SOLUÇÕES DE ALGUNS EXERCÍCIOS DA LISTA

ESPAÇOS DE HILBERT E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS MAP4003/ MAP5707

A solução dos exercícios (com exceção do exercício 4, que são apenas integrais) estão abaixo. Infelizmente, encontrei algumas imprecisões nos enunciados enquanto escrevia as soluções. Eles também foram corrigidos. Caso vocês encontrem mais imprecisões, por favor, me avisem.

É importante que usem o senso crítico para ler as soluções! Eu escrevi as soluções de maneira rápida e nem todas foram relidas adequadamente.

Os exercícios abaixo foram retirados ou baseados nos dos livros:

C) Introdução à Análise Funcional, César R. de Oliveira, Projeto Euclides.

B) Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Haim Brezis, Universitext, Springer.

Lembramos da nossa notação $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}$, $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$.

Exercício 1. Seja $(E, (.,.))$ um espaço vetorial com produto interno.

i. Mostre que se $(u, v) = (w, v)$ para todo $v \in E$, então $u = w$.

ii. Mostre que se E é um espaço real e u e v são tais que $\|u\| = \|v\|$, então $(u + v, u - v) = 0$.

Solução:

i. Note que, pelas hipóteses, $(u - w, v) = 0$ para todo $v \in E$. Se escolhermos $v = u - w$, obtemos

$$(u - w, u - w) = 0.$$

Isto implica que $u - w = 0$, ou seja, $u = w$.

ii. Basta observar que

$$(u + v, u - v) = (u, u) + (v, u) - (u, v) - (v, v) = (u, u) - (v, v) = \|u\|^2 - \|v\|^2 = 0,$$

já que $\|u\| = \|v\|$. Note que usamos que $(v, u) = (u, v)$.

Exercício 2. Mostre que num espaço vetorial com produto interno sempre vale $\|u\| = \max_{\|v\|=1} |(u, v)|$.

Solução:

A igualdade vale claramente se $u = 0$, pois, neste caso, ambos os lados são iguais a zero. Vamos então supor que $u \neq 0$.

Por Cauchy-Schwarz, sabemos que, se $\|v\| = 1$, então

$$|(u, v)| \leq \|u\|\|v\| = \|u\|.$$

Logo $\max_{\|v\|=1} |(u, v)| \leq \|u\|$.

Por outro lado, seja $v = \frac{u}{\|u\|}$. Neste caso, temos que $\|v\| = \|\frac{u}{\|u\|}\| = 1$ e

$$|(u, v)| = |(u, \frac{u}{\|u\|})| = \frac{|(u, u)|}{\|u\|} = \frac{\|u\|^2}{\|u\|} = \|u\|.$$

Assim, $\max_{\|v\|=1} |(u, v)| \geq \|u\|$. Isto encerra a demonstração.

Exercício 3. (Identidades de polarização) Seja $(E, (.,.))$ um espaço vetorial com produto interno.

i. Mostre que se o espaço é real, ou seja, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, então

$$(u, v) = \frac{1}{4}\left(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2\right),$$

para todo $u, v \in E$.

ii. Mostre que se o espaço é complexo, ou seja, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, então

$$(u, v) = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + i\|u+iv\|^2 - i\|u-iv\|^2\right),$$

para todo $u, v \in E$.

iii. Se $(.,.)_1$ e $(.,.)_2$ são dois produtos internos diferentes num espaço vetorial E, então as normas $u \mapsto \|u\|_1 = \sqrt{(u,u)_1}$ e $u \mapsto \|u\|_2 = \sqrt{(u,u)_2}$ podem ser iguais?

Solução:

i. Basta observar que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right) = \frac{1}{4}\left((u+v, u+v) - (u-v, u-v)\right) \\
&= \frac{1}{4}\left((u,u) + (u,v) + (v,u) + (v,v) - (u,u) + (v,u) + (u,v) - (v,v)\right) = (u,v).
\end{aligned}$$

ii. Segue como abaixo:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + i\|u+iv\|^2 - i\|u-iv\|^2\right) \\
&= \frac{1}{4}\left((u+v, u+v) - (u-v, u-v) + i(u+iv, u+iv) - i(u-iv, u-iv)\right) \\
&= \frac{1}{4}\left[((u,u) + (u,v) + (v,u) + (v,v)) - ((u,u) - (v,u) - (u,v) + (v,v))\right. \\
&\quad \left. + i\left((u,u) + i(v,u) - i(u,v) + (v,v)\right) - i\left((u,u) - i(v,u) + i(u,v) + (v,v)\right)\right] \\
&= (u,v).
\end{aligned}$$

iii. Como visto nos itens anteriores, o produto interno é completamente determinado pela norma associada a ele. Assim, se as normas fossem iguais, os produtos internos também seriam. A resposta, portanto, é não.

Exercício 4. Mostre que para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:

i. O conjunto $\mathcal{B}_{\mathrm{c}} = \{1\} \cup \{\sqrt{2}\cos(n\pi x) : n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto ortonormal em $L^2(]0,1[;\mathbb{K})$, isto é, $\int_0^1 \sqrt{2}\cos(n\pi x)\sqrt{2}\cos(m\pi x)dx = \delta_{nm}$, $\int_0^1 1\sqrt{2}\cos(m\pi x)dx = 0$ e $\int_0^1 1^2 dx = 1$, para $n, m \geq 1$.

ii. O conjunto $\mathcal{B}_{\mathrm{s}} = \{\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(n\pi x) : n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto ortonormal em $L^2(]0,1[;\mathbb{K})$.

iii. O conjunto $\mathcal{B}_{\mathrm{real}} = \{1/\sqrt{2}\} \cup \{\mathrm{sen}(n\pi x) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\cos(n\pi x) : n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto ortonormal em $L^2(]-1,1[;\mathbb{K})$.

iv. O conjunto $\mathcal{B}_{\mathrm{comp}} = \{e^{in\pi x}/\sqrt{2} : n \in \mathbb{Z}\}$ é um conjunto ortonormal em $L^2(]-1,1[;\mathbb{C})$.

Exercício 5. Use a desigualdade de Bessel para mostrar que

i. Se $f \in L^2(]0,1[;\mathbb{K})$, então

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)\mathrm{sen}(n\pi x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)\cos(n\pi x)dx = 0.$$

ii. Se $f \in L^2(]-1,1[;\mathbb{K})$, então

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^1 f(x)\mathrm{sen}(n\pi x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-1}^1 f(x)\cos(n\pi x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-1}^1 f(x)e^{in\pi x}dx = 0.$$

Solução:

Como o conjunto $\{\sqrt{2}\mathrm{sen}(n\pi x); n \geq 1\}$ é um conjunto ortonormal em $L^2(]0,1[;\mathbb{K})$, sabemos, pela desigualdade de Bessel, que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\sqrt{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{sen}(n\pi x)dx|^2 \leq \int_0^1 |f(x)|^2 dx.$$

Assim, a série $\sum_{n=1}^{\infty} |\int_0^1 f(x)\text{sen}(n\pi x)dx|^2$ é absolutamente convergente. Sabemos de análise real que, se $\sum_{j=1}^{\infty} a_j < \infty$ e $a_j \geq 0$, então $\lim_{j\to\infty} a_j = 0$. Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} 2|\int_0^1 f(x)\text{sen}(n\pi x)dx|^2 = 0 \implies \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)\text{sen}(n\pi x)dx = 0.$$

As outras afirmações seguem usando exatamente o mesmo argumento e o fato de que $\{\sqrt{2}\cos(n\pi x); n \geq 1\}$ é um conjunto ortonormal em $L^2(]0,1[;\mathbb{K})$, $\{\text{sen}(n\pi x) : n \in \mathbb{N}\}$, $\{\cos(n\pi x) : n \in \mathbb{N}\}$ e $\{(1/\sqrt{2})e^{in\pi x} : n \in \mathbb{Z}\}$ são ortonormais em $L^2(]-1,1[;\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ no caso das exponenciais complexas).

Exercício 6. Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência real tal que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Considere o conjunto $l_2^a(\mathbb{K})$ das sequências $x = (x_1, x_2, ...)$ de números em $\mathbb{K}$ tais que $\sum_{j=1}^{\infty} a_j|x_j|^2 < \infty$. Mostre que $l_2^a(\mathbb{K})$ é um espaço vetorial com a soma e multiplicação por escalar definidas como

$$(x_1, x_2, ...) + (y_1, y_2, ...) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ...),$$
$$\lambda(x_1, x_2, ...) := (\lambda x_1, \lambda x_2, ...),$$

em que $x, y \in l_2^a(\mathbb{K})$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Mostre também que o produto interno

$$(x, y)_a = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j \overline{y_j}$$

está bem definido e que $(l_2^a(\mathbb{K}), (.,.)_a)$ é um espaço de Hilbert. Note que $l_2(\mathbb{K}) = l_2^a(\mathbb{K})$ para $a = (1, 1, 1, 1, ...)$.

Solução:
Basta imitar a demonstração feita em sala de aula. Veja abaixo:
Afirmação 1: $l_2^a(\mathbb{K})$ é um espaço vetorial.
Como vimos, basta provar que se $x, y \in l_2(\mathbb{K})$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, então $x + y \in l_2(\mathbb{K})$ e $\lambda x \in l_2(\mathbb{K})$.
Antes, observamos que a função

$$(x, y)_{\mathbb{K}^n} = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \overline{y_j}, \quad x, y \in \mathbb{K}^n,$$

define um produto interno em $\mathbb{K}^n$. Logo $\|x\|_{\mathbb{K}^n} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j|x_j|^2}$ é uma norma e vale a desigualdade triangular $\|x + y\|_{\mathbb{K}^n} \leq \|x\|_{\mathbb{K}^n} + \|y\|_{\mathbb{K}^n}$ para todo $x, y \in \mathbb{K}^n$. Vamos agora continuar em etapas.
Etapa 1: Se $x, y \in l_2^a(\mathbb{K})$, então $x + y \in l_2^a(\mathbb{K})$.
Para $x = (x_1, x_2, ...), y = (y_1, y_2, ...) \in l_2^a(\mathbb{K})$, definimos $x^n = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$ e $y^n = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{K}^n$. Assim, vemos que

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} a_j|x_j + y_j|^2 = \lim_{n\to\infty}\|x^n + y^n\|_{\mathbb{K}^n}^2 \leq \lim_{n\to\infty}(\|x^n\|_{\mathbb{K}^n} + \|y^n\|_{\mathbb{K}^n})^2$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j|x_j|^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j|y_j|^2}\right)^2 = \left(\sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} a_j|x_j|^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} a_j|y_j|^2}\right)^2 < \infty.$$

Portanto, $x + y \in l_2^a(\mathbb{K})$ e a adição está bem definida.
Etapa 2: Se $x \in l_2^a(\mathbb{K})$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, então $\lambda x \in l_2^a(\mathbb{K})$.
Basta observar que

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j|\lambda x_j|^2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} a_j|\lambda x_j|^2 = |\lambda|^2\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} a_j|x_j|^2 = |\lambda|^2\sum_{j=1}^{\infty} a_j|x_j|^2 < \infty.$$

Assim, $\lambda x \in l_2^a(\mathbb{K})$ e a multiplicação também está bem definida.

Afirmação 2: Sejam $x, y \in l_2^a(\mathbb{K})$. Logo a soma $\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j \overline{y_j}$ converge absolutamente e a função abaixo define um produto interno em $l^2(\mathbb{K})$:

$$(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j \overline{y_j}. \tag{0.1}$$

Sejam $x = (x_1, x_2, ...)$ e $y = (y_1, y_2, ...)$. Para mostrar que a soma converge absolutamente, vamos usar novamente as notações x^n, y^n e $(x^n, y^n)_{\mathbb{K}^n}$ da afirmação 1.

Vamos definir $\tilde{x} = (|x_1|, |x_2|, ...)$ e $\tilde{y} = (|y_1|, |y_2|, ...)$. É evidente que $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ pertencem a $l_2^a(\mathbb{K})$. De fato, têm a mesma norma de x e y, respectivamente. Definimos $\tilde{x}^n = (|x_1|, ..., |x_n|)$ e $\tilde{y}^n = (|y_1|, ..., |y_n|)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, para mostrar que a série $\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j \overline{y_j}$ converge absolutamente, basta observar que

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty} a_j |x_j \overline{y_j}| &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} a_j |x_j||y_j| = \lim_{n\to\infty} (\tilde{x}^n, \tilde{y}^n)_{\mathbb{K}^n} \leq \lim_{n\to\infty} \|\tilde{x}^n\|_{\mathbb{K}^n} \|\tilde{y}^n\|_{\mathbb{K}^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j |x_j|^2} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j |y_j|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} a_j |x_j|^2} \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} a_j |y_j|^2}.\end{aligned}$$

Por fim, agora que sabemos que a função (0.1) está bem definida, mostrar que ela define um produto interno é simples e fica a cargo do leitor.

Afirmação 3: O espaço $(l_2^a(\mathbb{K}), (.,.))$ é um espaço de Hilbert, em que o produto interno foi definido em (0.1).

Consideremos vetores e_j que sejam iguais a $1/a_j$ na j-ésima entrada e 0 em todas as outras. (Exemplos: $e_1 = (1/a_1, 0, 0, ...)$, $e_2 = (0, 1/a_2, 0, ...)$, $e_3 = (0, 0, 1/a_3, ...)$ e etc)

Basta agora mostrar que $l_2^a(\mathbb{K})$ é completo. Observe que se $x = (x_1, x_2, x_3, ...) \in l_2^a(\mathbb{K})$, então

$$(x, e_j) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \delta_{kj}/a_j = x_j.$$

Seja $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $l_2^a(\mathbb{K})$. Denotamos $u_j = (u_{j1}, u_{j2}, u_{j3}, ...)$. A sequência $(u_{jk})_{j\in\mathbb{N}}$ também é uma sequência de Cauchy para cada k fixo. De fato, vemos que se $i, j \in \mathbb{N}$, então

$$|u_{jk} - u_{ik}| = |(u_j - u_i, e_k)| \leq \|u_j - u_i\| \|e_k\|.$$

Dessa relação segue fácil que se (u_j) é uma sequência de Cauchy em $l_2^a(\mathbb{K})$, então $(u_{jk})_{j\in\mathbb{N}}$ também é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{K}$.

Como toda sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sempre converge, então existe $U_k = \lim_{j\to\infty} u_{jk}$. Vamos mostrar que

$$u = (U_1, U_2, U_3, ...)$$

pertence a $l_2^a(\mathbb{K})$ e que $\lim_{j\to\infty} u_j = u$.

Para isto, começamos observando que, como $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy, para $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $i, j \geq N$, então

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k |u_{jk} - u_{ik}|^2 = \|u_j - u_i\|^2 < \varepsilon^2.$$

Em particular, para todo $M \in \mathbb{N}$, temos

$$\sum_{k=1}^{M} a_k |u_{jk} - u_{ik}|^2 < \varepsilon^2.$$

Tomando o limite $i \to \infty$, concluímos que

$$\sum_{k=1}^{M} a_k |u_{jk} - U_k|^2 < \varepsilon^2. \tag{0.2}$$

Agora tomamos o limite $M \to \infty$ e em (0.2) obtemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k |u_{jk} - U_k|^2 < \varepsilon^2. \tag{0.3}$$

Assim, fica claro que $u_j - u \in l_2^a(\mathbb{K})$. Como $u = (u - u_j) + u_j$ e $u - u_j \in l_2^a(\mathbb{K})$ e $u_j \in l_2^a(\mathbb{K})$, concluímos que $u \in l_2^a(\mathbb{K})$, já que a soma de elementos em $l_2^a(\mathbb{K})$ também pertence a $l_2^a(\mathbb{K})$, como vimos na afirmação 1. Por fim, (0.3) mostra que $\|u_j - u\| < \varepsilon$, para todo $j > N$. Como $\varepsilon > 0$ era arbitrário, provamos nossa convergência.

Exercício 7. Considere o espaço $l_2^{fin}(\mathbb{K})$ das sequências em $\mathbb{K}$ tais que $x = (x_1, x_2, ...) \in l_2^{fin}(\mathbb{K})$ se, e somente se, $x_j \neq 0$ apenas para finitos $j \in \mathbb{N}$.

i. Mostre que $l_2^{fin}(\mathbb{K})$ é um subespaço de $l_2(\mathbb{K})$.

ii. Considere o produto interno de $l_2(\mathbb{K})$ e o conjunto $\mathcal{B} = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ definido como $e_1 = (1, 0, 0, ...)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0, ...)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0, ...)$ e assim por diante. Considere a sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dada por $u_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} e_j$. Mostre que a sequência é de Cauchy. Ela converge em $l_2^{fin}(\mathbb{K})$? O espaço $l_2^{fin}(\mathbb{K})$ é um espaço de Hilbert?

Solução:

i. Sejam x e y pertencentes a $l_2^{fin}(\mathbb{K})$. Sabemos que $x_j \neq 0$ e $y_j \neq 0$ para finitos $j \in \mathbb{N}$. Seja $J \in \mathbb{N}$ o maior j tal que $x_j \neq 0$ ou $y_j \neq 0$. Logo $x_j = y_j = 0$ para todo $j > J$. Dessa forma, $(x + y)_j = x_j + y_j = 0$ para todo $j > J$. Concluímos que $x + y$ tem no máximo J componentes diferentes de zero. Portanto, $x + y \in l_2^{fin}(\mathbb{K})$. Da mesma forma, podemos mostrar que se $\alpha \in \mathbb{K}$ e $x \in l_2^{fin}(\mathbb{K})$, então $\alpha x \in l_2^{fin}(\mathbb{K})$.

ii. A sequência é de Cauchy, pois se $n > m$, então

$$\begin{aligned} \|u_n - u_m\|^2 &= \| \sum_{j=m+1}^{n} \frac{1}{j} e_j \|^2 = (\sum_{l=m+1}^{n} \frac{1}{l} e_l, \sum_{j=m+1}^{n} \frac{1}{j} e_j) = \sum_{l=m+1}^{n} \sum_{j=m+1}^{n} \frac{1}{lj} (e_l, e_j) \\ &= \sum_{l=m+1}^{n} \sum_{j=m+1}^{n} \frac{1}{lj} \delta_{lj} = \sum_{j=m+1}^{n} \frac{1}{j^2} < \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{j^2}. \end{aligned}$$

Como $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} < \infty$, sabemos que $\lim_{m \to \infty} \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = 0$. Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que se $m > M$, então $\sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} < \varepsilon^2$. Assim, se $n, m > M$ (se $n < m$, basta usar o mesmo argumento trocando m por n), temos

$$\|u_n - u_m\| < \varepsilon.$$

A sequência é, portanto, de Cauchy.

Consideremos o elemento $u = (1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, ...)$. Este elemento pertence a $l_2(\mathbb{K})$, pois

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} < \infty.$$

Além disso,

$$\lim_{n \to \infty} \|u_n - u\| = \lim_{n \to \infty} \| \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j} e_j \| = \lim_{n \to \infty} \sqrt{\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^2}} = 0.$$

Logo $\lim_{n \to \infty} u_n = u$. Como $u \notin l_2^{fin}(\mathbb{K})$, então a sequência não converge para nenhum elemento em $l_2^{fin}(\mathbb{K})$, devido a unicidade do limite (uma sequência pode convergir para no máximo um elemento).

Assim, a sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy, não converge em $l_2^{fin}(\mathbb{K})$ e o espaço $l_2^{fin}(\mathbb{K})$ não é um espaço de Hilbert.

Exercício 8. Considere em $\mathbb{R}^n$ as seguintes normas:

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|,$$
$$\|x\|_\infty = \max_{j\in\{1,...,n\}} |x_j|.$$

Elas satisfazem a desigualdade do paralelogramo para todos os vetores $u, v \in \mathbb{R}^n$? Existem produtos internos associados a norma $\|.\|_1$ ou a norma $\|.\|_\infty$?

Solução:
A desigualdade do paralelogramo nos diz que

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$$

Se $n = 1$, então $\|x\|_1 = \|x\|_\infty = |x| = \sqrt{x^2}$. Como a operação $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto xy$ é um produto interno, então $|x| = \sqrt{xx}$ é uma norma que vem do produto interno. Assim, a desigualdade do paralelogramo é válida e tanto $\|.\|_1$ como $\|.\|_\infty$ são normas associadas a produtos interno.
Se $n \neq 1$, então a situação muda. Neste caso, tome $u = (1, 0, 0, ..., 0)$ e $v = (0, 1, 0, ..., 0)$. Logo

$$\|u+v\|_1^2 + \|u-v\|_1^2 = \|(1, 1, 0, ..., 0)\|_1^2 + \|(1, -1, 0, ..., 0)\|_1^2 = 4 + 4 = 8,$$

mas

$$2\|u\|_1^2 + 2\|v\|_1^2 = 2\|(1, 0, ..., 0)\|_1^2 + 2\|(0, 1, 0, ..., 0)\|_1^2 = 2 + 2 = 4.$$

Logo, não vale a desigualdade do paralelogramo e $\|.\|_1$ não está associado a um produto interno. Da mesma forma,

$$\|u+v\|_\infty^2 + \|u-v\|_\infty^2 = \|(1, 1, 0, ..., 0)\|_\infty^2 + \|(1, -1, 0, ..., 0)\|_\infty^2 = 1 + 1 = 2,$$

mas

$$2\|u\|_\infty^2 + 2\|v\|_\infty^2 = 2\|(1, 0, ..., 0)\|_1^2 + 2\|(0, 1, 0, ..., 0)\|_1^2 = 2 + 2 = 4.$$

Novamente não vale a desigualdade do paralelogramo e $\|.\|_\infty$ não está associado a um produto interno.

Exercício 9. O objetivo desse exercício é mostrar que se uma norma em um espaço vetorial E satisfaz a lei do paralelogramo, então existe um produto interno tal que a norma está associada a esse produto interno, ou seja, $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$. Vamos considerar apenas espaços reais para facilitar.
Suponha que $\|.\| : E \to [0, \infty[$ seja uma norma que satisfaça a lei do paralelogramo:

$$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2,$$

para todo $a, b \in E$. Vamos definir a função

$$(u, v) = \frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right).$$

Observe que $(u, u) = \|u\|^2$. Nosso objetivo é mostrar que esta função é um produto interno.
i. Mostre que $(u, v) = (v, u)$, $(-u, v) = -(u, v)$ e $(u, 2v) = 2(u, v)$, para todo $u, v \in E$.
ii. Mostre que $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$. (Dica: Use a lei do paralelogramo sucessivamente com 1) $a = u$, $b = v$, 2) $a = u + w$, $b = v + w$, 3) $a = u + v + w$, $b = w$.)
iii. Prove que $(\lambda u, v) = \lambda(u, v)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u, v \in E$. (Dica: Prove para $\mathbb{N}$, depois para $\mathbb{Q}$ e, por fim, para $\mathbb{R}$.)
iv. Conclua o resultado (que $(., .)$ é um produto interno).

Solução:
i. Temos

$$\begin{aligned}(u, v) &= \frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\|v+u\|^2 - \|v\|^2 - \|u\|^2\right) = (v, u).\end{aligned}$$

Observando que $\|v+u\|^2 + \|v-u\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|u\|^2$, temos

$$\begin{aligned}(-u,v) &= \frac{1}{2}\left(\|-u+v\|^2 - \|-u\|^2 - \|v\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(-\|v+u\|^2 + 2\|v\|^2 + 2\|u\|^2 - \|-u\|^2 - \|v\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(-\|v+u\|^2 + \|v\|^2 + \|u\|^2\right)\\ &= -\frac{1}{2}\left(\|v+u\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right) = -(u,v).\end{aligned}$$

Por fim, $\|(u+v)+v\|^2 + \|(u+v)-v\|^2 = 2\|u+v\|^2 + 2\|v\|^2$ implica que

$$\begin{aligned}(u,2v) &= \frac{1}{2}\left(\|u+2v\|^2 - \|u\|^2 - \|2v\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\|(u+v)+v\|^2 - \|u\|^2 - \|2v\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(2\|u+v\|^2 + 2\|v\|^2 - \|u\|^2 - \|u\|^2 - \|2v\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(2\|u+v\|^2 - 2\|u\|^2 - 2\|v\|^2\right) = 2(u,v).\end{aligned}$$

ii. Vamos seguir as dicas. Temos

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2,$$

$$\|u+v+2w\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u+w\|^2 + 2\|v+w\|^2,$$

$$\|u+v+2w\|^2 + \|u+v\|^2 = 2\|u+v+w\|^2 + 2\|w\|^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned}(u+v,w) &= \frac{1}{2}\left(\|u+v+w\|^2 - \|u+v\|^2 - \|w\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\|u+v+2w\|^2 + \frac{1}{2}\|u+v\|^2 - \|w\|^2 - \|u+v\|^2 - \|w\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\|u+w\|^2 + \|v+w\|^2 - \frac{1}{2}\|u-v\|^2 + \frac{1}{2}\|u+v\|^2 - \|w\|^2 - \|u+v\|^2 - \|w\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\|u+w\|^2 + \|v+w\|^2 + \frac{1}{2}\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2 + \frac{1}{2}\|u+v\|^2 - \|w\|^2 - \|u+v\|^2 - \|w\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\|u+w\|^2 + \|v+w\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2 - \|w\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\|u+w\|^2 - \|u\|^2 - \|w\|^2\right) + \frac{1}{2}\left(\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2\right) = (u,w) + (v,w).\end{aligned}$$

iii. Se $n \in \mathbb{N}$, então

$$\begin{aligned}(nu,v) &= ((n-1)u+u,v) = ((n-1)u,v) + (u,v)\\ &= ((n-2)u,v) + 2(u,v) = \ldots = (u,v) + (n-1)(u,v) = n(u,v).\end{aligned}$$

Se $p, q \in \mathbb{N}$, então

$$(\frac{p}{q}u,v) = \frac{1}{q}q(\frac{p}{q}u,v) = \frac{1}{q}(q\frac{p}{q}u,v) = \frac{1}{q}(pu,v) = \frac{p}{q}(u,v).$$

Por fim,

$$(-\frac{p}{q}u,v) = -(\frac{p}{q}u,v) = -\frac{p}{q}(u,v).$$

Logo $(\lambda u,v) = \lambda(u,v)$ para todo $\lambda \in \mathbb{Q}$.

Consideremos agora $\lambda \in \mathbb{R}$. Seja $(\lambda_n) \in \mathbb{Q}$ uma sequência tal que $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$. Logo

$$\begin{aligned}
(\lambda u, v) &= \frac{1}{2}\left(\|\lambda u + v\|^2 - \|\lambda u\|^2 - \|v\|^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\|\lim_{n\to\infty} \lambda_n u + v\|^2 - \|\lim_{n\to\infty} \lambda_n u\|^2 - \|v\|^2\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\|\lambda_n u + v\|^2 - \|\lambda_n u\|^2 - \|v\|^2\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} (\lambda_n u, v) = \lim_{n\to\infty} \lambda_n (u, v) = \lambda(u, v).
\end{aligned}$$

iv. Juntando tudo temos: $(u, u) = \|u\|^2$. Logo $(u, u) \geq 0$ e $(u, u) = 0$ se, e somente se, $u = 0$. Também vemos que $(u, v) = (v, u)$. Por fim, $u \mapsto (u, v)$ é linear na primeira coordenada. Concluímos que $(\cdot, \cdot)$ é um produto interno.

Exercício 10. Sejam $a < b$ e $c < d$ números reais e $\mathcal{B} = \{e_j :]a, b[\to \mathbb{K} : j \in \mathbb{N}\}$ uma base de Hilbert de $L^2(]a, b[; \mathbb{K})$. Mostre que $\tilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{e}_j :]c, d[\to \mathbb{K} : j \in \mathbb{N}\}$ é uma base de Hilbert de $L^2(]c, d[; \mathbb{K})$, em que

$$\tilde{e}_j(x) = \sqrt{\frac{b-a}{d-c}}\, e_j(a + \frac{b-a}{d-c}(x - c)).$$

Solução:

Vamos provar diretamente pela definição de base de Hilbert: Seja H um espaço de Hilbert. Um conjunto $\mathcal{C} \subset H$ é uma base de Hilbert se $\mathcal{C}$ for ortonormal e se $[\mathcal{C}]$ for denso em H. Lembramos que $[\mathcal{C}]$ é o conjunto das combinações lineares de elementos de $\mathcal{C}$ (combinações lineares é sempre com finitos elementos!).

Afirmação 1: O conjunto $\tilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{e}_j :]c, d[\to \mathbb{K} : j \in \mathbb{N}\}$ é ortonormal.

Basta observar que

$$\int_c^d \tilde{e}_j(x)\tilde{e}_k(x)dx = \frac{b-a}{d-c}\int_c^d e_j(a + \frac{b-a}{d-c}(x-c))e_k(a + \frac{b-a}{d-c}(x-c))dx.$$

Fazendo a mudança de coordenadas $y = a + \frac{b-a}{d-c}(x - c)$, temos $dy = \frac{b-a}{d-c}dx$. Logo

$$\int_c^d \tilde{e}_j(x)\tilde{e}_k(x)dx = \int_a^b e_j(y)e_k(y) = \delta_{jk}.$$

Concluímos, assim, que $\tilde{\mathcal{B}}$ é um conjunto ortonormal.

Afirmação 2: O conjunto $[\tilde{\mathcal{B}}]$ é denso em $L^2(]c, d[; \mathbb{K})$.

Seja $f \in L^2(]c, d[; \mathbb{K})$ e $\varepsilon > 0$. Queremos mostrar que existe um elemento da forma $\sum_{j=1}^N \beta_j \tilde{e}_j \in [\tilde{\mathcal{B}}]$, com $\beta_j \in \mathbb{K}$ e $N \in \mathbb{N}$, tal que

$$\|f - \sum_{j=1}^N \beta_j \tilde{e}_j\|_{L^2(]c,d[;\mathbb{K})} < \varepsilon.$$

Vamos definir $g(x) = f(c + \frac{d-c}{b-a}(x - a))$. Logo $g \in L^2(]a, b[; \mathbb{K})$, pois

$$\int_a^b |g(x)|^2 dx = \int_a^b |f(c + \frac{d-c}{b-a}(x-a))|^2 dx = \frac{b-a}{d-c}\int_a^b |f(y)|^2 dx < \infty.$$

Além disso, como $\mathcal{B}$ é uma base de $L^2(]a, b[; \mathbb{N})$ (e, portanto, $[\mathcal{B}]$ é denso em $L^2(]a, b[; \mathbb{K})$), existe $\sum_{j=1}^N \alpha_j e_j$ tal que

$$\|g - \sum_{j=1}^N \alpha_j e_j\|_{L^2(]a,b[;\mathbb{K})} < \sqrt{\frac{b-a}{d-c}}\varepsilon.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{b-a}{d-c}\varepsilon^2 > \int_a^b |g(x) - \sum_{j=1}^N \alpha_j e_j(x)|^2 dx &= \int_a^b |f(c + \frac{d-c}{b-a}(x-a)) - \sum_{j=1}^N \alpha_j e_j(x)|^2 dx \\ &= \int_a^b |f(y) - \sum_{j=1}^N \alpha_j e_j(a + \frac{b-a}{d-c}(y-c))|^2 \frac{b-a}{d-c} dy \\ &= \int_a^b |f(y) - \sum_{j=1}^N \alpha_j \sqrt{\frac{d-c}{b-a}}\sqrt{\frac{b-a}{d-c}} e_j(a + \frac{b-a}{d-c}(y-c))|^2 \frac{b-a}{d-c} dy \\ &= \int_a^b |f(y) - \sum_{j=1}^N \alpha_j \sqrt{\frac{d-c}{b-a}} \tilde{e}_j(y)|^2 \frac{b-a}{d-c} dy.\end{aligned}$$

Concluímos que

$$\|f - \sum_{j=1}^N \alpha_j \sqrt{\frac{d-c}{b-a}} \tilde{e}_j\|_{L^2(]a,b[;\mathbb{K})} < \varepsilon.$$

Basta agora tomar $\beta_j = \alpha_j \sqrt{\frac{d-c}{b-a}}$.

Exercício 11. i. Mostre que $\mathcal{B}_{\text{comp}} = \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} : n \in \mathbb{Z}\}$ é uma base de Hilbert de $L^2(]-\pi,\pi[;\mathbb{C})$ e que $\mathcal{B}_{\text{s}} = \{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\text{sen}(nx) : n \in \mathbb{N}\}$ é uma base de Hilbert de $L^2(]0,\pi[;\mathbb{K})$.

ii. Mostre que em $[0,\pi]$, temos

$$1 = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}((2n-1)x)}{2n-1},$$

em que o limite é interpretado da forma:

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^\pi \left| 1 - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{N} \frac{\text{sen}((2n+1)x)}{2n+1} \right|^2 dx = 0.$$

iii. Prove que

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Solução:

i. Vimos em sala de aula que $\mathcal{B}_{\text{comp}} = \{(1/\sqrt{2})e^{in\pi x} : n \in \mathbb{Z}\}$ é uma base de Hilbert de $L^2(]-1,1[;\mathbb{C})$ e que $\mathcal{B}_{\text{s}} = \{\sqrt{2}\text{sen}(n\pi x) : n \in \mathbb{N}\}$ é uma base de Hilbert de $L^2(]0,1[;\mathbb{K})$.

Aplicaremos agora a fórmula do exercício anterior, isto é,

$$\tilde{e}_n(x) = \sqrt{\frac{b-a}{d-c}} e_n(a + \frac{b-a}{d-c}(x-c)).$$

Logo

$$\sqrt{\frac{1-(-1)}{\pi-(-\pi)}}\frac{1}{\sqrt{2}} e^{in\pi\left(-1+\frac{1-(-1)}{\pi-(-\pi)}(x-(-\pi))\right)} = \sqrt{\frac{2}{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2}} e^{in\pi\left(-1+\frac{1}{\pi}(x+\pi)\right)} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{inx}$$

e

$$\sqrt{\frac{1-0}{\pi-0}}\sqrt{2}\text{sen}(n\pi(0 + \frac{1-0}{\pi-0}(x-0))) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\text{sen}(nx).$$

Assim, obtemos as bases do enunciado.

ii. Vamos 1 expandir na base $\mathcal{B}_s$. Temos

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\pi \operatorname{sen}(nx)dx = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\cos(nx)}{n}\Big|_0^\pi = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1-\cos(n\pi)}{n}.$$

Agora escrevemos, para $e_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\operatorname{sen}(nx)$, a série

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty}(f,e_n)e_n = \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1-\cos(n\pi)}{n}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\operatorname{sen}(nx) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}((2n+1)x)}{2n+1},$$

em que usamos que $\cos(n\pi) = (-1)^n$. A série converge na norma do espaço de Hilbert. Logo

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^\pi \left|1-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{N}\frac{\operatorname{sen}((2n+1)x)}{2n+1}\right|^2 dx$$
$$= \lim_{N\to\infty}\|1-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{N}\frac{\operatorname{sen}((2n+1)x)}{2n+1}\|^2_{L^2(]0,\pi[;\mathbb{K})} = 0.$$

iii. Basta observar que

$$\|f\|^2_{L^2(]0,\pi[;\mathbb{K})} = \sum_{n=1}^{\infty}|(f,e_n)|^2.$$

Logo, para $f=1$ e $e_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\operatorname{sen}(nx)$, temos

$$\pi = \int_0^\pi 1^2dx = \|f\|^2_{L^2(]0,\pi[;\mathbb{K})} = \sum_{n=1}^{\infty}|(f,e_n)|^2$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left|\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1-\cos(n\pi)}{n}\right|^2 = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n+1)^2}.$$

Portanto,

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Exercício 12. Seja $(E,(.,.))$ um espaço vetorial com produto interno. Dizemos que um conjunto ortonormal $\mathcal{O}\subset E$ é maximal se não estiver estritamente contido em nenhum outro conjunto ortonormal, isto é, se $\tilde{\mathcal{O}}\subset E$ for um conjunto ortonormal e se $\mathcal{O}\subset\tilde{\mathcal{O}}$, então $\mathcal{O}=\tilde{\mathcal{O}}$.

Seja $(H,(.,.))$ um espaço de Hilbert. Mostre que um conjunto $\mathcal{B}$ é uma base de Hilbert se, e somente se, $\mathcal{B}$ for um conjunto ortonormal maximal.

Solução:

Pela definição dada em sala de aula, $\mathcal{B}$ é uma base de Hilbert se, e somente se, $\mathcal{B}$ for um conjunto ortonormal tal que $[\mathcal{B}]$ é denso em H. Lembramos que $[\mathcal{B}]$ é o conjunto de todas as combinações lineares (finitas!) de elementos de $\mathcal{B}$.

Afirmação 1: Se $\mathcal{B}$ é uma base de Hilbert, então $\mathcal{B}$ é um conjunto ortonormal maximal.

Seja $\mathcal{B}$ uma base de Hilbert e $\tilde{\mathcal{B}}\subset H$ um conjunto ortonormal tal que $\mathcal{B}\subset\tilde{\mathcal{B}}$.

Suponha que $\tilde{\mathcal{B}}\neq\mathcal{B}$. Logo existe $u\in\tilde{\mathcal{B}}\backslash\mathcal{B}$. Como $\mathcal{B}$ é uma base de Hilbert, existe uma sequência $(u_j)\in[\mathcal{B}]$ tal que $\lim_{j\to\infty}u_j = u$. Como $\tilde{\mathcal{B}}$ é um conjunto ortonormal e $u\in\tilde{\mathcal{B}}\backslash\mathcal{B}$, então $(u,v)=0$ para todo $v\in\mathcal{B}$. Se $u_j\in[\mathcal{B}]$, então $u_j = \sum_{k=1}^N \alpha_k w_k$, em que $\alpha_j\in\mathbb{K}$ e $w_j\in\mathcal{B}$. Logo

$$(u,u_j) = (u,\sum_{k=1}^N\alpha_k w_k) = \sum_{k=1}^N \alpha_k(u,w_k) = 0.$$

Assim,

$$\|u\|^2 = (u,u) = (u,\lim_{j\to\infty}u_j) = \lim_{j\to\infty}(u,u_j) = 0.$$

Portanto, $\|u\| = 0$. No entanto, como $\tilde{\mathcal{B}}$ é ortonormal, $\|u\|$ deveria ser igual a 1. Concluímos que todo elemento de $\mathcal{B}$ pertence a $\tilde{\mathcal{B}}$, ou seja, $\mathcal{B} = \tilde{\mathcal{B}}$.

Afirmação 2: Se $\mathcal{B}$ é um conjunto ortonormal maximal, então $\mathcal{B}$ é uma base de Hilbert.

Por hipótese, $\mathcal{B}$ é um conjunto ortonormal. Seja $H_0 = \overline{[\mathcal{B}]}$. Logo H_0 é um subespaço fechado. Se $H_0 \neq H$, então $H = H_0 \oplus H_0^\perp$ e $H_0^\perp \neq \{0\}$. Logo existe $u \in H_0^\perp$, $u \neq 0$. Assim, $\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B} \cup \{u\}$ é um conjunto ortonormal que contém $\mathcal{B}$, mas é diferente de $\mathcal{B}$. Logo $\mathcal{B}$ não é um conjunto ortonormal maximal.

Concluímos que se $\mathcal{B}$ for um conjunto ortonormal maximal, então $\overline{[\mathcal{B}]} = H$. Logo $[\mathcal{B}]$ é denso em H. Portanto, $\mathcal{B}$ é uma base de Hilbert.

Exercício 13. Seja $(E, (.,.))$ um espaço vetorial com produto interno e $F \subset E$ um subconjunto não vazio. Suponha que para todo $u \in E$, existam $f \in F$ e $f^\perp \in F^\perp$ tais que $u = f + f^\perp$. Conclua que F é um subespaço fechado de E.

Solução:

Afirmação 1: F é um subespaço vetorial.

Sejam $u, v \in F$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Como $F \subset E$ e E é um espaço vetorial, então $\alpha u + v \in E$. Pelas hipóteses, existem $f \in F$ e $f^\perp \in F^\perp$ tais que $\alpha u + v = f + f^\perp$. Assim,

$$\begin{aligned}
\|f\|^2 + \|f^\perp\|^2 &\overset{(1)}{=} \|f + f^\perp\|^2 = (f + f^\perp, f + f^\perp) = (\alpha u + v, f + f^\perp) \\
&= (\alpha u + v, f) + (\alpha u + v, f^\perp) \overset{(2)}{=} (\alpha u + v, f) = (f + f^\perp, f) \\
&= (f, f) + (f^\perp, f) = (f, f) = \|f\|^2.
\end{aligned}$$

Em (1) usamos Pitágoras, já que $f \perp f^\perp$. Em (2), usamos que $(\alpha u + v, f^\perp) = \alpha(u, f^\perp) + (v, f^\perp) = 0$, já que $u, v \in F$ e $f^\perp \in F^\perp$.

Concluímos que $\|f^\perp\| = 0$. Logo $\alpha u + v = f \in F$. Portanto, F é um subespaço vetorial.

Afirmação 2: F é fechado.

Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em F que converge para $u \in E$. Devemos mostrar que $u \in F$.

Sabemos que $u = f + f^\perp$, com $f \in F$ e $f^\perp \in F^\perp$. Logo

$$\begin{aligned}
\|f\|^2 + \|f^\perp\|^2 &= \|f + f^\perp\|^2 = (f + f^\perp, f + f^\perp) = (u, f + f^\perp) \\
&= (\lim_{n\to\infty} f_n, f + f^\perp) = \lim_{n\to\infty} (f_n, f + f^\perp) = \lim_{n\to\infty} (f_n, f) + \lim_{n\to\infty} (f_n, f^\perp) \\
&= \lim_{n\to\infty} (f_n, f) = (\lim_{n\to\infty} f_n, f) = (u, f) = (f + f^\perp, f) = (f, f) + (f^\perp, f) = (f, f) = \|f\|^2.
\end{aligned}$$

Concluímos assim que $\|f^\perp\| = 0$. Logo $u = f \in F$. Portanto, F é um conjunto fechado.

Exercício 14. Seja $(E, (.,.))$ um espaço vetorial com produto interno. Mostre que se $F \subset E$ é um subespaço vetorial, então $\overline{F}$ também é um subespaço vetorial.

Solução:

Sejam u e v pertencentes a $\overline{F}$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Para mostrar que $\overline{F}$ é um subespaço vetorial, basta mostrar que $\alpha u + v \in \overline{F}$.

Como $u, v \in \overline{F}$, sabemos que existem sequências $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$e $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ que pertencem a F e que $\lim_{j\to\infty} u_j = u$ e $\lim_{j\to\infty} v_j = v$. Desta forma,

$$\|\alpha u + v - \alpha u_j - v_j\| = \|\alpha(u - u_j) + (v - v_j)\| \leq |\alpha|\|u - u_j\| + \|v - v_j\|.$$

Tomando o limite $j \to \infty$, concluímos que $\lim_{j\to\infty} \|\alpha u + v - \alpha u_j - v_j\| = 0$. Logo $\alpha u + v = \lim_{j\to\infty}(\alpha u_j + v_j)$. Sabemos que $\alpha u_j + v_j \in F$, pois F é um subespaço vetorial. Como $\alpha u + v$ é o limite de uma sequência de elementos que pertence a F, concluímos que $\alpha u + v \in \overline{F}$.

Exercício 15. Seja $(H, (.,.))$ um espaço de Hilbert e $F \subset E$ um subconjunto não vazio. Mostre que $F^\perp = [F]^\perp$, $F^{\perp\perp\perp} = F^\perp$ e que $(F^\perp)^\perp = F$ se, e somente se, F for um subespaço vetorial fechado.

Solução:

Afirmação 1: $F^{\perp} = [F]^{\perp}$.

Sabemos que se $u \in F^{\perp}$, então $(u, f) = 0$ para todo $f \in F$. Logo se $f_j \in F$ e $\alpha_j \in \mathbb{K}$ para $j \in \{1, ..., N\}$, então

$$(u, \sum_{j=1}^{N} \alpha_j f_j) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j (u, f_j) = 0.$$

Logo $u \in [F]^{\perp}$. Concluímos que $F^{\perp} \subset [F]^{\perp}$. Por outro lado, $F \subset [F]$. Portanto, $[F]^{\perp} \subset F^{\perp}$, por um resultado das notas de aula (Se $S_1 \subset S_2$, então $S_2^{\perp} \subset S_1^{\perp}$). Juntando as duas inclusões, concluímos que $F^{\perp} = [F]^{\perp}$.

Afirmação 2: $F^{\perp\perp\perp} = F^{\perp}$.

Sabemos que $[F]^{\perp\perp} = \overline{[F]}$, por um resultado das notas de aula. Assim,

$$F^{\perp\perp\perp} \overset{(1)}{=} [F]^{\perp\perp\perp} \overset{(2)}{=} \overline{[F]}^{\perp} \overset{(3)}{=} [F]^{\perp} \overset{(4)}{=} F^{\perp},$$

em que usamos em (1) que $F^{\perp} = [F]^{\perp}$. Em (2) usamos que $S^{\perp\perp} = \overline{S}$ para todo subespaço S de um espaço de Hilbert. Em (3) que $S^{\perp} = (\overline{S})^{\perp}$ para todo subconjunto não vazio de um espaço vetorial com produto interno. Por fim, usamos $F^{\perp} = [F]^{\perp}$ novamente em (4).

Afirmação 3: $(F^{\perp})^{\perp} = F$ *se, e somente se,* F *for um subespaço vetorial fechado.*

Note que $F^{\perp\perp} = [F]^{\perp\perp} = \overline{[F]}$. Logo $(F^{\perp})^{\perp} = F$ se, e somente se $F = \overline{[F]}$.

Se $F = \overline{[F]}$, então F é um subespaço vetorial fechado. Se F é um subespaço vetorial fechado, então $F = [F] = \overline{[F]}$.

Exercício 16. Seja $(H, (.,.))$ um espaço de Hilbert e $M, N \subset H$ dois subespaços fechados. Suponha que $(u, v) = 0$ para todos $u \in M$ e $v \in N$. Mostre que $M + N = \{u + v \in H : u \in M, v \in N\}$ é um subespaço fechado.

Solução:

É simples provar que $M + N$ é um subespaço. Vamos então apenas mostrar que é fechado.

Seja $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M + N$, com $u_n \in M$ e $v_n \in N$, uma sequência que converge para w. Devemos mostrar que $w \in M + N$.

Pelo Teorema de Pitágoras, sabemos que

$$\|u_n - u_m\|^2 + \|v_n - v_m\|^2 = \|u_n + v_n - u_m - v_m\|^2, \tag{0.4}$$

já que $u_n - u_m \perp v_n - v_m$.

Como a sequência $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M + N$ converge, ela é de Cauchy. Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n, m \geq N$, temos

$$\|(u_n + v_n) - (u_m + v_m)\| < \varepsilon.$$

Por (0.4), concluímos que (u_m) e (v_n) também são de Cauchy. Logo convergem, pois H é um espaço de Hilbert. Sejam $u, v \in H$ tais que $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ e $\lim_{n\to\infty} v_n = v$. Como M e N são fechados, concluímos que $u \in M$ e $v \in N$. Assim, $w = \lim_{n\to\infty} u_n + v_n = u + v \in M + N$. Portanto, $M + N$ é um subespaço fechado.

Exercício 17. Seja $(H, (.,.))$ um espaço de Hilbert separável.

i. Seja $V \subset H$ um subespaço denso em H. Prove que V contém uma base ortonormal de H.

ii. Seja $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de vetores ortonormais em H, isto é, $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$. Prove que H contém uma base ortonormal que contém $\cup_{n=1}^{\infty}\{e_n\}$.

Solução:

No enunciado, por uma base ortonormal queremos dizer uma base de Hilbert (e não uma base algébrica). Lembramos que $\mathcal{B} \subset H$ é uma base de Hilbert se $\mathcal{B}$ for ortonormal e $[\mathcal{B}]$ for denso em H.

i. Vimos nas notas de aula que se H é separável e $V \subset H$, então V é separável. Assim, existe um subconjunto enumerável $S = \{v_j : j \in I\} \subset V$, $I = \mathbb{N}$ ou $I = \{1, ..., N\}$, tal que $[S]$ é denso em V (também por um resultado feito em sala de aula).

Eliminando os termos em excesso, podemos supor que S é um conjunto linearmente independente. Assim, usando o processo de Gram-Schmidt, construímos um conjunto ortonormal $\mathcal{B} = \{u_j : j \in I\}$ tal que $[u_1, ..., u_m] = [v_1, ..., v_m]$ para todo $m \in I$.

Vamos agora mostrar que $\mathcal{B}$ é uma base de H. Já sabemos que $\mathcal{B}$ é ortonormal. Além disso, se $u \in H$ e $\varepsilon > 0$, então existe $v \in V$ tal que $\|u - v\| < \frac{\varepsilon}{2}$, pois V é denso em H.

Por outro lado, como $v \in V$, existe $s \in [S]$ tal que $\|v - s\| < \varepsilon/2$, pois $[S]$ é denso em V. Como $s \in [S]$, então $s = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k v_k$. Assim, $s \in [v_1, ..., v_m]$ para algum $m \in \mathbb{N}$. Mas $[u_1, ..., u_m] = [v_1, ..., v_m]$. Logo $s = \sum_{k=1}^{m} \beta_k u_k$. Assim, $s \in [\mathcal{B}]$. Concluímos que existe $s \in [\mathcal{B}]$ tal que

$$\|u - s\| = \|u - v + v - s\| \leq \|u - v\| + \|v - s\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Isto nos mostra que $\mathcal{B}$ é ortonormal e $[\mathcal{B}]$ é denso em H. Logo $\mathcal{B}$ é uma base de Hilbert de H.

ii. Seja $\mathcal{B}_0 = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Consideremos $H_0 = \overline{[\mathcal{B}_0]}$. Logo H_0 é um subespaço fechado de H. Portanto, $H = H_0 \oplus H_0^{\perp}$. Como $H_0^{\perp}$ é um subespaço fechado de H, concluímos que $H_0^{\perp}$ é um espaço de Hilbert separável. Logo existe uma base de Hilbert $\mathcal{B}_1 = \{f_k : j \in I\}$, em que $I = \mathbb{N}$ ou $I = \{1, ..., N\}$, de $H_0^{\perp}$.

Consideremos o conjunto $\mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1$. Este conjunto é ortonormal, pois $\mathcal{B}_0$ e $\mathcal{B}_1$ são ortonormais e os vetores de $\mathcal{B}_0$ são ortogonais aos vetores de $\mathcal{B}_1$.

Vamos agora mostrar que $[\mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1]$ é denso em H. Seja $u \in H$ e $\varepsilon > 0$. Sabemos que $u = u^{//} + u^{\perp}$, $u^{//} \in H_0$ e $u^{\perp} \in H_0^{\perp}$. Seja $u_0 \in [\mathcal{B}_0]$ tal que $\|u^{//} - u_0\| < \varepsilon/2$ e $u_1 \in [\mathcal{B}_1]$ tal que $\|u^{\perp} - u_1\| < \varepsilon/2$. Estes vetores existem, pois $[\mathcal{B}_0]$ e $[\mathcal{B}_1]$ são densos em H_0 e $H_0^{\perp}$, respectivamente. Portanto, temos

$$\begin{aligned}\|u - u_0 - u_1\| &= \|u^{//} + u^{\perp} - u_0 - u_1\| = \|u^{//} - u_0 + u^{\perp} - u_1\| \\ &\leq \|u^{//} - u_0\| + \|u^{\perp} - u_1\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.\end{aligned}$$

Como $u_0 + u_1 \in [\mathcal{B}_0] + [\mathcal{B}_1] = [\mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1]$, concluímos que $[\mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1]$ é denso em H.

Portanto $\mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1$ é uma base de H que contém $\mathcal{B}_0$.

Exercício 18. (Projeção sobre um conjunto convexo. Corresponde ao Teorema 5.2 (Brézis)) Seja $(H, (.,.))$ um espaço de Hilbert real e $K \subset H$ um subconjunto fechado, convexo e não vazio. Lembramos que K é convexo se para todo $u, v \in K$ e $t \in [0, 1]$, temos $tu + (1 - t)v \in K$.

i. Mostre que para todo $f \in H$, existe $u \in K$ tal que

$$\|u - f\| = \inf\{\|v - f\| : v \in K\}.$$

(Dica: Repita o procedimento do teorema de projeção ortogonal: Ache uma sequência $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em K tal que $\lim_{n\to\infty} \|v_n - f\| = \inf\{\|v - f\| : v \in K\}$ e use a lei do paralelogramo para mostrar que a sequência $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy).

ii. Mostre que $u \in K$ é tal que $\|u - f\| = \inf\{\|v - f\| : v \in K\}$ se, e somente se,

$$(f - u, v - u) \leq 0, \quad \forall v \in K.$$

(Dica: Se $u \in K$ é tal que $\|u - f\| = \inf\{\|v - f\| : v \in K\}$, então para todo $w \in K$ e $t \in [0, 1]$, temos $\|f - u\|^2 \leq \|f - ((1 - t)u + tw)\|^2$. Mostre que isto equivale a $2(f - u, w - u) \leq t\|w - u\|^2$ e tome $t \to 0$.

Para mostrar o outro lado, mostre a identidade abaixo.

$$\|u - f\|^2 - \|v - f\|^2 = 2(f - u, v - u) - \|u - v\|^2.)$$

iii. Mostre que o vetor $u \in K$ tal que $\|u - f\| = \inf\{\|v - f\| : v \in K\}$ é único. (Denotamos f por $\mathcal{P}_K u$.)

(Dica: Se u_1 e u_2 satisfazem essa propriedade, então para todo $v \in K$, temos

$$(f - u_1, v - u_1) \leq 0$$
$$(f - u_2, v - u_2) \leq 0$$

Tomando $v = u_2$ na primeira expressão e $v = u_1$ na segunda, some e conclua que $\|u_1 - u_2\|^2 \leq 0$).

Solução:

i. Se $f \in K$, então basta tomar $u = f$. Se $f \notin K$, então definimos $d = \inf_{v\in K} \|f - v\|$. Logo $d > 0$, pois K é fechado. De fato, se d fosse igual a zero, então para todo $\varepsilon > 0$ existiria $v \in K$ tal que $\|f - v\| < \varepsilon$. Assim, poderíamos achar uma sequência $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em K tal que $\|f - v_j\| < \frac{1}{j}$ (basta escolher $\varepsilon = 1/j$ para cada $j \in \mathbb{N}$). Isto claramente implicaria que $\lim_{j\to\infty} v_j = f$. Como K é fechado, então f pertenceria a K, o que é um absurdo. Isto prova que $d > 0$.

Sabemos pela definição de ínfimo de análise real que se $d = \inf_{v\in K} \|f - v\|$, então existe uma sequência $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em K tal que $d \leq \|f - v_j\| < d + \frac{1}{j}$. Assim, essa sequência satisfaz

$$\begin{aligned}\|v_j - v_k\|^2 &= \|(v_j - f) - (v_k - f)\|^2 \\ &\overset{(1)}{=} 2\|v_j - f\|^2 + 2\|v_k - f\|^2 - \|(v_j - f) + (v_k - f)\|^2 \\ &= 2\|v_j - f\|^2 + 2\|v_k - f\|^2 - \|v_j + v_k - 2f\|^2 \\ &= 2\|v_j - f\|^2 + 2\|v_k - f\|^2 - 4\|\frac{v_j + v_k}{2} - f\|^2,\end{aligned}$$

em que usamos a lei do paralelogramo em (1), ou seja, usamos

$$\|a - b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2 - \|a + b\|^2$$

para $a = v_j - f$ e $b = v_k - f$. Note que $(v_j + v_k)/2 \in K$, pois K é um conjunto convexo.

Como $\|f - v\| \geq d$ para todo $v \in K$, tomando $v = \frac{v_j+v_k}{2}$ concluímos que

$$\|v_j - v_k\|^2 \leq 2\|v_j - f\|^2 + 2\|v_k - f\|^2 - 4d^2.$$

Pela construção da sequência $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$, temos $\lim_{j\to\infty} \|v_j - f\|^2 = d^2$, ou seja, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $j \geq N$, então $\|v_j - f\|^2 < d^2 + \varepsilon^2/4$. Assim, se $j, k \geq N$, concluímos que

$$\|v_j - v_k\|^2 < 2(d^2 + \varepsilon^2/4) + 2(d^2 + \varepsilon^2/4) - 4d^2 = \varepsilon^2.$$

A sequência $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é, portanto, uma sequência de Cauchy. Logo converge, já que H é um espaço de Hilbert (Aqui usamos o fato de que H é um espaço de Hilbert!). Seja $u := \lim_{j\to\infty} v_j$. Como $v_j \in K$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e K é fechado, concluímos que $f \in K$. Além disso,

$$\|u - f\| = \|f - \lim_{j\to\infty} v_j\| = \lim_{j\to\infty} \|f - v_j\| = d.$$

ii. Se $u \in K$ é tal que $\|u - f\| = \inf\{\|v - f\| : v \in K\}$, então, para todo $w \in K$ e $t \in [0, 1]$, temos $\|f - u\|^2 \leq \|f - ((1 - t)u + tw)\|^2$, já que $(1 - t)u + tw \in K$, pois K é convexo.

Assim,

$$\begin{aligned}\|f - u\|^2 &\leq (f - (1 - t)u - tw, f - (1 - t)u - tw) \\ &\leq (f - u + t(u - w), f - u + t(u - w)) \\ &\leq \|f - u\|^2 + 2t(f - u, u - w) + t^2\|u - w\|^2.\end{aligned}$$

Logo

$$2t(f - u, u - w) + t^2\|u - w\|^2 \geq 0 \iff t^2\|u - w\|^2 \geq 2t(f - u, w - u).$$

Assim,

$$2(f - u, w - u) \leq t\|u - w\|^2.$$

Tomando $t \to 0^+$, concluímos que $(f - u, w - u) \leq 0$, para todo $w \in K$.

Por outro lado, vemos que

$$\begin{aligned}&2(f - u, v - u) - \|u - v\|^2 = 2(f, v) - 2(f, u) - 2(u, v) + 2\|u\|^2 - \|u\|^2 + 2(u, v) - \|v\|^2 \\ &= 2(f, v) - 2(f, u) + \|u\|^2 - \|v\|^2\end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned}&\|u - f\|^2 - \|v - f\|^2 = \|u\|^2 - 2(u, f) + \|f\|^2 - \|v\|^2 + 2(v, f) - \|f\|^2 \\ &= \|u\|^2 - 2(u, f) - \|v\|^2 + 2(v, f)\end{aligned}$$

Assim, se $(f-u, w-u) \leq 0$, temos

$$\|u-f\|^2 - \|v-f\|^2 = 2(f-u, v-u) - \|u-v\|^2 \leq 0.$$

Logo $\|u-f\|^2 \leq \|v-f\|^2$ para todo $v \in K$. Logo $\|u-f\| = \inf\{\|v-f\| : v \in K\}$.

iii. Basta observar que se u_1 e u_2 satisfazem a condição, então por ii, temos

$$(f-u_1, v-u_1) \leq 0$$
$$(f-u_2, v-u_2) \leq 0$$

para todo $v \in K$. Tomando $v = u_2$ na primeira expressão e $v = u_1$ na segunda, concluímos que

$$(f-u_1, u_2-u_1) \leq 0$$
$$(f-u_2, u_1-u_2) \leq 0$$

Somando, temos

$$(f-u_1, u_2-u_1) - (f-u_2, u_2-u_1) \leq 0.$$

Logo

$$-(u_1, u_2-u_1) + (u_2, u_2-u_1) \leq 0 \iff (u_2-u_1, u_2-u_1) \leq 0.$$

Como a norma é sempre não negativa, concluímos que $\|u_1-u_2\|^2 = 0$ e $u_1 = u_2$.

Exercício 19. Seja $(H, (.,.))$ um espaço de Hilbert real, $K \subset H$ um fechado convexo não vazio, $f \in H$ e $u = \mathcal{P}_K f$.

i. Mostre que

$$\|v-u\|^2 \leq \|v-f\|^2 - \|u-f\|^2, \quad \forall v \in K.$$

ii. Mostre que $\|u-v\| \leq \|v-f\|$, para todo $v \in K$. Dê uma interpretação geométrica.

Solução:

i. Sabemos que

$$\|u-f\| = \inf\{\|v-f\| : v \in K\}$$

e que

$$(f-u, v-u) \leq 0, \quad \forall v \in K.$$

Logo

$$\begin{aligned}
\|v-u\|^2 &= \|v-f+f-u\|^2 = (v-f+f-u, v-f+f-u) \\
&= \|v-f\|^2 + \|f-u\|^2 + 2(v-f, f-u) \\
&= \|v-f\|^2 + \|f-u\|^2 + 2(f-u, v-u+u-f) \\
&= \|v-f\|^2 + \|f-u\|^2 + 2(f-u, v-u) + 2(f-u, u-f) \\
&= \|v-f\|^2 - \|f-u\|^2 + 2(f-u, v-u) \leq \|v-f\|^2 - \|f-u\|^2
\end{aligned}$$

ii. Suponha que exista $v \in K$ tal que

$$\|u-v\| > \|v-f\|.$$

Logo

$$\|u-f\|^2 \leq \|v-f\|^2 - \|u-v\|^2 < 0.$$

Isto claramente é um absurdo, pois a norma é sempre não negativa.

Exercício 20. Seja $(E, (.,.))$ um espaço com produto interno e $F \subset E$ um subespaço. Mostre que $u \in F^\perp$ se, e somente se, $\|u-v\| \geq \|v\|$ para todo $v \in F$.

Solução:

$(\implies)$ Suponha que $u \in F^\perp$ e $v \in F$. Então, por Pitágoras, temos

$$\|u-v\| = \sqrt{\|u\|^2 + \|v\|^2} \geq \|v\|.$$

$(\Longleftarrow)$

Suponha que $u \in E$ seja tal que $\|u-v\| \geq \|v\|$ para todo $v \in F$. Então

$$\|u-v\|^2 \geq \|v\|^2,$$

ou seja,

$$(u,u)-(u,v)-(v,u)+(v,v)\geq(v,v) \iff (u,u)\geq \operatorname{Re}(u,v), \quad \forall v\in F.$$

Se $(u,v)\neq 0$ para algum $v\in F$, então $u\neq 0$. Além disso, $2\frac{(u,u)}{(v,u)}v\in F$ é tal que

$$\operatorname{Re}(u,2\frac{(u,u)}{(v,u)}v)=\operatorname{Re}\left(2\frac{(u,u)}{(u,v)}(u,v)\right)=\operatorname{Re}\left(2(u,u)\right)=2(u,u)>(u,u).$$

Obtemos assim uma contradição, pois deveríamos ter $(u,u)\geq \operatorname{Re}(u,2\frac{(u,u)}{(v,u)}v)$. Assim, $(u,v)=0$ para todo $v\in F$, ou seja, $u\in F^{\perp}$.

Exercício 21. Seja $(E,(.,.))$ um espaço com produto interno e $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência em E. Mostre que $\lim_{j\to\infty}u_j=u$ se, e somente se, $\lim_{j\to\infty}(u_j,u)=\|u\|^2$ e $\lim_{j\to\infty}\|u_j\|=\|u\|$.

Solução:

($\Longrightarrow$) Suponha que $\lim_{j\to\infty}u_j=u$. Neste caso, temos

$$\lim_{j\to\infty}(u_j,u)=(\lim_{j\to\infty}u_j,u)=(u,u)=\|u\|^2$$

e

$$\lim_{j\to\infty}\|u_j\|=\lim_{j\to\infty}\sqrt{(u_j,u_j)}=\sqrt{\lim_{j\to\infty}(u_j,u_j)}=\sqrt{(\lim_{j\to\infty}u_j,\lim_{j\to\infty}u_j)}=\sqrt{(u,u)}=\|u\|.$$

($\Longleftarrow$) Suponha que $\lim_{j\to\infty}(u_j,u)=\|u\|^2$ e $\lim_{j\to\infty}\|u_j\|=\|u\|$. Neste caso,

$$\begin{aligned}(u-u_j,u-u_j)&=(u,u)-(u,u_j)-(u_j,u)+(u_j,u_j)=(u,u)-\overline{(u_j,u)}-(u_j,u)+\|u_j\|^2\\ &\overset{j\to\infty}{\longrightarrow}(u,u)-\overline{\|u\|^2}-\|u\|^2+\|u\|^2=0.\end{aligned}$$

Logo $\lim_{j\to\infty}\|u-u_j\|=0$, ou seja, $\lim_{j\to\infty}u_j=u$.

Exercício 22. Sejam $(H,(.,.))$ um espaço de Hilbert e $T:H\to H$ um operador linear contínuo. Suponha que exista uma constante $C>0$ tal que $\|Tu\|\geq C\|u\|$ para todo $u\in H$. Conclua que a imagem de T é um subespaço fechado.

Solução:

Seja $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $T(H)$ ($T(H)$ denota a imagem de T) tal que $\lim_{j\to\infty}v_j=v$. Nosso objetivo é mostrar que v também pertence a $T(H)$.

Como $v_j\in T(H)$, então existe uma sequência $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em H que satisfaz $Tu_j=v_j$ para todo j. Como $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge, então ela é uma sequência de Cauchy. Assim, dado $\varepsilon>0$, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $\|v_j-v_k\|<\frac{\varepsilon}{C}$ para todo $j,k\geq N$, em que $C>0$ é a constante do enunciado. Desta forma, vemos que

$$\|u_j-u_k\|\leq\frac{1}{C}\|Tu_j-Tu_k\|=\frac{1}{C}\|v_j-v_k\|<C\frac{\varepsilon}{C}=\varepsilon,$$

para todo $j,k\geq N$. Concluímos que (u_j) também é uma sequência de Cauchy. Logo existe $u\in H$ tal que $u=\lim_{j\to\infty}u_j$. Assim,

$$Tu=\lim_{j\to\infty}Tu_j=\lim_{j\to\infty}v_j=v.$$

Portanto, $v\in T(H)$.

Exercício 23. Sejam $(E,(.,.)_E)$ e $(F,(.,.)_F)$ dois espaços com produto interno e $T:E\to F$ uma transformação linear bijetora tal que $T^{-1}:F\to E$ é contínua. Mostre que existe uma constante $C>0$ tal que $\|Tu\|_F\geq C\|u\|_E$ para todo $u\in E$.

Solução:

Como T^{-1} é contínua, existe uma constante $C>0$ tal que $\|T^{-1}v\|_E\leq C\|v\|_F$ para todo $v\in F$. Seja $u\in E$. Assim, aplicado a desigualdade anterior para $v=Tu$, concluímos que

$$\|u\|_E=\|T^{-1}Tu\|_E=\|T^{-1}v\|_E\leq C\|v\|_F=C\|Tu\|_F.$$

Exercício 24. Seja $(H, (.,.))$ um espaço de Hilbert e $T : H \to H$ um operador linear contínuo. Mostre que as seguintes propriedades são equivalentes:

i. Existe uma constante $C > 0$ tal que $\|Tu\|_H \geq C\|u\|_H$ para todo $u \in H$.

ii. Existe um operador linear contínuo $S : H \to H$ tal que $STu = u$ para todo $u \in H$.

Solução:

i. $\Longrightarrow$ *ii.*

Inicialmente observamos que a transformação linear $T : H \to T(H)$ é contínua, pois T é contínua. Ela é injetora, pois se $Tu = 0$, então $\|u\|_H \leq \frac{1}{C}\|Tu\|_H = 0$. Logo $u = 0$. Ela é sobrejetora, pois estamos considerando $T(H)$ como o contradomínio. Assim, T é bijetora. A inversa $T^{-1} : T(H) \to H$ é contínua, pois

$$\|T^{-1}u\|_H \leq \frac{1}{C}\|TT^{-1}u\|_H \leq \frac{1}{C}\|u\|_H.$$

Agora, observamos que a imagem $T(H)$ é fechada, pelo exercício 22. Logo, pelo Teorema da decomposição ortogonal, sabemos que $H = T(H) \oplus T(H)^{\perp}$. Seja $P : H \to T(H)$ a projeção ortogonal no espaço $T(H)$. Vamos definir $S : H \to H$ como $Su = T^{-1}Pu$. Logo S é linear e contínua, pois é composição de $T^{-1} : T(H) \to H$ e $P : H \to T(H)$. Além disso,

$$STu = T^{-1}PTu = T^{-1}Tu = u,$$

pois $Tu \in T(H)$. Isto conclui a demonstração.

ii. $\Longrightarrow$ *i.*

Suponha que exista uma função S como no enunciado. Logo

$$\|u\| = \|STu\| \leq C\|Tu\|, \quad \forall u \in H,$$

pois S é contínua.

Exercício 25. Seja $(H, (.,.))$ um espaço de Hilbert e $f : H \to H$ uma função sobrejetora tal que $(f(u), f(v)) = (u, v)$. Mostre que

i. A função f é bijetora.

ii. $(f^{-1}(u), f^{-1}(v)) = (u, v)$.

iii. $(f(u), v) = (u, f^{-1}(v))$.

iv. f é linear e, portanto, um operador unitário.

Solução:

i. Basta mostrar que f é injetora. Se $f(u) = f(v)$, então

$$\begin{aligned}
0 &= \|f(u) - f(v)\|^2 = (f(u) - f(v), f(u) - f(v)) \\
&= (f(u), f(u)) - (f(u), f(v)) - (f(v), f(u)) + (f(v), f(v)) \\
&= (u, u) - (u, v) - (v, u) + (v, v) = (u - v, u - v) = \|u - v\|^2.
\end{aligned}$$

Logo $u = v$.

ii. Basta observar que

$$(u, v) = (f(f^{-1}(u)), f(f^{-1}(v))) = (f^{-1}(u), f^{-1}(v)).$$

iii. Basta observar que

$$(f(u), v) = (f(u), f(f^{-1}(v))) = (u, f^{-1}(v)).$$

iv. Usando o item iii. vemos que

$$\begin{aligned}
(f(\alpha u_1 + v_1), v) &= (\alpha u_1 + v_1, f^{-1}(v)) = \alpha(u_1, f^{-1}(v)) + (v_1, f^{-1}(v)) \\
&= \alpha(f(u_1), v) + (f(v_1), v) = (\alpha f(u_1) + f(v_1), v).
\end{aligned}$$

Como $(f(\alpha u_1 + v_1), v) = (\alpha f(u_1) + f(v_1), v)$ para todo $v \in H$, concluímos que $f(\alpha u_1 + v_1) = \alpha f(u_1) + f(v_1)$.

Exercício 26. Sejam $(E, (.,.))$ um espaço com produto interno e $T : E \to E$ uma transformação linear. Prove que $T : E \to E$ é uma transformação linear unitária se, e somente se, valem as seguintes propriedades:

i. T é bijetora.
ii. $\|Tu\| = \|u\|$, para todo $u \in E$.

(Dica: Use as identidades de polarização do exercício 3).
Solução:
($\Longrightarrow$) Suponha que T seja unitária. Logo
i. É imediato, pela definição de operador unitário.
ii. Segue de $\|Tu\| = \sqrt{(Tu, Tu)} = \sqrt{(u, u)} = \|u\|$.
($\Longleftarrow$) Suponha que os itens i. e ii. sejam satisfeitos.
A propriedade i. nos diz que T é bijetora.
A propriedade ii. nos mostra que se E for real, então, pelas identidades de polarização, temos

$$\begin{aligned}(Tu, Tv) &= \frac{1}{4}\left(\|Tu + Tv\|^2 - \|Tu - Tv\|^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\|T(u + v)\|^2 - \|T(u - v)\|^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2\right)\\ &= (u, v).\end{aligned}$$

para todo $u, v \in E$.
Por outro lado, se E for complexo, então

$$\begin{aligned}(Tu, Tv) &= \frac{1}{4}\left(\|Tu + Tv\|^2 - \|Tu - Tv\|^2 + i\|Tu + iTv\|^2 - i\|Tu - iTv\|^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\|T(u + v)\|^2 - \|T(u - v)\|^2 + i\|T(u + iv)\|^2 - i\|T(u - iv)\|^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 + i\|u + iv\|^2 - i\|u - iv\|^2\right)\\ &= (u, v).\end{aligned}$$

Exercício 27. Seja E um espaço com produto interno e $T, S : E \to E$ operadores autoadjuntos limitados.

i. Mostre que TS é autoadjunto se, e somente se, $TS = ST$.
ii. Mostre que se T for invertível e $T^{-1} : E \to E$ for limitado, então T^{-1} também é autoadjunto.

Solução:
i. Como T e S são autoadjuntos, concluímos que

$$(TSu, v) = (Su, Tv) = (u, STv).$$

Sabemos que TS é autoadjunto se, e somente se, $(TSu, v) = (u, TSv)$. Pelo que vimos acima, isso ocorre se, e somente se, $(u, STv) = (u, TSv)$ para todo $u, v \in H$. Logo $TS = ST$.
ii. Sejam $u, v \in E$. Como T é bijetora, existem u_1 e v_1 em E tais que $Tu_1 = u$ e $Tv_1 = v$. Assim,

$$(T^{-1}u, v) = (T^{-1}Tu_1, Tv_1) = (u_1, Tv_1) = (Tu_1, v_1) = (u, v_1) = (u, T^{-1}v).$$

Exercício 28. Seja E um espaço com produto interno. Mostre que se $T, S : E \to E$ são unitários, então TS e T^{-1} também são unitários.

Solução:
Claramente TS e T^{-1} são bijetores.
Além disso,

$$(TSu, TSv) \overset{(1)}{=} (Su, Sv) \overset{(2)}{=} (u, v).$$

Em (1) usamos que T é unitário. Em (2) usamos que S é unitário.

Sejam $u, v \in E$. Como T é bijetor, existem $u_1, v_1 \in E$ tais que $Tu_1 = u$ e $Tv_1 = v$. Logo

$$(T^{-1}u, T^{-1}v) = (T^{-1}Tu_1, T^{-1}Tv_1) = (u_1, v_1) \overset{(1)}{=} (Tu_1, Tv_1) = (u, v).$$

Em (1), usamos que T é unitário.

Exercício 29. Seja E um espaço vetorial e $T : E \to E$ um operador unitário. Mostre que nessas condições, as seguintes propriedades são equivalentes:
Propriedade 1) $T^2 = I$, em que $I : E \to E$ é a identidade ($Iu = u$, para todo $u \in E$).
Propriedade 2) T é autoadjunto.

Solução:
1) $\implies$ 2) Se $T^2 = I$ e T é unitário, então

$$(Tu, v) = (Tu, Iv) = (Tu, TTv) = (u, Tv),$$

para todo $u, v \in E$. Logo T é autoadjunta.
2) $\implies$ 1) Se T é autoadjunta e unitária, então

$$(u, v) = (Tu, Tv) = (u, T^2v).$$

Logo $(u, v) = (u, T^2v)$ para todo u e v. Isto implica que $v = T^2v$ para todo v. Portanto, $T^2 = I$.

Exercício 30. Considere o operador $H : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $\mathcal{X} = \{f \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}); \mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})\}$, definido como

$$Hf(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} g(\xi) \hat{f}(\xi) d\xi,$$

em que $g(\xi) = 1$, se $\xi \geq 0$, e $g(\xi) = -1$, se $\xi < 0$. Lembre-se que $\hat{f} = \mathcal{F}f$. Mostre que existe uma única extensão de H como um operador unitário autoadjunto em $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$. Este operador é chamado de *transformada de Hilbert* e aparece em análise harmônica, por exemplo.

Solução: Seja $M_g : L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \to L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ definido como $M_g f = gf$. Esta função é autoadjunta, pois

$$(M_g f, h) = \int_{\mathbb{R}} M_g f(x) \overline{h(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} g(x) f(x) \overline{h(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x) h(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{M_g h(x)} dx = (f, M_g h).$$

Observamos que o operador H pode ser escrito como $Hf = \mathcal{F}^{-1} M_g \mathcal{F} f$ para todo $f \in \mathcal{X}$. Claramente, podemos estender H para todo $f \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, já que $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}^{-1}$ possuem únicas extensões contínuas em $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$. Vamos mostrar que esta extensão é autoadjunta. Para tanto, lembramos que $\mathcal{F}$ é unitário. Assim, se $f, h \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, então

$$\begin{aligned}(Hf, g) &= (\mathcal{F}^{-1} M_g \mathcal{F} f, g) = (\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} M_g \mathcal{F} f, \mathcal{F} g) = (M_g \mathcal{F} f, \mathcal{F} g) \\ &= (\mathcal{F} f, M_g \mathcal{F} g) = (\mathcal{F} f, \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} M_g \mathcal{F} g) = (f, \mathcal{F}^{-1} M_g \mathcal{F} g) = (f, Hg).\end{aligned}$$

Exercício 31. Pode-se mostrar que a transformada de Fourier $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \to L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ é dada por

$$\mathcal{F}f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x) dx,$$

sempre que f pertencer a $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \cap L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$.
i. Usando este fato, calcule a transformada de Fourier da função χ_a, definida como a função dada por $\chi_a(x) = 1$, se $|x| \leq a$, e $\chi_a(x) = 0$, se $|x| > a$, em que $a > 0$ é fixo.
ii. Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(ax) \operatorname{sen}(bx)}{x^2} dx = \pi \min\{a, b\}.$$

(Dica: $\mathcal{F}$ é unitária).

Solução:
i.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(\chi_a\right)(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}\chi_a(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} e^{-ix\xi}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left.\frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi}\right|_{-a}^{a} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2}{\xi}\frac{e^{ia\xi}-e^{-ia\xi}}{2i} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{\text{sen}(a\xi)}{\xi}.\end{aligned}$$

ii. Usaremos que $\mathcal{F}$ é uma transformação unitária. Logo $(\mathcal{F}u, \mathcal{F}v) = (u, v)$ para toda função $u, v \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$. Assim,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{\text{sen}(a\xi)}{\xi}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{\text{sen}(b\xi)}{\xi}d\xi = \int_{-\infty}^{\infty}\chi_a(x)\chi_b(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\chi_{\min\{a,b\}}(x)dx = 2\min\{a, b\}.$$

Usamos, acima, que pela definição $\chi_a(x)\chi_b(x) = 0$ para $|x| < \min\{a, b\}$ e é igual a 1 para $|x| > \min\{a, b\}$. Logo $\chi_a(x)\chi_b(x) = \chi_{\min\{a,b\}}(x)$. Concluímos que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\text{sen}(ax)\text{sen}(bx)}{x^2}dx = \pi\min\{a, b\}.$$

Exercício 32. Para cada uma das transformações lineares abaixo verifique que $(Tu, Tv) = (u, v)$, para todo u, v. Quais são operadores unitários?

i. $T : L^2(0, \infty) \to L^2(0, \infty)$ dado por $Tf(t) = f(t-1)$ se $t \geq 1$ e $Tf(t) = 0$ se $t \in [0, 1[$.
ii. $T : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ dado por $Tf(t) = f(t-1)$.
iii. $T : l^2(\mathbb{N}) \to l^2(\mathbb{N})$ dado por $T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ...) = (0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ...)$.

Solução:
i. Basta observar que

$$(Tu, Tv) = \int_0^{\infty} Tu(t)Tv(t)dt = \int_1^{\infty} u(t-1)v(t-1)dt = \int_0^{\infty} u(t)v(t)dt = (u, v).$$

A função T não é unitária. Considere a função $g(t) = 1$, se $t \in [0, 1[$, e $g(t) = 0$, se $t \notin [0, 1[$. Logo $g \in L^2(0, \infty)$. No entanto, g não está na imagem de T, pois todas as funções na imagem de T são iguais a zero em $[0, 1[$. Portanto, T não é sobrejetora. Logo T não é unitária.

ii. Basta observar que

$$(Tu, Tv) = \int_{-\infty}^{\infty} Tu(t)Tv(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(t-1)v(t-1)dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t)dt = (u, v).$$

Por outro lado, dado $g \in L^2(\mathbb{R})$, definimos $f \in L^2(\mathbb{R})$ por $f(t) = g(t+1)$. Logo $Tf = g$. Assim, T é sobrejetor. T é injetor, pois $Tu = 0$ implica que $0 = (Tu, Tu) = (u, u)$, ou seja, $u = 0$. Concluímos que T é unitário.

iii. Basta observar que se $u = (u_1, u_2, u_3, ...)$ e $v = (v_1, v_2, v_3, ...)$, temos

$$(Tu, Tv) = ((0, u_1, u_2, u_3, ...), (0, v_1, v_2, v_3, ...)) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k = (u, v).$$

Note, no entanto, que o vetor $v = (1, 0, 0, ...)$ não pertence a imagem de T, pois a primeira componente dos vetores na imagem de T são iguais a zero. Logo T não é sobrejetora, portanto, não é unitária.

Exercício 33. Seja H um espaço de Hilbert real e $T : H \to H$ um operador linear limitado.

i. Mostre que para cada $v \in H$ fixo, a função $u \in H \mapsto (Tu, v)$ é um funcional linear.
ii. Conclua que existe um único $w \in H$ tal que $(Tu, v) = (u, w)$ para todo $u \in H$. (Dica: Use o Teorema de Riesz-Fischer).

Vamos definir a função $T^* : H \to H$ que associa a cada $v \in H$ o único elemento $w \in H$ tal que $(Tu, v) = (u, w)$, para todo $u \in H$. Ou seja, defina $T^*v = w$.

iii. Mostre que T^* é linear, contínua e é tal que $(Tu, v) = (u, T^*v)$ para todo $u, v \in H$.

O operador T^* é chamado de *operador adjunto de* T.

Solução:
Seja $F_v : H \to \mathbb{R}$ a função $F_v(u) = (Tu, v)$.
i. A função é linear, pois

$$F_v(\alpha u + \beta w) = (T(\alpha u + \beta w), v) = \alpha(Tu, v) + \beta(Tw, v) = \alpha F_v(u) + \beta F_v(w).$$

Ela é contínua, pois

$$|F_v(u)| = |(Tu, v)| \leq \|Tu\|\|v\| \leq (\|T\|\|v\|)\|u\|.$$

ii. Como visto no item i, a função F_v é um funcional linear contínuo. Logo, pelo Teorema de Riesz-Fischer, existe um único $w \in H$ tal que $F_v(u) = (u, w)$, ou seja,

$$(Tu, v) = F_v(u) = (u, w), \quad \forall u \in H.$$

iii. Seja $T^* : H \to H$ definido como $T^*v = w$, em que $F_v(u) = (Tu, v) = (u, w)$ para todo $u \in H$.
Assim, é claro pela definição que $(Tu, v) = (u, T^*v)$ para todo $u, v \in H$.
O operador T^* é linear.
Vemos que

$$\begin{aligned}(u, \alpha T^*v_1 + \beta T^*v_2) &= \alpha(u, T^*v_1) + \beta(u, T^*v_2) \\ &= \alpha(Tu, v_1) + \beta(Tu, v_2) = (Tu, \alpha v_1 + \beta v_2) = (u, T^*(\alpha v_1 + \beta v_2)).\end{aligned}$$

Logo

$$(u, T^*(\alpha v_1 + \beta v_2) - \alpha T^*v_1 + \beta T^*v_2) = 0$$

para todo $u \in H$. Logo $T^*(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha T^*v_1 + \beta T^*v_2$.
O operador T^* é contínuo.
Basta observar que

$$\|T^*v\|^2 = |(T^*v, T^*v)| = |(TT^*v, v)| \leq \|TT^*v\|\|v\| \leq \|T\|\|T^*v\|\|v\|.$$

Se $T^*v \neq 0$, então dividimos tudo por $\|T^*v\|$ e concluímos que

$$\|T^*v\| \leq \|T\|\|v\|.$$

Se $T^*v = 0$, então $\|T^*v\| \leq \|T\|\|v\|$ vale também, pois $0 \leq \|T\|\|v\|$. Assim, T^* é contínuo e $\|T^*\| \leq \|T\|$.

Exercício 34. Seja H um espaço de Hilbert real e $T, S : H \to H$ operadores lineares limitados.
i. Mostre que $(\alpha T + \beta S)^* = \alpha T^* + \beta S^*$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
ii. Mostre que $(T^*)^* = T$.
iii. Mostre que $(TS)^* = S^*T^*$.
iv. Mostre que $I^* = I$, em que I é a identidade.
v. Mostre que se T for bijetora com inversa contínua, então $T^* : H \to H$ também é bijetora com inversa contínua e $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Solução:
i. Sejam $u, v \in H$. Logo

$$(u, \alpha T^*v + \beta S^*v) = \alpha(u, T^*v) + \beta(u, S^*v) = \alpha(Tu, v) + \beta(Su, v) = ((\alpha T + \beta S)u, v) = (u, (\alpha T + \beta S)^*v).$$

Logo $(u, \alpha T^*v + \beta S^*v) = (u, (\alpha T + \beta S)^*v)$ para todo $u, v \in H$. Portanto, $\alpha T^* + \beta S^* = (\alpha T + \beta S)^*$.
ii. Sejam $u, v \in H$. Logo

$$(u, (T^*)^*v) = (T^*u, v) = (v, T^*u) = (Tv, u) = (u, Tv).$$

Como isto vale para todo $u, v \in H$, temos $T = (T^*)^*$.
iii. Sejam $u, v \in H$. Logo

$$(u, (TS)^*v) = (TSu, v) = (Su, T^*v) = (u, S^*T^*v).$$

Como isto vale para todo $u, v \in H$, temos $(TS)^* = S^*T^*$.

iv. Basta observar que

$$(u, I^*v) = (Iu, v) = (u, v) = (u, Iv).$$

Como isto vale para todo $u, v \in H$, temos $I^* = I$.

v. $(TT^{-1})^* = (T^{-1})^*T^*$.

Sabemos que $TT^{-1} = T^{-1}T = I$. Tomando o adjunto, concluímos que

$$(TT^{-1})^* = (T^{-1}T)^* = I^*.$$

Usando o item iii. e iv., concluímos que

$$(T^{-1})^*T^* = T^*(T^{-1})^* = I.$$

Isto mostra que $(T^{-1})^*$ é a inversa de T^*, ou seja, $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

Exercício 35. Seja H um espaço de Hilbert real e $T : H \to H$ um operador linear limitado.

i. Mostre que T é autoadjunto se, e somente se, $T = T^*$.

ii. Mostre que T é unitário se, e somente se, T é inversível e $T^{-1} = T^*$.

iii. Mostre que T é uma projeção ortogonal se, e somente se, $T^2 = T$ e $T = T^*$.

Solução:

Usaremos sempre que $(Tu, v) = (u, T^*v)$ para todo $u, v \in H$.

i. Se T for autoadjunto, então $(Tu, v) = (u, Tv)$. Como $(Tu, v) = (u, T^*v)$, concluímos que $(u, T^*v) = (u, Tv)$ para todo $u, v \in H$, ou seja, $(u, T^*v - Tv) = 0$. Fixemos $v \in H$, definimos $u = T^*v - Tv$. Logo $\|T^*v - Tv\|^2 = (u, T^*v - Tv) = 0$. Portanto $T^*v - Tv = 0$ para todo v. Isto implica que $T^* = T$.

Por outro lado, se $T^* = T$, então $(Tu, v) = (u, T^*v) = (u, Tv)$ para todo $u, v \in H$. Logo T é autoadjunto.

ii. Se T é unitário, então T é bijetor. Assim, T é inversível. Seja T^{-1} a inversa de T. Logo

$$(Tu, v) = (Tu, TT^{-1}v) = (u, T^{-1}v).$$

Como $(Tu, v) = (u, T^*v)$, concluímos que $(u, T^{-1}v) = (u, T^*v)$ para todo $u, v \in H$. Logo $T^* = T^{-1}$.

Por outro lado, se $T^{-1} = T^*$, então T é inversível e

$$(Tu, Tv) = (u, T^*Tv) = (u, T^{-1}Tv) = (u, v).$$

Logo T é unitário.

iii. Se T é uma projeção ortogonal, então $T^2 = T$ e T é autoadjunto. Pelo item i, isto é o mesmo que dizer que $T^2 = T$ e $T^* = T$.

Exercício 36. Seja H um espaço de Hilbert real e $T : H \to H$ um operador limitado. Seja $B : H \times H \to \mathbb{R}$ a função dada por $B(u, v) = (Tu, v)$.

i. Mostre que B é bilinear contínua.

ii. Mostre que B é coerciva se, e somente se, existir $C > 0$ tal que $(Tu, u) \geq C$, para todo $\|u\| = 1$.

iii. Por Lax-Milgram, se B for coerciva, existe um único operador linear limitado e bijetor $S : H \to H$ tal que $B(u, v) = (u, Sv)$. Esse operador foi estudado nos exercícios anteriores. Quem é ele?

Solução:

i. A bilinearidade da função segue facilmente do fato de que o produto interno é bilinear e a função T ser uma transformação linear.

A continuidade segue de

$$|B(u, v)| = |(Tu, v)| \leq \|Tu\|\|v\| \leq \|T\|\|u\|\|v\|.$$

ii. ($\Longrightarrow$) Suponha que B seja coerciva e $\|u\| = 1$. Logo existe $\alpha > 0$ tal que $(Tu, u) = B(u, u) \geq \alpha\|u\|^2 = \alpha$.

($\Longleftarrow$) Suponha que exista $C > 0$ tal que $(Tu, u) \geq C$ para todo $\|u\| = 1$. Seja $u \neq 0$. Logo

$$B(u, u) = B\left(\|u\|\frac{u}{\|u\|}, \|u\|\frac{u}{\|u\|}\right) = \|u\|^2 B\left(\frac{u}{\|u\|}, \frac{u}{\|u\|}\right) = \|u\|^2\left(T\frac{u}{\|u\|}, \frac{u}{\|u\|}\right) \geq C\|u\|^2.$$

Se $u = 0$, então $B(u,u) \geq C\|u\|^2$ é trivial, pois ambas as partes são iguais a zero. Assim, B é coerciva.

iii. Por Lax-Milgram $B(u,v) = (u, Sv)$. Assim, $(Tu, v) = B(u,v) = (u, Sv)$. Logo S é o operador adjunto de T.

Exercício 37. Seja $H = l_2(\mathbb{N})$ o espaço real das sequências em $\mathbb{R}$ de quadrado integrável e $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $|\lambda| < 1$.

i. Mostre que $L : l_2(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ dado por $L(\alpha_1, \alpha_2, ...) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^j \alpha_j$ é um funcional linear contínuo.

ii. Ache $v \in l_2(\mathbb{N})$ tal que $(u,v) = Lu$ para todo $u \in l_2(\mathbb{N})$ e calcule a norma $\|L\|_{H^*}$.

Solução:

Seja $v = (\lambda, \lambda^2, \lambda^3, ...)$. Logo

$$\|v\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{2j}} = \sqrt{\lambda^2 \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{2j}} = \lambda \sqrt{\sum_{j=0}^{\infty} (\lambda^2)^j} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} < \infty.$$

Assim, $v \in l^2(\mathbb{N})$.

Agora observamos que se $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ...) \in l_2(\mathbb{N})$, então

$$L(\alpha) = L(\alpha_1, \alpha_2, ...) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^j \alpha_j = ((\alpha_1, \alpha_2, ...), (\lambda, \lambda^2, ...)) = (\alpha, v).$$

Assim,

$$|L(\alpha)| = |(\alpha, v)| \leq \|\alpha\| \|v\|.$$

Portanto, L é um funcional linear contínuo. (A linearidade deixamos a cargo do leitor).

Vimos acima que $\|L\| \leq \|v\|$. No entanto,

$$|L(v)| = |(v,v)| = \|v\|^2 \implies \sup_{\|w\|=1} \frac{|L(w)|}{\|w\|} \geq \|v\|.$$

Logo $\|L\| \geq \|v\|$. Portanto,

$$\|L\| = \|v\| = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}.$$

Exercício 38. Mostre que não existe nenhum funcional linear contínuo $L : L^2(-1,1) \to \mathbb{R}$ tal que $L(f) = f'(0)$, para todo $f \in C^1([-1,1])$.

Solução:

Suponha que exista um funcional linear contínuo $L : L^2(-1,1) \to \mathbb{R}$ tal que $L(f) = f'(0)$, para todo $f \in C^1([-1,1])$.

Como L é contínuo, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|f'(0)| = |L(f)| \leq C\|f\|_{L^2(-1,1)},$$

para todo $f \in L^2(-1,1)$.

Considere a sequência de funções $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ dadas por $f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}$. Logo $f_n \in C^1([-1,1])$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observamos que $f_n'(x) = \cos(nx)$. Assim, $f_n'(0) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado,

$$\|f_n\|_{L^2(-1,1)} = \sqrt{\int_{-1}^{1} |f_n(x)|^2 dx} = \sqrt{\int_{-1}^{1} |\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}|^2 dx} \leq \sqrt{\frac{2}{n^2}} = \frac{\sqrt{2}}{n}.$$

Assim, deveríamos ter

$$1 = |f_n'(0)| = |L(f_n)| \leq C\|f_n\|_{L^2(-1,1)} \leq \frac{\sqrt{2}C}{n},$$

ou seja, $n \leq \sqrt{2}C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esta constante claramente não existe. Assim, uma função como a do enunciado não pode existir.

Exercício 39. Ache a derivada fraca da função $h : [0,2] \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1] \\ 2-x, & x \in [1,2] \end{cases}.$$

Solução:
Seja $\varphi \in C_c^1(]0,2[)$. Usando integração por partes, vemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^2 h(x)\varphi'(x)dx &= \int_0^1 x\varphi'(x)dx + \int_1^2 (2-x)\varphi'(x)dx \\
&= x\varphi(x)|_0^1 - \int_0^1 \varphi(x)dx + (2-x)\varphi(x)|_1^2 + \int_1^2 \varphi(x)dx \\
&= 1\varphi(1) - 0\varphi(0) - \int_0^1 \varphi(x)dx + 0\varphi(2) - 1\varphi(1) + \int_1^2 \varphi(x)dx \\
&= -\left(\int_0^1 \varphi(x)dx + \int_1^2 (-1)\varphi(x)dx\right).
\end{aligned}$$

Assim,

$$h'(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1[\\ -1, & x \in [1,2] \end{cases}.$$

(Observe que no ponto $x = 1$ poderíamos ter escolhido outro valor. Isto não muda nada em termos de integração.)

Exercício 40. Mostre que se $a = t_0 < t_1 < ... < t_N = b$ for uma partição de $[a,b]$ e $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ for uma função contínua tal que $f|_{t_i}^{t_{i+1}} \in H^1(t_i, t_{i+1})$, para todo $i \in \{0, ..., N-1\}$, então $f \in H^1(a,b)$. Determine a derivada fraca de f.

(Dica: Se $v \in C_c^1(]a,b[)$, então $\int_a^b fv'dx = \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} fv'dx$. Use derivação por partes.)

Solução:
Sabemos que $f|_{t_i}^{t_{i+1}} \in H^1(t_i, t_{i+1})$, pelas hipóteses do exercício. Vamos denotar por $g_i \in L^2(t_i, t_{i+1})$ a sua derivada fraca.
Seja $v \in C_c^1(]a,b[)$. Logo, usando derivação por partes em $[t_i, t_{i+1}]$, temos

$$\begin{aligned}
\int_a^b fv'dx = \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} fv'dx &= \sum_{i=1}^N - \int_{t_{i-1}}^{t_i} g_{i-1}vdx + \sum_{i=1}^N (f(t_i)v(t_i) - f(t_{i-1})v(t_{i-1})) \\
&= -\sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} g_{i-1}vdx + \sum_{i=1}^N f(t_i)v(t_i) - \sum_{i=0}^{N-1} f(t_i)v(t_i) \\
&= -\sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} g_{i-1}vdx + f(b)v(b) - f(a)v(a) = -\sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} g_{i-1}vdx
\end{aligned}$$

Definindo $f' : [a,b] \to \mathbb{R}$ como $f'(x) = g_i(x)$ para $x \in [t_i, t_{i+1}[$, $i \in \{0, ..., N-1\}$ e $f'(b) = g_{N-1}(b)$, concluímos que

$$\int_a^b f(x)v'(x)dx = -\sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} g_{i-1}(x)v(x)dx = -\sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} g_i(x)v(x)dx = -\int_a^b f'(x)v(x)dx.$$

Como $f' \in L^2(a,b)$, concluímos que $f \in H^1(a,b)$ e sua derivada fraca é igual a f'.

Exercício 41. Mostre que se $f \in H^1(a,b)$, então

$$|f(t) - f(s)| \le \|f'\|_{L^2(a,b)} |t-s|^{1/2},$$

ou seja, f é Hölder contínua. Mostre também que se $s \in]a,b[$, então

$$\lim_{t\to s} \frac{|f(t)-f(s)|}{|t-s|^{1/2}} = 0.$$

Solução:

Basta observar que

$$f(s) = f(a) + \int_a^s f'(\tau)d\tau$$

e

$$f(t) = f(a) + \int_a^t f'(\tau)d\tau.$$

Logo, suponha que $t > s$ (se $t \leq s$, o raciocínio é análogo). Logo

$$\begin{aligned} |f(t)-f(s)| &= |\int_a^t f'(\tau)d\tau - \int_a^s f'(\tau)d\tau| = |\int_s^t f'(\tau)d\tau| \\ &\leq \sqrt{\int_s^t |f'(\tau)|^2 d\tau}\sqrt{\int_s^t 1^2 d\tau} = \sqrt{\int_s^t |f'(\tau)|^2 d\tau}|t-s|^{1/2}. \end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$|f(t)-f(s)| \leq \sqrt{\int_s^t |f'(\tau)|^2 d\tau}|t-s|^{1/2} \leq \sqrt{\int_a^b |f'(\tau)|^2 d\tau}|t-s|^{1/2} = \|f'\|_{L^2(a,b)}|t-s|^{1/2}.$$

Além disso,

$$0 \leq \frac{|f(t)-f(s)|}{|t-s|^{1/2}} \leq \sqrt{\int_s^t |f'(\tau)|^2 d\tau}.$$

Como $\lim_{t\to s} \int_s^t |f'(\tau)|^2 d\tau = 0$, concluímos que

$$\lim_{t\to s} \frac{|f(t)-f(s)|}{|t-s|^{1/2}} = 0.$$

Exercício 42. Seja $\lambda > 0$, $A, B \in \mathbb{R}$ e $f \in L^2(a,b)$. Mostre que existe uma única função $u \in H^2(a,b)$ que resolve o problema abaixo:

$$\begin{aligned} \lambda u - u'' &= f,\ x \in]a,b[, \\ u'(a) = A, &\quad u'(b) = B. \end{aligned}$$

Solução:

Seja $v(x) = Ax + (B-A)\frac{(x-a)^2}{2(b-a)}$. Logo $v'(x) = A + (B-A)\frac{(x-a)}{(b-a)}$ e $v''(x) = \frac{(B-A)}{(b-a)}$. Logo $v'(a) = A$ e $v'(b) = B$.

Se $u \in H^2(a,b)$ for uma solução do problema do enunciado, definimos $w = u - v$. Logo $w \in H^2(a,b)$, pois $v \in C^\infty([a,b]) \subset H^2(a,b)$ e

$$\begin{aligned} \lambda w - w'' &= (\lambda u - u'') - (\lambda v - v'') = f - \lambda v + v'', \\ w'(a) &= u'(a) - v'(a) = A - A = 0, \\ w'(b) &= u'(b) - v'(b) = B - B = 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, se w for uma solução de

$$\begin{aligned} \lambda w - w'' &= f - \lambda v + v'', \\ w'(a) = 0, &\quad w'(b) = 0. \end{aligned} \tag{0.5}$$

Então podemos mostrar, da mesma forma que fizemos acima, que $u = v + w$ é solução do problema do enunciado.

Concluímos que o problema do enunciado tem uma solução $u \in H^2(a,b)$ se, e somente se, o Problema (0.5) tiver uma solução $w \in H^2(a,b)$. Porém, como $f - \lambda v + v'' \in L^2(a,b)$ (já que $f \in L^2(a,b)$ e

$v \in C^\infty([a,b])$), vimos em sala de aula que existe um único $w \in H^2(a,b)$ que resolve (0.5). Portanto, existe um único $u \in H^2(a,b)$ que resolve o problema do enunciado.

Exercício 43. Seja $f \in H^2(a,b)$.
i. Mostre que $f'' = 0$ se, e somente se, existe c_0 e $c_1 \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = c_0 + c_1 x$.
ii. Mostre que $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x (x-y) f''(y)dy$.

Solução:
Vamos usar o seguinte resultado visto em sala de aula: Se $u \in H^1(a,b)$ é tal que $u' = 0$, então u é constante.

i. Como $f'' = 0$, então concluímos que f' é constante, pois $f' \in H^1(a,b)$ e f' tem derivada nula. Seja $c_1 = f'(x)$ para (quase) todo $x \in (a,b)$. Vamos definir $g \in C^\infty([a,b]) \subset H^2(a,b)$ por $g(x) = c_1 x$. Logo $(f-g)' = c_1 - c_1 = 0$. Novamente, como $f - g \in H^1(a,b)$ tem derivada nula, concluímos que $f - g$ é constante. Seja $c_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f - g = c_0$. Logo

$$f(x) = g(x) + c_0 = c_1 x + c_0.$$

ii. Sabemos que f' pertence a $H^1(a,b)$. Logo

$$f'(x) = f'(a) + \int_a^x f''(s)ds.$$

Por outro lado, como $f \in H^1(a,b)$, concluímos que

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(s)ds.$$

Logo

$$f(x) = f(a) + \int_a^x (f'(a) + \int_a^s f''(\tau)d\tau)ds = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x \int_a^s f''(\tau)d\tau ds.$$

Note que $s \mapsto \int_a^s f''(\tau)d\tau = f'(s) - f'(a) \in H^1(a,b)$ e a derivada fraca de $s \mapsto \int_a^s f''(\tau)d\tau$ é igual a $s \mapsto f''(s)$. Logo podemos aplicar a derivação por partes. Obtemos

$$\begin{aligned}\int_a^x 1(\int_a^s f''(\tau)d\tau)ds &= \left| s\int_a^s f''(\tau)d\tau \right|_a^x - \int_a^x s f''(s)ds \\ &= x\int_a^x f''(\tau)d\tau - \int_a^x s f''(s)ds = \int_a^x (x-s) f''(s)ds.\end{aligned}$$

Trocando s por y, concluímos que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x \int_a^s f''(\tau)d\tau ds = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x (x-y) f''(y)dy.$$

Exercício 44. Para cada $m \in \mathbb{N}_0$, mostre que $H^m(a,b)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno:

$$(u,v)_{H^m} = \sum_{j=0}^m (u^{(j)}, v^{(j)})_{L^2(a,b)}.$$

Mostre que $H^{k+1}(a,b) \subset C^k([a,b])$, $k \geq 1$, usando indução em k. Note que $C^0([a,b]) = C([a,b])$.

Mostre, também por indução, que se $u \in H^k(a,b)$, $k \geq 0$, então $u \in C^k([a,b])$ se, e somente se, $u^{(k)} \in C([a,b])$. (O caso $k = 0$ é trivial).

Solução:
Afirmação 1: O espaço $H^m(a,b)$ é um espaço de Hilbert.
Seja $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $H^m(a,b)$. Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $k, l > N$, então

$$\|u_k - u_l\|_{H^k(a,b)} < \varepsilon$$

Logo

$$\sqrt{\sum_{j=0}^{m} \|u_k^{(j)} - u_l^{(j)}\|^2_{L^2(a,b)}} < \varepsilon.$$

Assim, $(u_k^{(j)})_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy para todo $j \in \{0,1,...,m\}$. Portanto, converge. Seja $v_j \in L^2(a,b)$ tal que $v_j = \lim_{k\to\infty} u_k^{(j)}$ em $L^2(a,b)$. Vamos mostrar que $v_0 \in H^m(a,b)$ e $v_0^{(j)} = v_j$ para todo $j \in \{0,1,...,m\}$. Para tanto, basta mostrar que $v_j' = v_{j+1}$ para todo $j \in \{0,1,...,m-1\}$.

Consideremos $\varphi \in C_c^1(]a,b[)$. Logo

$$(u_k^{(j)}, \varphi')_{L^2(a,b)} = \int_a^b u_k^{(j)}(x)\varphi'(x)dx = -\int_a^b u_k^{(j+1)}(x)\varphi(x)dx = -(u_k^{(j+1)}, \varphi)_{L^2(a,b)}.$$

Tomando o limite $k \to \infty$, concluímos que $(v_j, \varphi') = -(v_{j+1}, \varphi)$, ou seja,

$$\int_a^b v_j(x)\varphi'(x)dx = -\int_a^b v_{j+1}(x)\varphi(x)dx.$$

Logo $v_j' = v_{j+1}$.

Afirmação 2: $H^{k+1}(a,b) \subset C^k([a,b])$, $k \geq 1$.

Vimos em sala de aula que $H^1(a,b) \subset C([a,b])$.

Suponha, por hipótese de indução, que $H^k(a,b) \subset C^{k-1}([a,b])$ para algum $k \geq 1$.

Seja $u \in H^{k+1}(a,b)$, então $u' \in H^k(a,b)$. Logo $u' \in C^{k-1}([a,b])$. Lembramos agora que se a derivada fraca for contínua para $n = 1$, então a derivada clássica existe e é igual a derivada fraca. Assim, a derivada clássica de u existe e pertence a C^{k-1}. Portanto, $u \in C^k([a,b])$.

Afirmação 3: Seja $u \in H^k(a,b)$, $k \geq 1$. *Logo* $u \in C^k([a,b])$ *se, e somente se,* $u^{(k)} \in C([a,b])$.

Vimos em sala de aula que se $u \in H^1(a,b)$ e $u' \in C([a,b])$, então $u \in C^1([a,b])$.

Suponha, por hipótese de indução, que para algum $k \geq 1$, vale a seguinte afirmação: Se $u \in H^k(a,b)$, então $u \in C^k([a,b])$ se, e somente se, $u^{(k)} \in C([a,b])$.

Assim, se $u \in H^{k+1}(a,b)$ e $u^{(k+1)} \in C([a,b])$, então $u' \in H^k(a,b)$ e $(u')^{(k)} \in C([a,b])$. Logo, pela hipótese de indução, $u' \in C^k([a,b])$. Portanto, a derivada clássica de u existe e pertence a C^k. Logo $u \in C^{k+1}([a,b])$.

Por outro lado, é claro que se $u \in C^k([a,b])$, então $u^{(k)} \in C([a,b])$.

Exercício 45. Dado $f \in L^2(a,b)$, mostre que existe uma única função $u \in H^2(a,b)$ que resolve o seguinte problema:

$$\begin{aligned} -(p(x)u'(x))' + q(x)u'(x) + r(x)u(x) = f(x),\ x \in]a,b[, \\ u'(a) = u'(b) = 0. \end{aligned} \tag{0.6}$$

em que $p \in C^1([a,b])$, $q, r \in C([a,b])$ e existem constantes reais α e β tais que $0 < \beta < \alpha$, $p(x) \geq \alpha$ e $q(x)^2 < 4\beta r(x)$ para todo $x \in [a,b]$.

Solução:

HAVIA UM ERRO NO ENUNCIADO! Precisamos $q(x)^2 < 4\beta r(x)$ para todo $x \in [a,b]$ e não $q(x)^2 \leq 4\beta r(x)$ como estava anteriormente.

Passo 1: Se $u \in H^2(a,b)$ *for solução de (0.6), então* u *é uma solução fraca.*

Suponha que exista uma solução $u \in H^2(a,b)$ que resolva o problema (0.6). Multiplicando tudo por $v \in H^1(a,b)$, integrando e fazendo integração por partes, vemos que

$$\begin{aligned} \int_a^b fvdx &= -\int_a^b (pu')'vdx + \int_a^b qu'vdx + \int_a^b ruvdx \\ &= \int_a^b pu'v'dx - pu'(b)v(b) + p(a)u'(a)v(a) + \int_a^b qu'vdx + \int_a^b ruvdx \\ &= \int_a^b pu'v'dx + \int_a^b qu'vdx + \int_a^b ruvdx. \end{aligned}$$

Definindo $a : H^1(a,b) \times H^1(a,b) \to \mathbb{R}$ e $F : H^1(a,b) \to \mathbb{R}$ por

$$a(u,v) = \int_a^b (pu'v' + qu'v + ruv)\, dx \quad \text{e} \quad F(v) = \int_a^b fvdx,$$

concluímos que u é uma solução fraca do problema, ou seja, $u \in H^1(a,b)$ e $a(u,v) = F(v)$ para todo $v \in H^1(a,b)$.

Passo 2: Existe uma única solução fraca $u \in H^1(a,b)$ de (0.6).

Vamos mostrar F é linear e contínua. A linearidade segue facilmente da linearidade da integral. A continuidade segue de

$$\begin{aligned} |F(v)| = |\int_a^b fvdx| &\leq \sqrt{\int_a^b |f|^2 dx}\sqrt{\int_a^b |v|^2 dx} \\ &= \|f\|_{L^2(a,b)}\|v\|_{L^2(a,b)} \leq \|f\|_{L^2(a,b)}\|v\|_{H^1(a,b)}. \end{aligned}$$

Agora vamos mostrar que a é bilinear, contínua e coerciva. A bilinearidade segue facilmente. Para a continuidade, denotando $L^\infty = L^\infty(a,b)$, $L^2 = L^2(a,b)$ e $H^1 = H^1(a,b)$, temos

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq |\int_a^b pu'v'dx| + |\int_a^b qu'vdx| + |\int_a^b ruvdx| \\ &\leq \|p\|_{L^\infty}\|u'\|_{L^2}\|v'\|_{L^2} + \|q\|_{L^\infty}\|u'\|_{L^2}\|v\|_{L^2} + \|r\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \\ &\leq (\|p\|_{L^\infty} + \|q\|_{L^\infty} + \|r\|_{L^\infty})\, \|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}. \end{aligned}$$

Para provar coercividade, sabemos, por hipótese, que existem α e β tais que $0 < \beta < \alpha$, $p(x) \geq \alpha$ e $q(x)^2 < 4\beta r(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Neste caso $4\beta r(x) - q(x)^2 > 0$. Como r e q são contínuas, então existe $\sigma > 0$ tal que $4\beta r(x) - q(x)^2 \geq \sigma$ para todo $x \in [a,b]$.

Observamos inicialmente que, como $ab \leq \frac{1}{4\beta}a^2 + \beta b^2$ (Basta observar que $(\frac{1}{2\sqrt{\beta}}a - \sqrt{\beta}b)^2 \geq 0$), temos

$$q(x)u'(x)u(x) \leq |q(x)u(x)||u'(x)| \leq \frac{1}{4\beta}q(x)^2u(x)^2 + \beta u'(x)^2. \tag{0.7}$$

Assim,

$$\begin{aligned} a(u,u) &= \int_a^b pu'u'dx + \int_a^b qu'udx + \int_a^b ruudx \\ &\overset{(1)}{\geq} \alpha\int_a^b u'^2dx - \int_a^b \frac{1}{4\beta}q^2u^2 - \int_a^b \beta u'^2dx + \int_a^b ru^2dx \\ &= (\alpha-\beta)\int_a^b u'^2dx + \int_a^b \left(r - \frac{1}{4\beta}q^2\right)u^2dx \\ &\overset{(2)}{\geq} (\alpha-\beta)\|u'\|^2_{L^2(a,b)} + \frac{\sigma}{4\beta}\|u\|^2_{L^2} \geq \min\left\{\frac{(\alpha-\beta)}{C^2}, \frac{\sigma}{4\beta}\right\}\|u\|^2_{H^1_0(a,b)}. \end{aligned}$$

Em (1) usamos que $p(x) \geq \alpha$, $quu' \geq -|quu'|$ e (0.7). Em (2) usamos que $r(x) - \frac{q(x)^2}{4\beta} \geq \frac{\sigma}{4\beta}$.

Pelo Teorema de Lax-Milgram, existe um único $u \in H^1(a,b)$ tal que

$$a(u,v) = F(v),$$

para todo $v \in H^1(a,b)$. Concluímos que existe uma única solução fraca do Problema (0.6). Com isto concluímos que se existir uma solução $u \in H^2(a,b)$ do Problema (0.6), então a solução será única, já que, como vimos no passo 1, ela também é uma solução do fraca do problema.

Passo 3. Mostraremos que uma solução fraca do Problema (0.6) pertence a $H^2(a,b)$ e é de fato uma solução.

Vimos que se a solução fraca u do problema pertence a $H^1(a,b)$ e satisfaz $a(u,v) = F(v)$ para todo $v \in H^1(a,b)$. Como $C_c^1(]a,b[) \subset H^1(a,b)$, concluímos que para todo $\varphi \in C_c^1(]a,b[)$, temos

$$\int_a^b p(x)u'(x)\varphi'(x)dx = -\int_a^b (q(x)u'(x) + r(x)u(x) - f(x))\,\varphi(x)dx.$$

Como p é limitada (pois é contínua num compacto) e $u' \in L^2(a,b)$, então $pu' \in L^2(a,b)$. Da mesma forma, $qu' + ru - f \in L^2(a,b)$. Pela própria definição de derivada fraca, concluímos que $pu' \in H^1(a,b)$ e $(pu')' = qu' + ru - f$. Note que como $\frac{1}{p}$ é limitada, pois $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{\alpha}$, então $u' = \frac{1}{p}pu \in H^1(a,b)$. Assim, $u \in H^2(a,b)$ e é solução do problema $-(pu')' + qu' + ru = f$.

Quanto às condições de contorno, observamos que se $v \in H^1(a,b)$ e $u \in H^2(a,b)$ é uma solução fraca do problema e satisfaz $-(pu')' + qu' + ru = f$, então, integrando por partes, temos

$$\begin{aligned}
0 &= \int_a^b pu'v'dx + \int_a^b qu'vdx + \int_a^b ruvdx - \int_a^b fvdx \\
&= \int_a^b (-(pu')' + qu' + ru - f)\,vdx \\
&\quad + p(b)u'(b)v(b) - p(a)u'(a)v(a) \\
&= p(b)u'(b)v(b) - p(a)u'(a)v(a).
\end{aligned}$$

Assim,

$$p(b)u'(b)v(b) - p(a)u'(a)v(a) = 0, \quad \forall v \in H^1(a,b).$$

Tomando $v(x) = x - a$, concluímos que $p(b)(b-a)u'(b) = 0$. Logo $u'(b) = 0$. Tomando $v(x) = b - x$, temos $-p(a)(b-a)u'(a) = 0$, ou seja, $u'(a) = 0$.

Exercício 46. (Problema com condições de contorno mistas) Sejam $p \in C^1([a,b])$ e $r \in C([a,b])$ com $r \geq 0$. Suponha que exista $\alpha > 0$ tal que $p(x) \geq \alpha$ para todo $x \in [a,b]$, e seja $f \in L^2(a,b)$. O objetivo é mostrar que existe uma única função $u \in H^2(a,b)$ tal que

$$\begin{gathered}
-(p(x)u'(x))' + r(x)u(x) = f(x),\ x \in]a,b[, \\
u(a) = u'(b) = 0.
\end{gathered}$$

i. Seja $H_0^1(a,b] = \{u \in H^1(a,b) : u(a) = 0\}$. Mostre que $H_0^1(a,b]$ é um espaço de Hilbert com o mesmo produto interno de $H^1(a,b)$.

ii. Mostre que vale a desigualdade de Poincaré para $H_0^1(a,b]$. (Dica: A prova é a mesma que vimos em sala de aula!)

iii. Mostre que se $u \in H^2(a,b)$ for solução do problema, então $u \in H_0^1(a,b]$ e u é solução fraca do problema, ou seja, u satisfaz:

$$a(u,v) = F(v), \quad \forall v \in H_0^1(a,b],$$

em que

$$a(u,v) = \int_a^b p(x)u'(x)v'(x) + r(x)u(x)v(x)dx, \quad F(v) = \int_a^b f(x)v(x)dx.$$

iv. Mostre que existe uma única solução fraca $u \in H_0^1(a,b]$ do problema. (Dica: Mostre que a é contínua, bilinear e coerciva e F é linear e contínua).

v. Mostre que a solução fraca do problema pertence a $H^2(a,b)$, satisfaz as condições de contorno mistas e é solução do problema.

Solução:

i. Seja $L_a : H^1(a,b) \to \mathbb{R}$ dada por $L_a u = u(a)$. Logo L_a é linear e contínua, pelo que vimos em sala de aula.

Lembramos que se $u \in H^1(a,b)$, então existe uma única função $v \in C([a,b])$ que é igual a u em $]a,b[$ (q.t.p. para quem for familiar com medida e integração). Identificamos a função v com u.

Por fim, como $H_0^1(a,b] = N(L_a)$, o núcleo de L_a, e o núcleo de um operador contínuo é um subespaço fechado, concluímos que $H_0^1(a,b]$ é um subespaço fechado de $H^1(a,b)$. Logo é um espaço de Hilbert.

ii. Se $u \in H_0^1(a,b]$, então $u(x) = \int_a^x u'(y)dy$ e $u' \in L^2(a,b)$. Assim,

$$|u(x)|^2 = |\int_a^x u'(y)dy|^2 \leq (x-a)\int_a^x |u'(y)|^2 dy.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int_a^b |u(x)|^2 dx &\leq \int_a^b \left((x-a)\int_a^x |u'(y)|^2 dy\right) dx \\ &\leq \int_a^b (x-a)dx \int_a^b |u'(y)|^2 dy = \frac{1}{2}(b-a)^2 \|u'\|^2_{L^2(a,b)}.\end{aligned}$$

iii. Seja $u \in H^2(a,b)$ uma solução do problema e $v \in H_0^1(a,b]$. Logo, integrando por partes, temos

$$\begin{aligned}\int_a^b fv dx &= \int_a^b \left(-(pu')'v + ruv\right) dx \\ &= \int_a^b \left(pu'v' + ruv\right) dx - p(b)u'(b)v(b) + p(a)u'(a)v(a) \\ &= \int_a^b \left(pu'v' + ruv\right) dx,\end{aligned}$$

pois $v(a) = u'(b) = 0$.

iv. A função F é linear (simples de provar) e contínua, pois

$$|F(v)| = \|f\|_{L^2(a,b)}\|v\|_{L^2(a,b)} \leq \|f\|_{L^2(a,b)}\|v\|_{H^1(a,b)}.$$

A função a é bilinear (simples de provar) e contínua, pois

$$\begin{aligned}|a(u,v)| &\leq |\int_a^b pu'v'dx| + |\int_a^b ruvdx| \\ &\leq \|p\|_{L^\infty}\|u'\|_{L^2}\|v'\|_{L^2} + \|r\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \\ &\leq \left(\|p\|_{L^\infty} + \|r\|_{L^\infty}\right)\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}.\end{aligned}$$

A função a é coerciva, pois

$$\begin{aligned}a(u,u) &= \int_a^b (pu'^2 + ru^2)dx \geq \alpha \int_a^b u'^2 dx = \alpha\left(\frac{1}{2}\int_a^b u'^2 dx + \frac{1}{2}\int_a^b u'^2 dx\right) \\ &\geq \alpha\left(\frac{1}{2}\int_a^b u'^2 dx + \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b u^2 dx\right) \\ &\geq \alpha \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{(b-a)^2}\right\}\left(\int_a^b u'^2 dx + \int_a^b u^2 dx\right).\end{aligned}$$

Assim, por Lax-Milgram, existe uma única solução fraca $u \in H_0^1(a,b]$.

v. Vimos que a solução fraca u do problema pertence a $H_0^1(a,b]$ e satisfaz $a(u,v) = F(v)$ para todo $v \in H_0^1(a,b]$. Como $C_c^1(]a,b[) \subset H_0^1(a,b]$, concluímos que para todo $\varphi \in C_c^1(]a,b[)$, temos

$$\int_a^b p(x)u'(x)\varphi'(x)dx = -\int_a^b \left(r(x)u(x) - f(x)\right)\varphi(x)dx.$$

Como p é limitada (pois é contínua num compacto) e $u' \in L^2(a,b)$, então $pu' \in L^2(a,b)$. Da mesma forma, $ru - f \in L^2(a,b)$. Pela própria definição de derivada fraca, concluímos que $pu' \in H^1(a,b)$ e $(pu')' = ru - f$. Note que, como $\frac{1}{p}$ é limitada, pois $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{\alpha}$, então $u' = \frac{1}{p}pu \in H^1(a,b)$. Assim, $u \in H^2(a,b)$ e é solução do problema $-(pu')' + ru = f$.

Quanto às condições de contorno, observamos que se $v \in H_0^1(a,b]$ e $u \in H^2(a,b)$ é uma solução fraca do problema e satisfaz $-(pu')' + ru = f$, então, integrando por partes, temos

$$\begin{aligned}0 &= \int_a^b pu'v'dx + \int_a^b ruvdx - \int_a^b fvdx \\ &= \int_a^b \left(-(pu')' + ru - f\right) vdx \\ &\quad + p(b)u'(b)v(b) - p(a)u'(a)v(a) \\ &= p(b)u'(b)v(b).\end{aligned}$$

Assim,

$$p(b)u'(b)v(b) = 0, \quad \forall v \in H_0^1(a,b].$$

Tomando $v(x) = x - a \in H_0^1(a,b]$, concluímos que $p(b)(b-a)u'(b) = 0$. Logo $u'(b) = 0$.
Como $u \in H_0^1(a,b]$, temos $u(a) = 0$.

Exercício 47. (Problema com condições de contorno periódicas) Sejam $p \in C^1([a,b])$ e $r \in C([a,b])$ com $p(a) = p(b)$. Suponha que exista $\alpha > 0$ tal que $p(x) \geq \alpha$ e $r(x) \geq \alpha$ para todo $x \in [a,b]$, e seja $f \in L^2(a,b)$. O objetivo é mostrar que existe uma única função $u \in H^2(a,b)$ tal que

$$\begin{aligned}-(p(x)u'(x))' + r(x)u(x) = f(x),\ x \in]a,b[, \\ u(a) = u(b), u'(a) = u'(b).\end{aligned}$$

i. Seja $H_{per}^1(a,b) = \{u \in H^1(a,b) : u(a) = u(b)\}$. Mostre que $H_{per}^1(a,b)$ é um espaço de Hilbert com o mesmo produto interno de $H^1(a,b)$.

ii. Mostre que se $u \in H^2(a,b)$ for solução do problema, então $u \in H_{per}^1(a,b)$ e u é solução fraca do problema, ou seja, u satisfaz:

$$a(u,v) = F(v), \quad \forall v \in H_{per}^1(a,b),$$

em que

$$a(u,v) = \int_a^b p(x)u'(x)v'(x) + r(x)u(x)v(x)dx, \quad F(v) = \int_a^b f(x)v(x)dx.$$

iii. Mostre que existe uma única solução fraca $u \in H_{per}^1(a,b)$ do problema. (Dica: Mostre que a é contínua, bilinear e coerciva e F é linear e contínua).

iv. Mostre que a solução fraca do problema pertence a $H^2(a,b)$, satisfaz as condições de contorno periódicas e é solução do problema.

Solução:
No item iv. do enunciado, o certo era condições periódicas. Não mistas, como estava escrito.
Solução:
i. Seja $L : H^1(a,b) \to \mathbb{R}$ dada por $Lu = u(a) - u(b)$. Logo L é linear e contínua.
Como $H_{per}^1(a,b) = N(L)$ e o núcleo de um operador contínuo é um subespaço fechado, concluímos que $H_{per}^1(a,b)$ é um subespaço fechado de $H^1(a,b)$. Logo é um espaço de Hilbert.
ii. Seja $u \in H^2(a,b)$ uma solução do problema e $v \in H_{per}^1(a,b)$. Logo, integrando por partes, temos

$$\begin{aligned}\int_a^b fvdx &= \int_a^b \left(-(pu')'v + ruv\right) dx \\ &= \int_a^b \left(pu'v' + ruv\right) dx - p(b)u'(b)v(b) + p(a)u'(a)v(a) \\ &= \int_a^b \left(pu'v' + ruv\right) dx,\end{aligned}$$

pois $u'(a) = u'(b)$, $p(a) = p(b)$ e $v(a) = v(b)$.
iii. A função F é linear (simples de provar) e contínua, pois

$$|F(v)| = \|f\|_{L^2(a,b)}\|v\|_{L^2(a,b)} \leq \|f\|_{L^2(a,b)}\|v\|_{H^1(a,b)}.$$

A função a é bilinear (simples de provar) e contínua, pois

$$\begin{aligned}|a(u,v)| &\leq |\int_a^b pu'v'dx| + |\int_a^b ruvdx| \\ &\leq \|p\|_{L^\infty}\|u'\|_{L^2}\|v'\|_{L^2} + \|r\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \\ &\leq (\|p\|_{L^\infty} + \|r\|_{L^\infty})\,\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}.\end{aligned}$$

A função a é coerciva, pois

$$a(u,u) = \int_a^b (pu'^2 + ru^2)dx \geq \alpha \left(\int_a^b u'^2 dx + \int_a^b u^2 dx \right).$$

Assim, por Lax-Milgram, existe uma única solução fraca $u \in H^1_{per}(a,b)$.

iv. Vimos que a solução fraca u do problema pertence a $H^1_{per}(a,b)$ e satisfaz $a(u,v) = F(v)$ para todo $v \in H^1_{per}(a,b)$. Como $C^1_c(]a,b[) \subset H^1_{per}(a,b)$, concluímos que, para todo $\varphi \in C^1_c(]a,b[)$, temos

$$\int_a^b p(x)u'(x)\varphi'(x)dx = -\int_a^b (r(x)u(x) - f(x))\,\varphi(x)dx.$$

Como p é limitada (pois é contínua num compacto) e $u' \in L^2(a,b)$, então $pu' \in L^2(a,b)$. Da mesma forma, $ru - f \in L^2(a,b)$. Pela própria definição de derivada fraca, concluímos que $pu' \in H^1(a,b)$ e $(pu')' = ru - f$. Note que, como $\frac{1}{p}$ é limitada, pois $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{\alpha}$, então $u' = \frac{1}{p}pu \in H^1(a,b)$. Assim, $u \in H^2(a,b)$ e u é solução do problema $-(pu')' + ru = f$.

Quanto às condições de contorno, observamos que se $v \in H^1_{per}(a,b)$ e $u \in H^2(a,b)$ é uma solução fraca do problema e satisfaz $-(pu')' + ru = f$, então, integrando por partes, temos

$$\begin{aligned}0 &= \int_a^b pu'v'dx + \int_a^b ruvdx - \int_a^b fvdx \\ &= \int_a^b (-(pu')' + ru - f)\,vdx \\ &\quad + p(b)u'(b)v(b) - p(a)u'(a)v(a) \\ &= p(b)u'(b)v(b) - p(a)u'(a)v(a).\end{aligned}$$

Assim, como $p(a) = p(b)$, temos

$$p(b)\,(u'(b)v(b) - u'(a)v(a)) = 0, \quad \forall v \in H^1_{per}(a,b).$$

Tomando $v(x) = 1 \in H^1_{per}(a,b)$, concluímos que $p(b)\,(u'(b) - u'(a)) = 0$. Logo $u'(a) = u'(b)$.

Como $u \in H^1_{per}(a,b)$, temos também $u(a) = u(b)$.

Exercício 48. (Problema com condições de contorno de Robin) Sejam $\beta_0, \beta_1 \geq 0$, $\lambda > 0$ e $f \in L^2(a,b)$. O objetivo é mostrar que existe uma única função $u \in H^2(a,b)$ tal que

$$\begin{gathered}\lambda u(x) - u''(x) = f(x),\, x \in]a,b[, \\ -u'(a) + \beta_0 u(a) = 0, u'(b) + \beta_1 u(b) = 0.\end{gathered}$$

i. Mostre que se $u \in H^2(a,b)$ for solução do problema, então $u \in H^1(a,b)$ e u é solução fraca do problema, ou seja, u satisfaz:

$$a(u,v) = F(v), \quad \forall v \in H^1(a,b),$$

em que

$$a(u,v) = \int_a^b u'(x)v'(x) + \lambda u(x)v(x)dx + \beta_1 u(b)v(b) + \beta_0 u(a)v(a), \quad F(v) = \int_a^b f(x)v(x)dx.$$

ii. Mostre que existe uma única solução fraca $u \in H^1(a,b)$ do problema. (Dica: Mostre que a é contínua, bilinear e coerciva e F é linear e contínua).

iii. Mostre que a solução fraca do problema pertence a $H^2(a,b)$, satisfaz as condições de contorno mistas e é solução do problema.

Solução:

HAVIA UM ERRO NO ENUNCIADO! O certo é $u'(b)+\beta_1 u(b)=0$ e não $-u'(b)+\beta_1 u(b)=0$ como estava escrito.

i. Seja $u \in H^2(a,b)$ uma solução do problema e $v \in H^1(a,b)$. Logo, integrando por partes, temos

$$\begin{aligned}\int_a^b fv dx &= \int_a^b (-u''v+\lambda uv)\,dx \\ &= \int_a^b (u'v'+\lambda uv)\,dx - u'(b)v(b)+u'(a)v(a) \\ &= \int_a^b (u'v'+\lambda uv)\,dx + \beta_1 u(b)v(b)+\beta_0 u(a)v(a).\end{aligned}$$

ii. A função F é linear (simples de provar) e contínua, pois

$$|F(v)| = \|f\|_{L^2(a,b)}\|v\|_{L^2(a,b)} \leq \|f\|_{L^2(a,b)}\|v\|_{H^1(a,b)}.$$

A função a é bilinear (simples de provar) e contínua, pois

$$\begin{aligned}|a(u,v)| &\leq |\int_a^b u'v'dx| + |\int_a^b \lambda uv dx| + \beta_1|u(b)v(b)| + \beta_0|u(a)v(a)| \\ &\leq \|u'\|_{L^2}\|v'\|_{L^2} + \lambda\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} + (\beta_0+\beta_1)\|u\|_{L^\infty}\|v\|_{L^\infty} \\ &\leq (1+\lambda+C(\beta_0+\beta_1))\,\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1},\end{aligned}$$

pois vimos em sala de aula que $\|u\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_{H^1}$ para todo $u \in H^1$.

A função a é coerciva, pois

$$a(u,u) = \int_a^b (u'^2+\lambda u^2)dx + \beta_1 u(b)^2 + \beta_0 u(a)^2 \geq \min\{1,\lambda\}\left(\int_a^b u'^2 dx + \int_a^b u^2 dx\right).$$

Assim, por Lax-Milgram, existe uma única solução fraca $u \in H^1(a,b)$.

iv. Vimos que a solução fraca u do problema pertence a $H^1(a,b)$ e satisfaz $a(u,v)=F(v)$ para todo $v \in H^1(a,b)$. Como $C_c^1(]a,b[) \subset H^1(a,b)$, concluímos que para todo $\varphi \in C_c^1(]a,b[)$, temos

$$\begin{aligned}\int_a^b u'(x)\varphi'(x)dx &= -\int_a^b (\lambda u(x)-f(x))\,\varphi(x)dx + \beta_1 u(b)\varphi(b) + \beta_0 u(a)\varphi(a). \\ &= -\int_a^b (\lambda u(x)-f(x))\,\varphi(x)dx.\end{aligned}$$

Como $u' \in L^2(a,b)$ e $\lambda u - f \in L^2(a,b)$, pela própria definição de derivada fraca, concluímos que $u' \in H^1(a,b)$ e $u''=\lambda u - f$. Assim, $u \in H^2(a,b)$ e é solução do problema $\lambda u(x) - u''(x) = f(x)$.

Quanto às condições de contorno, observamos que se $v \in H^1(a,b)$ e $u \in H^2(a,b)$ é uma solução fraca do problema e satisfaz $-u''+\lambda u = f$, então, integrando por partes, temos

$$\begin{aligned}0 &= \int_a^b u'v'dx + \lambda\int_a^b uv dx + \beta_1 u(b)v(b) + \beta_0 u(a)v(a) - \int_a^b fv dx \\ &= \int_a^b (-u''+\lambda u - f)\,v dx \\ &\quad + \beta_1 u(b)v(b) + \beta_0 u(a)v(a) + u'(b)v(b) - u'(a)v(a) \\ &= (\beta_1 u(b)+u'(b))\,v(b) + (\beta_0 u(a) - u'(a))\,v(a).\end{aligned}$$

Assim,

$$(\beta_1 u(b)+u'(b))\,v(b) + (\beta_0 u(a)-u'(a))\,v(a) = 0, \quad \forall v \in H^1(a,b).$$

Tomando $v(x) = \frac{x-a}{b-a} \in H^1(a,b)$, concluímos que $\beta_1 u(b) + u'(b) = 0$.

Tomando $v(x) = \frac{x-b}{a-b} \in H^1(a,b)$, concluímos que $\beta_0 u(a) - u'(a) = 0$.

Exercício 49. (Problemas com condições Dirichlet/Robin)

i. $\int_0^1 u(x)^2dx \leq 2\left(u(0)^2 + \int_0^1 u'(x)^2dx\right)$ para todo $u \in H^1(a,b)$.

ii. Seja $\alpha > 0$, mostre que $a : H^1(0,1)\times H^1(0,1) \to \mathbb{R}$ dada por $a(u,v) = \alpha u(0)v(0)+\int_0^1 u'(x)v'(x)dx$ define uma função bilinear, contínua e coerciva.

iii. Seja $\alpha > 0$ e $f \in L^2(0,1)$. Mostre que existe uma única função $u \in H^2(0,1)$ que satisfaz

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x),\ x \in]0,1[, \\ -u'(0) + \alpha u(0) &= 0, u'(1) = 0. \end{aligned}$$

Solução:

HAVIA UM ERRO NO ENUNCIADO! O certo é $a(u,v) = \alpha u(0)v(0) + \int_0^1 u'(x)v'(x)dx$ e não $a(u,v) = \alpha u(0)v(0) + \int_0^1 u(x)v(x)dx$ como estava escrito.

i. Observamos inicialmente que

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \geq 0.$$

Logo $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Assim $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \leq 2a^2 + 2b^2$.

Observamos também que, por Cauchy-Schwarz, temos

$$(\int_0^x u'(s)ds)^2 \leq (\sqrt{\int_0^x u'(s)^2ds}\sqrt{\int_0^x 1^2ds})^2 = x\int_0^x u'(s)^2ds.$$

Usando os resultados acima, vemos que

$$\begin{aligned} \int_0^1 u(x)^2dx &= \int_0^1 (u(0) + \int_0^x u'(s)ds)^2dx \leq \int_0^1 \left(2u(0)^2 + 2(\int_0^x u'(s)ds)^2\right)dx \\ &\leq 2u(0)^2 + 2\int_0^1 (\int_0^x u'(s)ds)^2dx \leq 2u(0)^2 + 2\int_0^1 (x\int_0^x u'(s)^2ds)dx \\ &\leq 2u(0)^2 + 2\int_0^1 (\int_0^1 u'(s)^2ds)dx = 2u(0)^2 + 2\int_0^1 u'(x)^2dx. \end{aligned}$$

ii. É simples provar que a é bilinear. Para a continuidade, observamos que

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &= |\alpha u(0)v(0)| + |\int_0^1 u'(x)v'(x)dx| \leq \alpha\|u\|_{L^\infty}\|v\|_{L^\infty} + \|u'\|_{L^2}\|v'\|_{L^2} \\ &\leq (C\alpha + 1)\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}, \end{aligned}$$

em que usamos que $\|u\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_{H^1}$ para todo $u \in H^1(0,1)$.

Para mostrar que é coerciva, observamos que

$$\begin{aligned} |a(u,u)| &= \alpha u(0)^2 + \int_0^1 u'(x)^2dx = \alpha u(0)^2 + \frac{1}{2}\int_0^1 u'(x)^2dx + \frac{1}{2}\int_0^1 u'(x)^2dx \\ &\geq \frac{\min\{\alpha, \frac{1}{2}\}}{2}2\left(u(0)^2 + \int_0^1 u'(x)^2dx\right) + \frac{1}{2}\int_0^1 u'(x)^2dx \\ &\geq \min\{\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{4}\}\int_0^1 u(x)^2dx + \frac{1}{2}\int_0^1 u'(x)^2dx. \\ &\geq \min\{\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{4}\}\left(\int_0^1 u(x)^2dx + \int_0^1 u'(x)^2dx\right) \end{aligned}$$

iii. Seja $u \in H^2(0,1)$ uma solução de

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x),\ x \in]0,1[, \\ -u'(0) + \alpha u(0) &= 0, u'(1) = 0. \end{aligned}$$

Multiplicando tudo por $v \in H^1(0,1)$ e integrando por partes, temos

$$\int_0^1 f(x)v(x)dx = -\int_0^1 u''(x)v(x)dx = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx - u'(1)v(1) + u'(0)v(0)$$
$$= \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \alpha u(0)v(0).$$

Definindo $a : H^1(0,1) \times H^1(0,1) \to \mathbb{R}$ como no enunciado do exercício e $F : H^1(0,1) \to \mathbb{R}$ por $F(v) = \int_0^1 fvdx$, sabemos pelo item i que a é bilinear, contínua e coerciva e F é linear e contínua. Pelo Teorema de Lax-Milgram, existe uma única função $u \in H^1(0,1)$ tal que $a(u,v) = F(v)$ para todo $v \in H^1(0,1)$. Isto mostra a unicidade da solução.

Agora devemos provar que esta função $u \in H^1(0,1)$ na verdade pertence a $H^2(0,1)$ e é de fato uma solução do problema.

Como $C_c^1(]0,1[) \subset H^1(0,1)$, então $a(u,\varphi) = F(\varphi)$, para todo $\varphi \in C_c^1(]0,1[)$.

Assim

$$\int_0^1 f(x)\varphi(x)dx = \int_0^1 u'(x)\varphi'(x)dx + \alpha u(0)\varphi(0) = \int_0^1 u'(x)\varphi'(x)dx.$$

Logo $u' \in H^1(0,1)$ e $-u'' = f$. Portanto, $u \in H^2(0,1)$.

Para verificar as condições de contorno, basta observar que se $v \in H^1(0,1)$, temos, por integração por partes, que

$$0 = -\int_0^1 f(x)v(x)dx + \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \alpha u(0)v(0)$$
$$= -\int_0^1 \left(f(x) + u''(x)\right) v(x)dx + u'(1)v(1) - u'(0)v(0) + \alpha u(0)v(0)$$
$$= u'(1)v(1) - u'(0)v(0) + \alpha u(0)v(0).$$

Escolhendo $v(x) = x$, concluímos que $u'(1) = 0$. Escolhendo $v(x) = 1 - x$, concluímos que $-u'(0) + \alpha u(0) = 0$.