- translação temporal => conservação de energia
- rotações => conservação de momento angular
- redefinição de fases => probabilidade/carga elétrica

Fenômenos Elétricos

Eletrostática

- Podemos obter a equação para o potencial elétrico minimizando a energia eletrostática

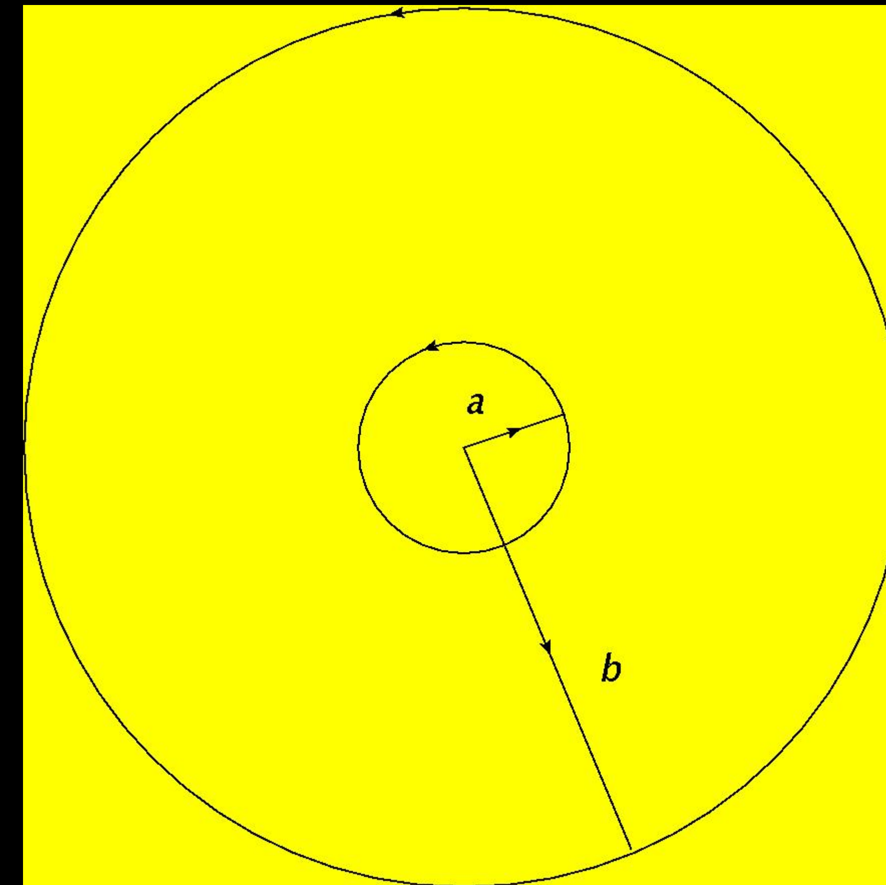
$$U = \int d^3x \left(\frac{\epsilon_0}{2} (\nabla \varphi)^2 - \rho \varphi \right)$$

onde o campo elétrico é dado por $\vec{E} = -\nabla \varphi$

- usando as eqs. de Euler-Lagrange temos $\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$

- podemos utilizar o método variacional para fazer aproximações!

Capacitor cilíndrico sujeito a ddp V.
Estimemos sua capacitância



$$U = \frac{1}{2}CV^2$$

primeira tentativa

pxpxpxpxpxpx

$$\varphi = V\left(1 - \frac{r-a}{b-a}\right)$$

$$\frac{C}{2\pi\epsilon_0} = \frac{b+a}{2(b-a)}$$

$\frac{b}{a}$	$\frac{C_{true}}{2\pi\epsilon_0}$	$\frac{C \text{ (first approx.)}}{2\pi\epsilon_0}$
2	1.4423	1.500
4	0.721	0.833
10	0.434	0.612
100	0.267	0.51
1.5	2.4662	2.50
1.1	10.492070	10.500000

• podemos melhor introduzindo um parâmetro

$$\phi = V\left[1 + \alpha\left(\frac{r-a}{b-a}\right) - (1+\alpha)\left(\frac{r-a}{b-a}\right)^2\right],$$

substituindo e minimizando

$$\frac{C}{2\pi\epsilon_0} = \frac{b^2 + 4ab + a^2}{2(b^2 - a^2)}$$

$\frac{b}{a}$	$\frac{C_{\text{true}}}{2\pi\epsilon_0}$	$\frac{C(\text{quadratic})}{2\pi\epsilon_0}$
2	1.4423	1.444
4	0.721	0.733
10	0.434	0.475
100	0.267	0.346
1.5	2.4662	2.4667
1.1	10.492070	10.492065

Eletrodinâmica

- Campos eletromagnéticos obedecem as equações de Maxwell
- Os campos elétrico e magnético podem ser descritos como um sistema contínuo
- É conveniente trabalhar com os potenciais:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \Longrightarrow \vec{B} = \nabla \wedge \vec{A}$$

$$\nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \Longrightarrow \vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

- No caso sem fontes a densidade lagrangiana é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}^2 - \vec{B}^2\right.$$

Mecânica Quântica

✳ Mundo microscópico possui um comportamento bem distinto:

- energias quantizadas
- incertezas
- comportamento ondulatório
- probabilidades, etc

✳ Mecânica quântica descreve o mundo microscópico
✳ Por exemplo, energias (E) de um átomo são obtidas resolvendo

$$H\Psi = E\Psi \qquad \text{para o hidrogênio} \qquad \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi r}\right)\Psi = E\Psi$$

- As energias podem ser obtidas requerendo procurando pontos estacionários de

$$F(\Psi) = \frac{\langle\Psi|H|\Psi\rangle}{\langle\Psi|\Psi\rangle} = \frac{\int d^3x\ \Psi^* H \Psi}{\int d^3x\ \Psi^*\Psi}$$

- o valor de F nos pontos estacionários são as energias
- como para o capacitor, o método pode ser usado para aproximações

Como a partícula clássica encontra o mínimo de S?

Como a partícula clássica encontra o mínimo de S?

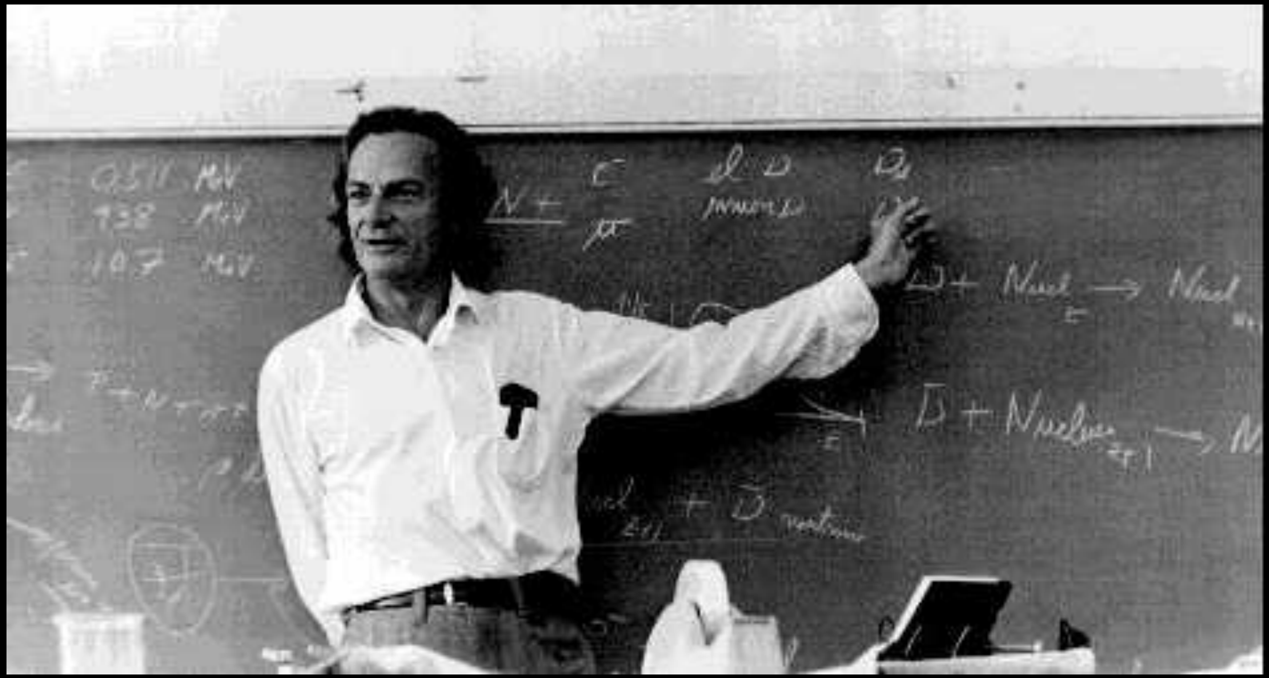
Resposta: formulação de Feynman da MQ

a probabibildade de ir de um ponto A ao B é $|K|^2$ onde

$$K = \int \mathcal{D}x \; e^{\frac{i}{\hbar} S(x}$$

onde a soma é sobre todos os caminhos de A a B

como $\hbar$ é pequeno o caminho que mais contribui é o de mínima ação (analogia Huygens X Fermat)



Comentários Finais

- Princípios variacionais (PV) ampliam nosso entendimento
- PV são a base de muitos métodos de aproximação
- PV usados na contrução de novos modelos
- PV aparecem em muitas áreas da Física

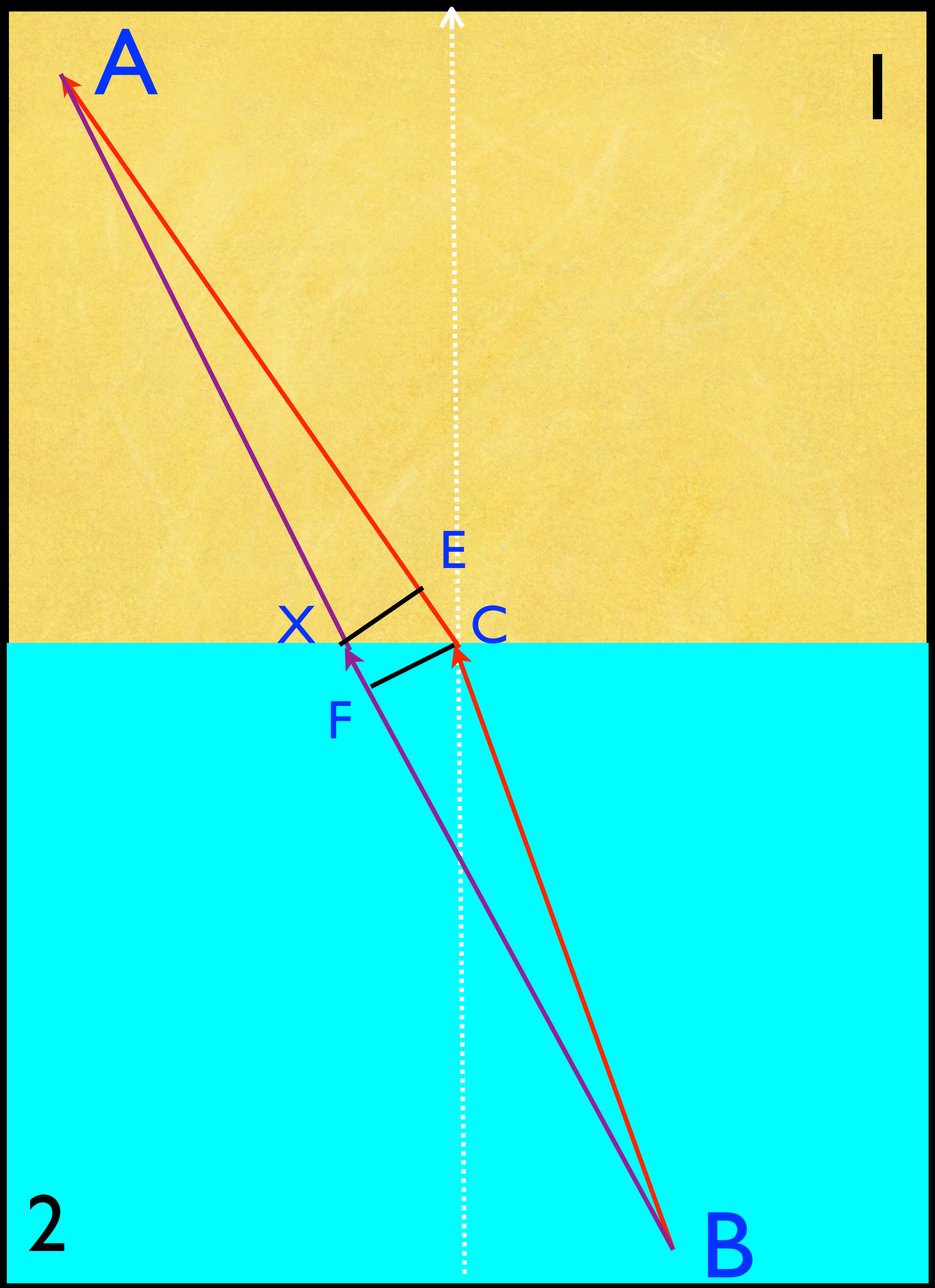
- Princípios variacionais (PV) ampliam nosso entendimento
- PV são a base de muitos métodos de aproximação
- PV usados na contrução de novos modelos
- PV aparecem em muitas áreas da Física

mais importante eles são intrigantes e interessantes!

Referências

- The Feynman lectures on Physics
- Yourgrau e Mandelstam: “Variational Principles in ...”

Requerendo tempo do trajeto estacionário (varia em segunda ordem)



- Diferença ~ EC-XF
- EC = XC sin(i)
- XF = XC sin(r)
- tempo estacionário =>
- EC/v1 = XF/v2
- sin(i)/v1 = sin(r)/v2