

FÍSICA II - 4302112

INSTITUTO OCEANOGRÁFICO

INFORMAÇÕES GERAIS

E

COLETÂNEA DE EXERCÍCIOS

Profa. LUCY VITÓRIA CREDIDIO ASSALI

IFUSP

PRIMEIRO SEMESTRE - 2016



# Índice

<b>1</b>	<b>Informações gerais</b>	<b>5</b>
1.1	Introdução . . . . .	5
1.2	Resumo do programa . . . . .	5
1.3	Bibliografia . . . . .	5
1.4	Critério de avaliação . . . . .	6
1.5	Critério de aprovação . . . . .	6
1.6	Calendário dos feriados escolares . . . . .	7
1.7	Calendário das viagens didáticas . . . . .	7
1.8	Calendário das provas gerais . . . . .	7
1.9	Calendário das provinhas . . . . .	8
1.10	Equipe . . . . .	8
1.11	Página da disciplina na internet . . . . .	8
1.12	Plantões de dúvidas . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Coletânea de exercícios</b>	<b>10</b>
2.1	Oscilador Harmônico . . . . .	10
2.2	Ondas mecânicas e sonoras . . . . .	14
2.3	Temperatura e Calor . . . . .	22
2.3.1	Gases Ideais e Segunda Lei da Termodinâmica . . . . .	25
2.3.2	Teoria Cinética dos Gases . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Oscilações Harmônicas</b>	<b>35</b>
3.1	Resumo: oscilações harmônicas forçadas e amortecidas . . . . .	35
3.2	Forma trigonométrica de um número complexo . . . . .	37
3.3	Solução particular da equação inhomogênea . . . . .	37



# Capítulo 1

## Informações gerais

Este texto contém informações importantes sobre a disciplina Física II (4302112). Nele estão apresentados, entre outros, o programa da disciplina, a bibliografia recomendada, os critérios de avaliação e de aprovação, o calendário de provas, etc.

### 1.1 Introdução

A disciplina de Física II (4302112) compreende os tópicos: Oscilações, Ondas e Termodinâmica. A disciplina contará com o apoio de um estagiário, aluno de pós-graduação do IFUSP, que será responsável pelos plantões para resolver dúvidas e eventuais aulas de exercícios, além de ajudar na manutenção da página da disciplina, na internet. Para um melhor aprendizado, sugerimos a leitura de um ou mais dos livros apresentados na bibliografia e a solução dos exercícios aqui propostos, durante este semestre. É importante, também, a utilização sistemática dos plantões de dúvidas.

### 1.2 Resumo do programa

1. Oscilações: Oscilador harmônico simples, amortecido e forçado
2. Ondas mecânicas e sonoras: equação de ondas, princípio da superposição, interferência, reflexão, modos vibracionais, efeito Doppler
3. Termodinâmica: leis da termodinâmica, teoria cinética dos gases e noções de mecânica estatística

### 1.3 Bibliografia

A bibliografia básica do curso engloba vários livros:

1. *Princípios de Física: Oscilações, Ondas e Termodinâmica - Vol. 2*, Serway, Editora Thomson.

2. *Curso de Física Básica*, H. M. Nussenzveig, volume 2 , Editora Blücher Ltda.
  3. *Física I*, H. D. Young e R. A. Freedman, vol. 1, 10<sup>a</sup> edição, Editora Addison Wesley (Sears e Zemansky);
  4. *Curso de Física de Berkeley: Mecânica e Ondas*, volume 2.
- A biblioteca do Instituto de Física dispõe de vários exemplares desses livros, bem como de outros textos que poderão ser usados como bibliografia complementar.

## 1.4 Critério de avaliação

A avaliação dos alunos será efetuada através de **Provas Gerais (PG)** e de **Avaliações Quinzenais (A)**.

### 1. Provas Gerais:

Serão realizadas duas Provas Gerais,  $PG_1$  e  $PG_2$ , mais uma Prova Substitutiva,  $P_S$ .

A  $P_S$  é uma prova única, no final do semestre, versando sobre toda a matéria e só poderá fazê-la o(a) aluno(a) que não comparecer em pelo menos uma das provas gerais.

### 2. Avaliações Quinzenais:

Serão realizadas de cinco a seis Avaliações Quinzenais, que poderão ser provas de exercícios (provinhas) e/ou exercícios resolvidos para entrega e a nota correspondente,  $M_A$ , resulta da média aritmética destas atividades.

- **Nos dias das PROVAS e avaliações os alunos devem apresentar um documento de identidade com foto.**

## 1.5 Critério de aprovação

A Nota Final,  $M_F$ , será calculada em função da média aritmética das duas provas gerais ( $M_{PG}$ ) e da Nota das Avaliações Quinzenais ( $M_A$ ), da seguinte forma:

$$M_F = 0,75 M_{PG} + 0,25 M_A$$

de modo que

$M_F \geq 5$	<u>aprovação</u>
$3 \leq M_F < 5$	<u>recuperação</u>
$M_F < 3$	<u>reprovação</u>

O(A) aluno(a) que alcançar frequência mínima às aulas de 70% e média final entre 3,0 (três) e 5,0 (cinco), poderá realizar uma prova de recuperação ( $P_{Rec}$ ), a qual compreende toda a matéria do semestre e será realizada no mês de agosto. Neste caso, a nota final  $N_F$  será calculada da seguinte forma:

$$N_F = (M_F + 2P_{Rec})/3$$

de modo que

$N_F \geq 5$	<u>aprovação</u>
$N_F < 5$	<u>reprovação</u>

## 1.6 Calendário dos feriados escolares

- 21 a 26 de março: Semana Santa. Não haverá aula.
- 21 de abril: Tiradentes. Não haverá aula.
- 22 e 23 de abril: Recesso Escolar. Não haverá aula.
- 26 de maio: Corpus Christi. Não haverá aula.
- 27 e 28 de maio: Recesso Escolar. Não haverá aula.

## 1.7 Calendário das viagens didáticas

- 07 de abril: IOF-274. Não haverá aula.
- 09 a 13 de maio: IOB-157. Não haverá aula.
- 30 de maio a 03 de junho: 2100114. Não haverá aula.

## 1.8 Calendário das provas gerais

- 1<sup>a</sup> Prova Geral ( $PG_1$ ): 28 de abril (quinta-feira)
- 2<sup>a</sup> Prova Geral ( $PG_2$ ): 24 de junho (sexta-feira)
- Prova Substitutiva ( $P_S$ ): 30 de junho (quinta-feira)
- Prova de Recuperação ( $P_{Rec}$ ): 05 de agosto (sexta-feira)

## 1.9 Calendário das provinhas

1<sup>a</sup> provinha: 10 de março (quinta-feira)

2<sup>a</sup> provinha: 08 de abril (sexta-feira)

3<sup>a</sup> provinha: 19 de maio (quinta-feira)

4<sup>a</sup> provinha: 13 de junho (segunda-feira)

## 1.10 Equipe

### Lucy Vitória Credidio Assali

Professora associada do Departamento de Física dos Materiais e Mecânica. Desenvolve pesquisa na área de propriedades físicas de materiais e nano-materiais semicondutores através de simulações computacionais que utilizam métodos empíricos e de primeiros princípios.

Escritório: Ed. Alessandro Volta, Bloco C, sala 210 (IFUSP).

Fone: 3091-7041

e-mail [lassali@if.usp.br](mailto:lassali@if.usp.br)

### Bruno Bueno Ipaves Nascimento

Aluno de mestrado no Departamento de Física dos Materiais e Mecânica. Desenvolve pesquisa na área teórica de propriedades eletrônicas e termodinâmicas de materiais.

Escritório: Ed. Alessandro Volta, Bloco C, sala 104 (IFUSP).

Fone: 3091-6988

e-mail: [bruno.bueno.nascimento@usp.br](mailto:bruno.bueno.nascimento@usp.br) ou [ipaves@if.usp.br](mailto:ipaves@if.usp.br)

## 1.11 Página da disciplina na internet

A disciplina contará com uma página na internet, onde diversas informações, além das contidas neste livreto, estarão anunciadas, tais como notas de aula, alterações de datas de provas e avaliações, notas das avaliações, gabaritos, etc. Deste modo, é importante consultá-la periodicamente. Para acessá-la entre na página do STOA:

<http://disciplinas.stoa.usp.br/course/view.php?id=12531>

**ATENÇÃO:** Para ter acesso à página da disciplina é necessário acessar o site <http://disciplinas.stoa.usp.br/> e fazer o login para que os e-mails e avisos referentes à disciplina possam ser recebidos.

## 1.12 Plantões de dúvidas

Os plantões para resolver dúvidas serão na sala 104 do Edifício Alessandro Volta, Bloco C, do IFUSP, de acordo com arranjo prévio, com o estagiário, efetuado via telefone, ou e-mail, ou STOA.

# Capítulo 2

## Coletânea de exercícios

### 2.1 Oscilador Harmônico

1. Uma partícula cuja massa é 0,50 kg move-se em um movimento harmônico simples. O período de oscilação é de 0,10 s e a amplitude do movimento é 0,10 m. Quando a partícula está a 0,050 m da posição de equilíbrio pede-se:

- (a) Qual é a magnitude da força que age sobre a partícula?  
(b) Qual é a sua energia cinética?

R.: (a)  $F = 10 \pi^2 \text{ N}$       (b)  $E = 0,75 \pi^2 \text{ J}$

2. Uma partícula oscila em movimento harmônico simples com período  $T = 2 \text{ s}$ . O sistema está, inicialmente, na posição de equilíbrio com velocidade escalar de 4 m/s no sentido de  $x$  crescente. Escrever as expressões da sua posição  $x(t)$ , da sua velocidade  $v(t)$  e da sua aceleração  $a(t)$ . Represente graficamente essas funções.

R.:  $x(t) = \frac{4}{\pi} \cos(\pi t - \pi/2)$ ;  $v(t) = -4 \sin(\pi t - \pi/2)$ ;  $a(t) = -4\pi \cos(\pi t - \pi/2)$ .

3. A posição de uma partícula é dada por  $x(t) = \sin(2t)$  (SI).

- (a) Qual é o valor máximo de  $x$ ? Qual é o primeiro instante depois de  $t = 0 \text{ s}$  em que ocorre esse máximo?  
(b) Encontre  $v(t)$ . Qual é a velocidade em  $t = 0 \text{ s}$ ?  
(c) Encontre  $a(t)$ . Qual é a aceleração em  $t = 0 \text{ s}$ ?  
(d) Qual é o valor máximo da aceleração?

R.: (a)  $x_{\text{máx}} = 1 \text{ m}$  e ocorre em  $t = \pi/4 \text{ s}$ .

(b)  $v(t) = 2 \cos(2t)$  e  $v(t = 0) = 2 \text{ m/s}$ .

(c)  $a(t) = -4 \sin(2t)$  e  $a(t = 0) = 0$ .

(d) Ela é máxima quando  $t = \frac{(2n + 1)\pi}{4} \text{ s}$ , onde  $n = \text{inteiro}$ .

Seu módulo é  $a = 4 \text{ m/s}^2$ .

4. Um corpo de massa 500 g executa um movimento harmônico simples com um período de 0,5 s. A sua energia total é de 5 J.

- (a) Qual é a amplitude das oscilações?
- (b) Qual é a velocidade máxima?
- (c) Qual é a aceleração máxima?

R.: (a)  $A = \sqrt{5}/(2\pi)$  m; (b)  $v_{\text{máx}} = 2\sqrt{5}$  m/s; (c)  $a_{\text{máx}} = 8\sqrt{5}\pi$  m/s<sup>2</sup>.

5. Uma partícula de 200 g está presa a uma mola de constante elástica  $k = 5$  N/m e pode oscilar livremente sobre uma superfície horizontal sem atrito. Se a massa for deslocada de 5 cm da sua posição de equilíbrio determine:

- (a) O período do seu movimento;
- (b) A máxima velocidade da partícula;
- (c) A máxima aceleração da partícula.
- (d) Expresse o deslocamento, a velocidade e a aceleração da partícula como função do tempo (SI).
- (e) Qual é a energia total do sistema?

R.: (a)  $T = 0,4\pi$  s; (b)  $v_{\text{máx}} = 0,25$  m/s; (c)  $a_{\text{máx}} = 1,25$  m/s<sup>2</sup>.  
(d)  $x(t) = 0,05 \cos(5t)$ ;  $v(t) = -0,25 \sin(5t)$ ;  $a(t) = -1,25 \cos(5t)$ .  
(e)  $E = 62,5 \times 10^{-4}$  J.

6. A uma mola de massa desprezível e constante  $k = 21$  N/m encontra-se presa ao teto. Na sua extremidade livre é pendurado um bloco de 300 g e o sistema é abandonado sob a ação do peso da massa e da força da mola. O sistema oscila harmonicamente, sem movimento pendular.

- (a) Qual é a elongação vertical ( $y_e$ ) da mola, distância entre o ponto de equilíbrio da mola sem o bloco e do ponto de equilíbrio do sistema massa-mola?
- (b) Qual é a frequência das oscilações? E a amplitude?
- (c) Escreva a equação do movimento e encontre  $y(t)$ .

R.: (a)  $y_e = \frac{mg}{k} = 1/7$  m; (b)  $\omega_o^2 = \frac{k}{m} = 70\text{s}^{-2} \rightarrow \omega_0 \approx 8,4$  s<sup>-1</sup> e  $A = y_e$ .  
(c)  $y(t) = \frac{mg}{k} [1 + \cos(\omega_0 t)] = \frac{1}{7} [1 + \cos(\sqrt{70} t)]$  (m).

7. Um bloco de massa  $M$ , capaz de deslizar com atrito desprezível sobre um trilho de ar horizontal, está preso a uma extremidade do trilho por uma mola de massa desprezível e constante elástica  $k$ , inicialmente relaxada. Uma bolinha de chiclete de massa  $m$ , lançada

em direção ao bloco com velocidade horizontal  $v$ , atinge-o no instante  $t = 0$  e fica grudada nele. Ache a expressão do deslocamento  $x(t)$  do sistema para  $t > 0$  s.

R.:  $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$  com  $A = \frac{m v}{(m + M)\omega_0}$ ,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m + M}}$ ,  $\phi = -\pi/2$ .

8. Um pêndulo simples é formado por uma massa de 12 kg, suspensa no teto por um fio ideal de comprimento  $L = 2,5$  m. O pêndulo está inicialmente parado quando, em  $t = 1$  s, a massa recebe um impulso lateral, que lhe confere uma velocidade de 1 cm/s. Escreva a equação diferencial que descreve o movimento, na aproximação de pequenas oscilações. Determine a posição angular  $\theta(t)$ , onde  $\theta$  é o ângulo que o fio faz com a direção vertical. Sugestão: utilize  $\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t + \varphi)$ .

R.:  $\theta(t) = 0,002 \sin(2t - 2)$ .

9. Um oscilador, com massa de 50 g e período 2,0 s, tem uma amplitude que decresce 5% em cada ciclo. Determine:

- (a) A constante de amortecimento;  
 (b) A fração da energia dissipada em cada ciclo;  
 (c) O tempo necessário para que a amplitude de oscilação caia à metade do valor inicial.

R.: (a)  $\rho = 2,565$  g/s; (b)  $\frac{\Delta E}{E} = 9,75\%$ ; (c)  $t = 27$  s.

10. O movimento de recuo de um canhão é amortecido sob o efeito de um sistema de molas imerso em óleo. A constante elástica do sistema é  $k = 7,0 \times 10^4$  N/m e a massa do cano do canhão é 700 kg. Determinar o coeficiente  $\rho$  da força de resistência viscosa do óleo para que o cano do canhão volte à posição de equilíbrio o mais depressa possível, sem oscilar.

R.:  $\rho = 1,4 \times 10^4$  N · s/m.

11. Um pêndulo simples oscila com período de 2 segundos e amplitude de  $2^\circ$ . Após dez oscilações completas a amplitude se reduz a  $1,5^\circ$ . Determine a constante de amortecimento  $\gamma$ .

R.:  $\gamma = 0,0288$  s<sup>-1</sup>.

12. Um corpo de massa  $m = 0,5$  kg, oscila sob a ação da força de uma mola, de constante elástica  $k = 50,5$  N/m, e de uma força amortecedora  $F = -(dx/dt)$ . Sabendo-se que em  $t = 0$  s o corpo é abandonado a uma distância  $x_0$  da posição de equilíbrio, pede-se:

- (a) Determine  $x(t)$ .

(b) Calcule a variação percentual de energia durante o primeiro ciclo de oscilação.

R.: (a)  $x(t) = A e^{-t} \cos(10t + \varphi)$ , com  $\varphi \simeq 5,7^\circ$  e  $A = \frac{x_0}{\cos \varphi}$ .

(b)  $\frac{\Delta E}{E} = -0,72 \Rightarrow 72\%$

13. Um corpo de massa  $m = 50$  g está preso a uma mola e oscila livremente com uma frequência angular de 20 rad/s. Este oscilador é posteriormente colocado num meio cujo coeficiente de atrito viscoso é  $\rho = 0,25$  kg/s. Nestas condições, o oscilador é mantido em regime estacionário devido a uma força externa  $F = F_0 \cos(\omega t)$  onde  $F_0 = 0,25$  N e  $\omega = 20$  rad/s. Determine para esta última situação:

(a) A equação diferencial que descreve o movimento, explicitando os valores numéricos dos coeficientes e indicando suas respectivas unidades;

(b) A amplitude do movimento;

(c) Em que instantes a elongação, em módulo, é máxima.

Subitamente, a força externa é desligada, num instante em que a elongação é máxima. Determine, para esta nova situação:

(d) A equação diferencial que descreve o movimento, explicitando os valores numéricos dos coeficientes e indicando suas respectivas unidades;

(e) A frequência angular de oscilação  $\omega'$ .

R.: (a)  $\ddot{x} + 5\dot{x} + 400x = 5 \cos(20t)$ ; (b)  $A = 0,05$  m; (c)  $t = \frac{(2n+1)\pi}{40}$  s.

(d)  $\ddot{x} + 5\dot{x} + 400x = 0$ ; (e)  $\omega' = 19,84$  s<sup>-1</sup>.

14. Um corpo de massa  $m = 50$  kg está preso a uma mola horizontal de constante elástica  $k = 1,125 \times 10^4$  N/m. Uma força harmônica, de amplitude  $F_{\text{máx}} = 45$  N, atua sobre o corpo ao longo da direção horizontal. Considerando-se a existência de atrito viscoso com o coeficiente  $\rho = 100,0$  N · s/m, determine para o regime estacionário:

(a) A frequência de ressonância;

(b) A amplitude máxima de ressonância;

(c) A defasagem entre o máximo da força harmônica e o máximo da amplitude.

R.: (a)  $\omega_R = 14,93$  s<sup>-1</sup>; (b)  $A_R = 0,03$  m; (c)  $\varphi \approx 86,2^\circ$ .

15. Mostre que o valor médio da variação da energia, no tempo, de um oscilador amortecido forçado é nulo, ou seja, mostre que  $\overline{\frac{dE}{dt}} = 0$ .

R.: A expressão que descreve a variação da energia total em função do tempo é:  $\frac{dE}{dt} = \dot{x}[m\ddot{x} + kx]$ . Como

$$\begin{aligned}x(t) &= A(\omega) \cos(\omega t + \varphi) \\ \dot{x}(t) &= -\omega A(\omega) \sin(\omega t + \varphi) \\ \ddot{x}(t) &= -\omega^2 x(t),\end{aligned}$$

então, substituindo estas equações na expressão de  $\frac{dE}{dt}$ , temos:

$$\frac{dE}{dt} = A^2 m \omega [\omega^2 - \omega_0^2] \sin^2[(\omega t + \varphi)] \Rightarrow \overline{\frac{dE}{dt}} = 0.$$

16. Considere um sistema massa-mola imerso em um meio viscoso numa oscilação harmônica forçada. Determine:

- (a) A potência média fornecida ao sistema massa-mola;
- (b) A potência fornecida ao sistema quando há ressonância.

R.: (a)  $\overline{P}(\omega) = \frac{\gamma F_0^2}{2m} \frac{\omega^2}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2]}.$

(b) Na ressonância  $\omega_R = \omega_0$  e  $\overline{P}(\omega) = \frac{F_0^2}{2m\gamma}.$

## 2.2 Ondas mecânicas e sonoras

17. A função de onda de uma onda harmônica numa corda, no SI, é dada por

$$y(x, t) = 0,001 \sin [62,8x + 314t]$$

- (a) Em que sentido a onda avança e qual a sua velocidade?
- (b) Calcular o comprimento de onda, a frequência e o período da onda;
- (c) Qual a aceleração máxima de um ponto da corda?

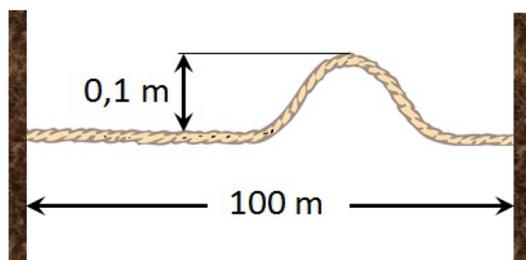
R.: (a) A onda avança no sentido negativo do eixo  $x$  com velocidade  $v = 5 \text{ m/s}$ ; (b)  $\lambda = 10 \text{ cm}$ ,  $\tau = 0,02 \text{ s}$  e  $\nu = 50 \text{ Hz}$ ; (c)  $a_{\text{máx}} = 98,6 \text{ m/s}^2$ .

18. Mostrar explicitamente que as seguintes funções são soluções da equação de onda:

- (a)  $y(x, t) = k(x + vt)$ ;  
 (b)  $y(x, t) = A e^{ik(x-vt)}$  ( $A$  é uma constante);  
 (c)  $y(x, t) = \ln[k(x - vt)]$ .

19. A figura abaixo mostra um pulso em uma corda com as extremidades fixas, de comprimento 100 m. O pulso está se deslocando com velocidade de 40 m/s e é descrito, no SI, pela função

$$y(x, t) = 0,1 e^{-4(x-vt)^2},$$

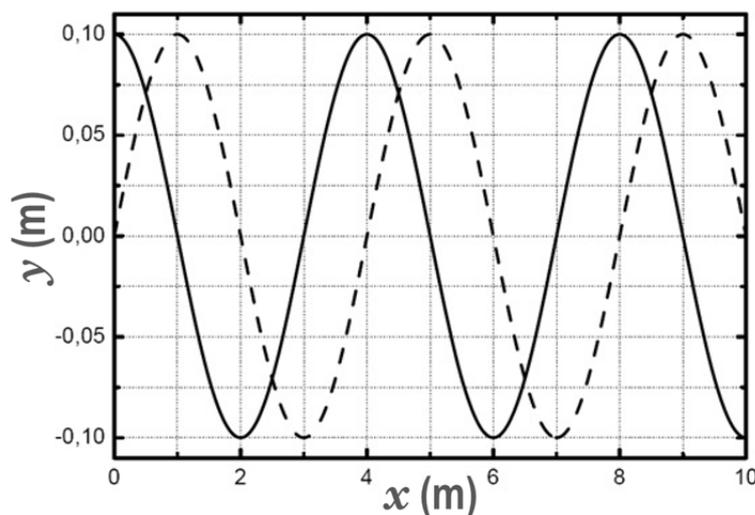


- (a) Qual o valor de  $x$ , para o qual a velocidade transversal da corda é máxima, em  $t = 0$ ?  
 (b) Qual a função que representa o pulso refletido, em um instante  $t$ , logo após sua primeira reflexão?  
 (c) Se a massa da corda é 2 kg, qual a tensão  $T$  nesta?  
 (d) Escreva uma equação para  $y(x, t)$  que descreva numericamente uma onda senoidal, se deslocando na direção negativa de  $x$ , com  $\lambda = 5$  m e mesma amplitude da onda anterior, em uma corda muito longa, feita do mesmo material, com a mesma tensão acima, e tal que  $y(0, 0) = 0$ .

R.: (a)  $x = \frac{\sqrt{2}}{4}$  m; (b)  $y(x, t) = -0,1 e^{-4(x+vt)^2}$  m; (c)  $T = 32$  N;  
 (d)  $y(x, t) = 0,1 \sin \left[ \frac{2\pi}{5}x + 16\pi t \right]$  m.

20. A figura abaixo mostra duas fotografias, tiradas em instantes de tempo diferentes, de uma corda na qual se propaga, no sentido positivo do eixo  $x$ , uma onda harmônica transversal  $y(x, t)$ . A primeira fotografia (linha cheia) foi tirada no instante de tempo  $t = 0$  e a segunda fotografia (linha tracejada) no instante  $t = 0,50$  s.

- (a) Determine a velocidade  $v$  de propagação da onda na corda;



- (b) Determine a amplitude, o número de onda, a frequência angular e a constante de fase, escrevendo a equação do perfil de onda  $y(x, t)$ ;
- (c) Determine a velocidade transversal máxima ( $v_{y,máx}$ ), de um ponto da corda.

R.: (a)  $v = 2 \text{ m/s}$ ; (b)  $A = 0,1 \text{ m}$ ,  $k = 0,5\pi \text{ m}^{-1}$ ,  $\omega = \pi \text{ s}^{-1}$ ,  $\delta = 0$ ,  
 $y(x, t) = 0,1 \cos \left[ \frac{\pi}{2}x - \pi t \right] \text{ m}$ ; (c)  $v_{y,máx} = 0,1\pi \text{ m/s}$ .

21. O perfil de uma onda transversal progressiva, em uma corda muito longa, é dado por:

$$y(x, t) = 2,0 \times 10^{-2} \cos [2\pi (0,5x + 10t)] \quad (\text{no SI}).$$

Determine:

- (a) A amplitude de vibração desta corda;
- (b) O comprimento de onda e a frequência (em Hz);
- (c) O sentido e a velocidade de propagação da onda;
- (d) A distância, ao longo da corda, entre dois pontos cuja diferença de fase é  $\pi/6$ .

R.: (a)  $A = 2,0 \times 10^{-2} \text{ m}$ ; (b)  $\lambda = 2 \text{ m}$  e  $\nu = 10 \text{ Hz}$ ; (c)  $v = 20 \text{ m/s}$  no sentido negativo do eixo  $x$ ; (d)  $x_2 - x_1 = \frac{1}{6} = 0,17 \text{ m}$ .

22. Determine a amplitude da onda resultante da combinação de duas ondas senoidais que se propagam no mesmo sentido, possuem mesma frequência, têm amplitudes de 3,0 cm e 4,0 cm, e a onda de maior amplitude está com a fase adiantada de  $\frac{\pi}{2}$  rad.

R.:  $y(x, t) = 5,0 \text{ sen}(kx - \omega t + 0,93) \text{ cm}$ .

23. Uma onda estacionária resulta da soma de duas ondas transversais progressivas dadas, no SI, por:

$$\begin{cases} y_1(x, t) = 0,05 \cos(\pi x - 4\pi t) \\ y_2(x, t) = 0,05 \cos(\pi x + 4\pi t) \end{cases}$$

- (a) Qual é o menor valor positivo de  $x$  que corresponde a um nodo?  
(b) Em quais instantes, no intervalo de tempo  $0 \leq t \leq 0,5 \text{ s}$ , a partícula em  $x = 0$  terá velocidade nula?

R.: (a)  $x = 0,5 \text{ m}$ ; (b)  $t = 0 \text{ s}$ ,  $t = 0,25 \text{ s}$  e  $t = 0,5 \text{ s}$ .

24. Uma corda que está presa em suas extremidades em  $x = 0$  e  $x = L$ , submetida a uma tensão de  $96 \text{ N}$ , oscila no terceiro harmônico de uma onda estacionária. O deslocamento transversal da corda é dado, no SI, por:

$$y(x, t) = 5 \text{ sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) \text{ sen}(6\pi t) .$$

- (a) Qual é o comprimento  $L$  da corda?  
(b) Qual é a massa da corda?  
(c) Calcule a velocidade transversal máxima de um ponto situado sobre um ventre da onda;  
(d) Se a corda oscilar no quinto harmônico, qual será o período de oscilação?

R.: (a)  $L = 6 \text{ m}$ ; (b)  $m = 4,0 \text{ kg}$ ; (c)  $v_{y,máx} = 30\pi \text{ m/s}$ ; (d)  $\tau_5 = 0,2 \text{ s}$ .

25. Uma corda oscila de acordo com a equação

$$y(x, t) = 12 \text{ sen}\left(\frac{\pi}{3}x\right) \cos(40\pi t) ,$$

onde as unidades utilizadas são o centímetro e o segundo.

- (a) Quais são a amplitude e a velocidade escalar das ondas cuja superposição dá essa oscilação?  
(b) Qual é a distância  $D$  entre os nodos?  
(c) Qual é a velocidade de uma partícula da corda na posição  $x = 1,5 \text{ cm}$  quando  $t = \frac{9}{8} \text{ s}$ ?

R.: (a)  $A = 6 \text{ cm}$  e  $v = 120 \text{ cm/s}$ ; (b)  $D = 3 \text{ cm}$ ; (c)  $\frac{\partial y}{\partial t} = 0$ .

26. Uma corda uniforme, de 20 m de comprimento e massa de 2 kg, está esticada sob uma tensão de 10 N. Faz-se oscilar transversalmente uma extremidade da corda, com amplitude de 3 cm e frequência de 5 oscilações por segundo. O deslocamento inicial da extremidade é de 1,5 cm para cima.

- (a) Ache a velocidade de propagação  $v$  e o comprimento de onda  $\lambda$  da onda progressiva gerada na corda;
- (b) Escreva, como função do tempo, o deslocamento transversal  $y$  de um ponto da corda situado à distância  $x$  da extremidade que se faz oscilar, após ser atingido pela onda e antes que ela chegue à outra extremidade;
- (c) Calcule a intensidade  $I$  da onda progressiva gerada.

R.: (a)  $v = 10 \text{ m/s}$  e  $\lambda = 2,0 \text{ m}$ ; (b)  $y(x, t) = 0,03 \cos(\pi x - 10\pi t + \frac{\pi}{3})$ ;  
(c)  $I = \frac{9\pi^2}{200} \text{ W}$ .

27. A corda de um violino tem uma densidade linear de massa de 0,5 g/m e está sujeita a uma tensão de 80 N, afinada para uma frequência  $\nu = 660 \text{ Hz}$  no primeiro harmônico.

- (a) Qual a velocidade de propagação de onda nessa corda?
- (b) Qual o comprimento da corda?
- (c) Para tocar a nota "lá", cuja frequência é 880 Hz, prende-se a corda com um dedo, de forma a utilizar apenas uma fração  $f$  de seu comprimento. Qual o valor de  $f$ ?

R.: (a)  $v = 400 \text{ m/s}$ ; (b)  $L = \frac{10}{33} \text{ m}$ ; (c)  $f = \frac{3}{4}$ .

28. Uma corda sob tensão  $T_i$  oscila no terceiro harmônico com uma frequência  $\nu_3$ , e as ondas na corda tem comprimento de onda  $\lambda_3$ . Se aumentarmos a tensão da corda para  $T_f = 4T_i$ , de forma que a corda continue a oscilar no terceiro harmônico, qual será:

- (a) A frequência de oscilação em termos de  $\nu_3$ ?
- (b) O comprimento da onda em termos de  $\lambda_3$ ?

R.: (a)  $\nu = 2\nu_3$ ; (b)  $\lambda = \lambda_3$ .

29. Uma corda de 120 cm de comprimento é esticada entre suportes fixos. Quais são os três comprimentos de onda mais longos, para ondas estacionárias, nesta corda? Esboce as ondas estacionárias correspondentes. O que muda, em relação aos três comprimentos de onda mais longos, se esta mesma corda estiver fixa em apenas

um suporte, de forma que a outra extremidade seja presa em um anel, sem peso, que pode deslizar sem atrito ao longo de uma haste?

R.: Fixa nas extremidades:  $\lambda_1 = 2,40$  m,  $\lambda_2 = 1,20$  m,  $\lambda_3 = 0,80$  m.

R.: Fixa em uma extremidade:  $\lambda_1 = 4,80$  m,  $\lambda_2 = 1,60$  m,  $\lambda_3 = 0,96$  m.

30. Uma corda, submetida a uma tensão de 200 N e presa em ambas as extremidades, oscila no segundo harmônico de uma onda estacionária. O deslocamento da corda é dado, no SI, por:

$$y(x, t) = \frac{1}{10} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} x \right) \operatorname{sen} (12\pi t) ,$$

onde  $x = 0$  numa das extremidades da corda.

- (a) Qual é o comprimento da corda?  
(b) Qual é a velocidade escalar das ondas na corda?  
(c) Qual é a massa da corda?

R.: (a)  $L = 4$  m; (b)  $v = 24$  m/s; (c)  $m = \frac{25}{18} \approx 1,39$  kg.

31. Um alto-falante de um aparelho de som emite 1 W de potência sonora na frequência  $\nu = 100$  Hz. Admitindo que o som se distribui uniformemente em todas as direções, determine, num ponto situado a 2 m de distância do alto-falante:

- (a) O nível sonoro ( $\beta$ ) em db;  
(b) A amplitude da onda de pressão;  
(c) A amplitude da onda de deslocamento (utilize  $\rho_{\text{Ar}} = 1,3$  kg/m<sup>3</sup> e  $v_{\text{som}} = 340$  m/s);  
(d) A que distância do alto-falante o nível sonoro estaria 10 db abaixo do calculado em (a).

R.: (a)  $\beta = 103$  db; (b)  $P = 4,2$  N/m<sup>2</sup>; (c)  $U = 0,015$  mm;  
(d)  $r = 6,3$  m

32. Uma experiência de demonstração divertida consiste em mudar a tonalidade da voz enchendo a boca de gás hélio (He): uma voz grave transforma-se em aguda (cuidado: não procure fazer isso por sua conta! Inalar hélio é perigoso, podendo levar a sufocação). Para explicar o efeito, admita que os componentes de onda associados a voz são determinados pelas dimensões das cordas vocais, laringe e boca, estas funcionando como cavidades ressonantes, de modo que a variação de tonalidade seria devida unicamente à variação da velocidade do som (embora isto não seja bem correto).

- (a) Calcule a velocidade do som no gás He a  $T = 20\text{ }^\circ\text{C}$ , sabendo que a constante universal dos gases  $R$  vale  $8,314\text{ J}/(\text{mol K})$  e que o He é um gás monoatômico de massa atômica  $m = 4\text{ g/mol}$  e  $\gamma = 1,66$ ;
- (b) Explique o efeito, calculando a razão entre as frequências do som no He e no ar, para o mesmo comprimento de onda (adote  $v_{\text{Ar}} = 340\text{ m/s}$ );

R.: (a)  $v = 1006\text{ m/s}$ ; (b)  $\frac{\nu_{\text{He}}}{\nu_{\text{Ar}}} = 2,96$

33. Que comprimento deve ter um tubo de órgão, aberto numa extremidade e fechado na outra, para produzir, como tom fundamental, a nota dó da escala musical média,  $\nu = 262\text{ Hz}$  a  $15\text{ }^\circ\text{C}$  quando a velocidade do som no ar é de  $341\text{ m/s}$ ? Qual é a variação de frequência  $\Delta\nu$  quando a temperatura sobe para  $25\text{ }^\circ\text{C}$ ? Dados:  $m_{\text{Ar}} = 28,9\text{ g/mol}$ ,  $\gamma_{\text{Ar}} = 1,4$  e  $R = 8,314\text{ J}/(\text{mol K})$ .

R.:  $L = 32,5\text{ cm}$  e  $\Delta\nu = 4,8\text{ Hz}$

34. O tubo de Kundt, que costumava ser empregado para medir a velocidade do som em gases, é um tubo de vidro que contém o gás, fechado numa extremidade por uma tampa M que se faz vibrar com uma frequência  $\nu$  conhecida (por exemplo, acoplando-a a um alto-falante) na outra por um pistão que se faz deslizar, variando o comprimento do tubo. O tubo contém um pó fino (serragem, por exemplo). Ajusta-se o comprimento do tubo com o auxílio do pistão até que ele entre em ressonância com a frequência  $\nu$ , o que se nota pelo reforço da intensidade sonora emitida. Observa-se então que o pó fica acumulado em montículos igualmente espaçados, de espaçamento  $\Delta\ell$ , que se pode medir.

- (a) A que correspondem as posições dos topos dos montículos?
- (b) Qual é a relação entre  $\Delta\ell$ ,  $\nu$  e a velocidade do som no gás?
- (c) Com o tubo cheio de  $\text{CO}_2$  a  $20\text{ }^\circ\text{C}$  e  $\nu = 880\text{ Hz}$ , o espaçamento médio medido é de  $15,2\text{ cm}$ . Qual é a velocidade do som no  $\text{CO}_2$  a  $20\text{ }^\circ\text{C}$ ?

R.: (c)  $v \approx 267,5\text{ m/s}$ .

35. Um trem se desloca com velocidade igual a  $25\text{ m/s}$  e o ar está calmo. A frequência da nota do apito do trem é igual a  $400\text{ Hz}$ , emitida no centro do mesmo. Considere a velocidade do som no referencial de repouso da atmosfera como sendo  $340\text{ m/s}$ . Qual é o comprimento de onda das ondas sonoras:

(a) Na parte dianteira do trem?

(b) Na parte traseira do trem?

Qual é a frequência do som que um ouvinte, parado em uma estação de trem, escuta quando ele:

(c) Vê o trem se aproximando?

(d) Vê o trem se afastando?

R.: (a)  $\lambda = 0,79$  m; (b)  $\lambda = 0,91$  m; (c)  $\nu = 431,7$  Hz;

(d)  $\nu = 372,6$  Hz.

36. Um trem se desloca com velocidade igual a 30 m/s e o ar está calmo. A frequência da nota do apito do trem é igual a 262 Hz. Considere a velocidade do som no referencial de repouso da atmosfera como sendo 340 m/s. Qual é a frequência ouvida por um passageiro, no interior de um trem que se move em sentido contrário ao do primeiro trem, a 18 m/s, supondo que:

(a) Os trens se aproximam?

(b) Os trens se afastam?

R.: (a)  $\nu \approx 303$  Hz ; (b)  $\nu \approx 228$  Hz.

37. Um trem-bala move-se com velocidade de 60 m/s para leste. O apito do trem emite um som com frequência 400 Hz. Considere a velocidade do som no referencial de repouso da atmosfera como sendo 340 m/s.

(a) Determine a frequência do som do apito que uma pessoa na estação ouve ao observar o trem partir;

(b) Considere, agora, a presença de vento soprando para oeste com velocidade de 10 m/s. Determine a frequência que a pessoa na estação irá detectar;

(c) Considere, agora, que o trem move-se em uma trajetória circular. Qual a frequência do som percebida por alguém no centro da circunferência descrita pelo trem?

R.: (a)  $\nu_S = 340$  Hz; (b)  $\nu_P = 341$  Hz; (c)  $\nu_C = 400$  Hz.

38. Dois diapasões idênticos podem oscilar a 440 Hz. Um indivíduo está localizado em algum lugar na linha entre os dois diapasões. Considerando que a velocidade do som, no referencial de repouso da atmosfera, é 330 m/s, calcule a frequência de batimentos captada por esse indivíduo se:

- (a) Ele permanece parado e os diapasões se movem para a direita com velocidade de 30 m/s;
- (b) Os diapasões estiverem parados e o indivíduo se movendo para a direita com velocidade de 30 m/s.

R.: (a) 80,7 Hz; (b) 80,0 Hz.

39. Dois trens viajam em sentidos opostos, sobre trilhos paralelos, com velocidades de mesma magnitude. Um deles vem apitando. A frequência do apito percebida por um passageiro do outro trem varia entre os valores de 348 Hz, quando estão se aproximando, e 259 Hz, quando estão se afastando. A velocidade do som no ar é de 340 m/s.

- (a) Qual é a magnitude da velocidade dos trens (em km/h)?
- (b) Qual é a frequência do apito?

R.: (a)  $v \approx 90,7$  km/h; (b)  $\nu \approx 300$  Hz.

### 2.3 Temperatura e Calor

40. (Moysés) Uma barra retilínea é formada por uma parte de latão soldada em outra de aço. A  $20^\circ\text{C}$ , o comprimento total da barra é de 30 cm, dos quais 20 cm de latão e 10 cm de aço. Os coeficientes de dilatação linear são  $1,9 \times 10^{-5} (\text{°C})^{-1}$  para o latão e  $1,1 \times 10^{-5} (\text{°C})^{-1}$  para o aço. Qual é o coeficiente de dilatação linear da barra?

R.:  $\alpha = 1,63 \times 10^{-5} (\text{°C})^{-1}$

41. (Moysés) Num relógio de pêndulo, o pêndulo é uma barra metálica, projetada para que seu período de oscilação seja igual a 1 s. Verifica-se que, no inverno, quando a temperatura média é de  $10^\circ\text{C}$ , o relógio adianta, em média, 55 s por semana. No verão, quando a temperatura média é de  $30^\circ\text{C}$ , o relógio atrasa, em média, 1 minuto por semana. Encontre:

- (a) O coeficiente de dilatação linear do metal do pêndulo;
- (b) A temperatura que o relógio funcionaria com precisão.

R.: (a)  $\alpha = 9,5 \times 10^{-6} (\text{°C})^{-1}$ ; (b)  $T = 19,6^\circ\text{C}$

Resolução:

O pêndulo em questão é um pêndulo físico. Portanto, se o comprimento da barra é  $\ell$ , seu centro de massa está em  $\ell/2$  e o período

do pêndulo, como projetado (temperatura  $T_0$ ), pode ser calculado através de:

$$\tau_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2\ell}{3g}} = 2\pi\sqrt{\frac{L_0}{g}}, \quad \text{onde } L_0 = L_{\text{equivalente}} = \frac{2\ell}{3}$$

$$\implies 1 = (2\pi)^2 \left[ \frac{L_0}{10} \right] \implies L_0 = 0,253303 \text{ m}$$

**Inverno:** Sabendo que o relógio, em uma semana, adianta 55 s, vamos calcular a variação do período  $\Delta\tau_{0i}$  utilizando regra de três:

$$\left\{ \begin{array}{l} 55 \text{ s} \implies (7)(24)(60)(60) \text{ s} \\ \Delta\tau_{0i} \implies 1 \text{ s} \end{array} \right\} \implies \begin{array}{l} \Delta\tau_{0i} = 9,09 \times 10^{-5} \text{ s} \\ \tau_i = 0,9999091 \text{ s} \end{array}$$

Assim, sabendo o período de oscilação do pêndulo no inverno, podemos calcular o comprimento da barra

$$0,9999091 = (2\pi)^2 \left[ \frac{L_i}{10} \right] \implies L_i = 0,253280 \text{ m}$$

e, com isso, temos que no inverno (temperatura  $T = 10^\circ\text{C}$ ), a variação de comprimento da barra é  $\Delta L_i = L_i - L_0 = -2,3 \times 10^{-5} \text{ m}$ , levando à

$$\Delta L_i = \alpha L_0 (10 - T_0) = -2,3 \times 10^{-5} \text{ m}$$

**Verão:** Sabendo que o relógio, em uma semana, atrasa 1 minuto, vamos calcular a variação do período  $\Delta\tau_{0v}$  utilizando regra de três:

$$\left\{ \begin{array}{l} 60 \text{ s} \implies (7)(24)(60)(60) \text{ s} \\ \Delta\tau_{0v} \implies 1 \text{ s} \end{array} \right\} \implies \begin{array}{l} \Delta\tau_{0v} = 9,92 \times 10^{-5} \text{ s} \\ \tau_v = 1,0000992 \text{ s} \end{array}$$

Assim, sabendo o período de oscilação do pêndulo no verão, podemos calcular o comprimento da barra

$$1,0000992 = (2\pi)^2 \left[ \frac{L_v}{10} \right] \implies L_v = 0,253328 \text{ m}$$

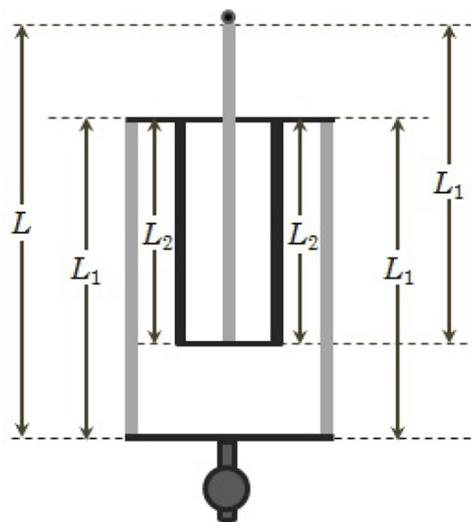
e, com isso, temos que no verão (temperatura  $T = 30^\circ\text{C}$ ), a variação de comprimento da barra é  $\Delta L_v = L_v - L_0 = 2,5 \times 10^{-5} \text{ m}$ , levando à

$$\Delta L_v = \alpha L_0 (30 - T_0) = 2,5 \times 10^{-5} \text{ m}$$

Juntando as equações para  $\Delta L_i$  e  $\Delta L_v$ , temos o sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta L_i = -2,3 \times 10^{-5} = \alpha L_0(10 - T_0) \\ \Delta L_v = 2,5 \times 10^{-5} = \alpha L_0(30 - T_0) \end{array} \right\} \implies T_0 = 19,6^\circ\text{C} \quad \alpha = 9,5 \times 10^{-6} (\text{°C})^{-1}$$

42. (Moysés) A figura abaixo mostra um esquema possível de construção de um pêndulo cujo comprimento  $L$  não seja afetado pela dilatação térmica. As três barras cinzas verticais, cada uma com comprimento  $L_1$ , são feitas de aço, cujo coeficiente de dilatação térmica linear é  $1,1 \times 10^{-5} (\text{°C})^{-1}$ . As duas barras pretas verticais, de comprimento  $L_2$ , são feitas de alumínio, cujo coeficiente de dilatação térmica linear é  $2,3 \times 10^{-5} (\text{°C})^{-1}$ . Determine  $L_1$  e  $L_2$  de modo a manter  $L = 0,5$  m. R.:  $L_1 = 47,9$  cm e  $L_2 = 45,8$  cm



43. (Moysés) Um tubo cilíndrico delgado de seção uniforme, feito de um material de coeficiente de dilatação linear  $\alpha$ , contém um líquido de coeficiente de dilatação volumétrica  $\beta$ . À temperatura  $T_0$ , a altura da coluna líquida é  $h_0$ .
- (a) Qual é a variação  $\Delta h$  da altura da coluna quando a temperatura sobe de  $1^\circ\text{C}$ ?
- (b) Se o tubo é de vidro ( $\alpha = 9 \times 10^{-6} (\text{°C})^{-1}$ ) e o líquido é mercúrio ( $\beta = 1,8 \times 10^{-4} (\text{°C})^{-1}$ ), mostre que este sistema não constitui um bom termômetro, do ponto de vista prático, calculando  $\Delta h$  para  $h_0 = 10$  cm.

R.: (a)  $\Delta h = h_0(\beta - 2\alpha)$  e (b)  $\Delta h = 0,016$  mm.

44. (Moysés) Uma chaleira de alumínio, contendo água em ebulição a  $100^\circ\text{C}$ , está sobre uma chama. O raio do fundo da chaleira é de  $7,5$  cm e sua espessura é de  $2$  mm. A condutividade térmica do

alumínio é  $0,49 \text{ cal}/(\text{s cm } ^\circ\text{C})$ . A chaleira vaporiza 1 litro de água em 5 minutos. O calor de vaporização da água, a  $100^\circ\text{C}$ , é de  $540 \text{ cal/g}$ . A que temperatura está o fundo da chaleira? Despreze as perdas pelas superfícies laterais.

R.:  $T = 104,2^\circ\text{C}$

45. (Moysés) Num país frio, a temperatura sobre a superfície de um lago caiu a  $-10^\circ\text{C}$  e começa a formar-se uma camada de gelo sobre o lago. A água sob o gelo permanece a  $0^\circ\text{C}$ : o gelo flutua sobre ela e a camada de espessura crescente em formação serve como isolante térmico, levando ao crescimento gradual de novas camadas de cima para baixo.

(a) Exprima a espessura  $\ell$  da camada de gelo formada, decorrido um tempo  $t$  do início do processo de congelamento, como função da condutividade térmica  $k$  do gelo, da sua densidade  $\rho_{\text{gelo}}$  e calor latente de fusão  $L_f$ , bem como da diferença de temperatura  $\Delta T$  entre a água e a atmosfera acima do lago. Sugestão: Considere a agregação de uma camada de espessura  $dx$  à camada já existente, de espessura  $x$ , e integre em relação a  $x$ .

(b) No exemplo acima, calcule a espessura da camada de gelo 1 h após iniciar-se o congelamento, sabendo que  $k = 4 \times 10^{-3} \text{ cal}/(\text{cm } ^\circ\text{C})$ ,  $\rho_{\text{gelo}} = 0,92 \text{ g/cm}^3$  e  $L_f = 80 \text{ cal/g}$ .

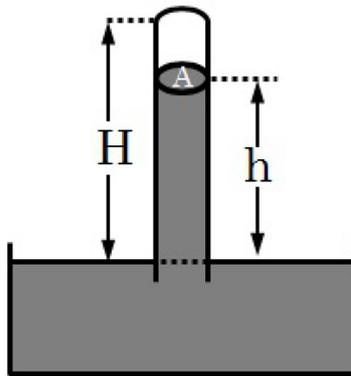
R.: (a)  $\ell = \sqrt{\frac{2k(\Delta T)t}{\rho_{\text{gelo}}L_f}}$  e (b)  $\ell = 1,98 \text{ cm}$

### 2.3.1 Gases Ideais e Segunda Lei da Termodinâmica

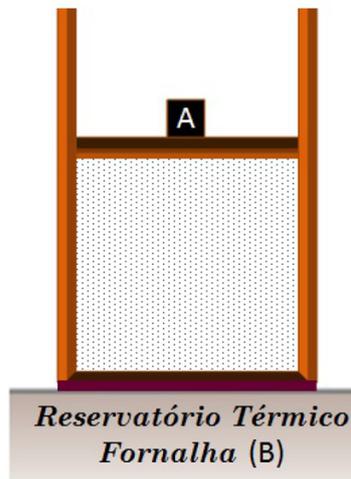
46. O tubo de vidro de um barômetro de mercúrio tem secção reta de área  $A = 1 \text{ cm}^2$  e altura  $H = 90 \text{ cm}$  acima da superfície livre do reservatório de mercúrio. A altura da coluna barométrica é de  $h = 735 \text{ mm}$ , num dia em que a temperatura ambiente é de  $20^\circ\text{C}$  e a pressão atmosférica é de  $750 \text{ mm/Hg}$ . Sabendo que  $\rho_{\text{Hg}} = 13,6 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ , calcule a quantidade de ar (em moles) aprisionada no espaço acima da coluna de mercúrio. (Moysés)

R.:  $n = 1,3 \times 10^{-5} \text{ moles}$

47. Uma caldeira de uma máquina (figura abaixo), com paredes adiabáticas, contém uma certa quantidade de gás aprisionada entre um êmbolo adiabático, sem atrito e massa desprezível, sustentando um bloco



de chumbo (A) na parte superior, e um fundo diatérmico em contato com uma fornalha (B). A fornalha comporta-se como um reservatório térmico e é, inicialmente, mantida a uma temperatura constante. Explique a relação entre temperatura ( $T$ ), pressão ( $P$ ), volume ( $V$ ) e energia interna ( $U$ ) iniciais e finais nas seguintes circunstâncias:



- (a) O bloco é trocado por um mais pesado;
  - (b) Retira-se o bloco;
  - (c) Aumenta-se a temperatura da fornalha;
  - (d) Diminui-se a temperatura da fornalha.
48. Um mol de um gás ideal ( $C_V = \frac{3}{2}R$ ) se expande lentamente até ocupar um volume igual ao dobro do volume inicial, realizando um trabalho igual a 300 J neste processo. Calcule o calor fornecido ao gás e a variação da energia interna do gás, sabendo que o processo é:
- (a) Isotérmico;    (b) Adiabático;    (c) Isobárico.
- R.: (a)  $\Delta U = 0$  e  $Q = 300$  J; (b)  $\Delta U = -300$  J e  $Q = 0$ ;  
 (c)  $\Delta U = 450$  J e  $Q = 750$  J.

49. Dois recipientes fechados estão ligados um ao outro por um tubo capilar de volume desprezível. Os recipientes, de mesma capacidade de  $1 \ell$ , contêm gás oxigênio (massa molecular  $32 \text{ g}$ ), inicialmente à temperatura de  $25^\circ\text{C}$  e pressão de  $1 \text{ atm}$ . (adaptado do Moysés)
- Calcule a massa, em gramas, de  $\text{O}_2$  contida nos recipientes;
  - Determine o novo valor da pressão na situação em que o gás de um dos recipientes é aquecido até a temperatura de  $100^\circ\text{C}$ , enquanto a temperatura do gás do outro recipiente permanece inalterada;
  - Considerando a situação descrita em (b) e desprezando a condução de calor através do capilar, determine quantas gramas de  $\text{O}_2$  passam de um lado para o outro.

R.: (a)  $m = 2,62 \text{ g}$ ; (b)  $P = 1,1 \text{ atm}$ ; (c)  $\Delta m = 0,15 \text{ g}$ .

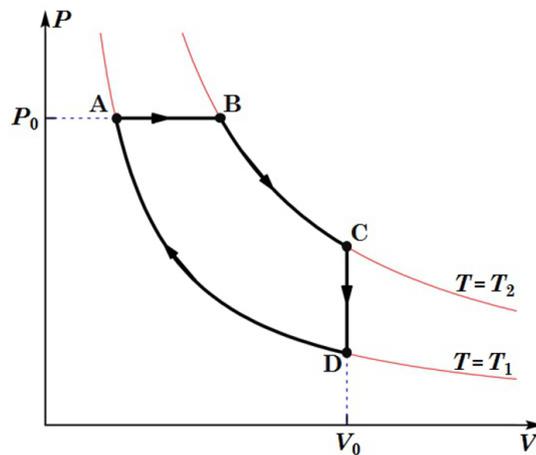
50. (Moysés) Um mol de um gás ideal, com  $\gamma = 7/5$ , está contido num recipiente, inicialmente a  $1 \text{ atm}$  e  $27^\circ\text{C}$ . A partir deste estado inicial, o gás é, sucessivamente: (i) comprimido isobaricamente até  $3/4$  do volume inicial  $V_0$ ; (ii) aquecido, a volume constante, até voltar à temperatura inicial; (iii) expandido a pressão constante até voltar ao volume inicial; (iv) resfriado, a volume constante, até voltar à pressão normal (inicial). Pede-se:
- Desenhe o diagrama  $P$ - $V$  associado ao ciclo;
  - Calcule o trabalho total realizado pelo gás;
  - Calcule o calor total fornecido ao gás nas etapas (i) e (ii);
  - Calcule as temperaturas máxima e mínima atingidas;
  - Calcule a variação da energia interna no processo (i) + (ii).

R.: (b)  $W = 208 \text{ J}$ ; (c)  $Q = 624 \text{ J}$ ; (d)  $T_{\text{máx}} = 400 \text{ K}$  e  $T_{\text{mín}} = 225 \text{ K}$ ;  
(e)  $\Delta U = 0$ .

51. (Moysés) Um mol de um gás ideal descreve o ciclo ABCDA, no plano ( $P, V$ ), representado na figura abaixo, onde  $T = T_1$  e  $T = T_2$  são isotermas. Calcule o trabalho total associado ao ciclo, em função de  $P_0, V_0, T_1$  e  $T_2$ .

$$\text{R.: } W = R(T_2 - T_1) + RT_2 \ln\left(\frac{P_0 V_0}{R T_2}\right) - RT_1 \ln\left(\frac{R T_1}{P_0 V_0}\right).$$

52. Gás nitrogênio ( $\text{N}_2$ ), contido no interior de um recipiente que pode se expandir, é resfriado de  $50^\circ\text{C}$  até  $10^\circ\text{C}$ , mantendo-se a pressão constante e igual a  $3 \times 10^5 \text{ Pa}$ . O calor total liberado pelo gás é

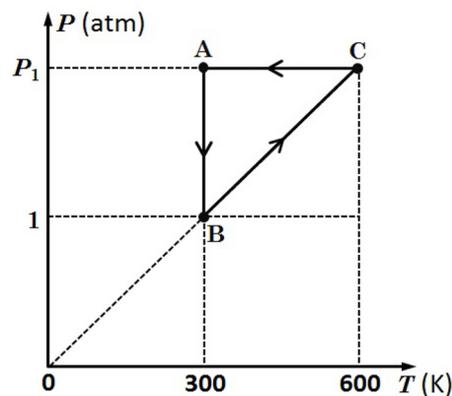


igual a  $2,5 \times 10^4$  J. Suponha que o gás possa ser tratado como um gás ideal e utilize  $R = 8,31$  J/(mol K) para a constante universal dos gases ideais.

- Calcule o número de moles do gás;
- Calcule a variação da energia interna do gás;
- Ache o trabalho realizado pelo gás;
- Qual seria o calor libertado pelo gás, para a mesma variação de temperatura, caso o volume permanecesse constante?

R.: (a)  $n = 21,57$  moles; (b)  $\Delta U = -32,17$  kJ; (c)  $W = 7,17$  kJ;  
(d)  $Q = 32,17$  kJ.

53. (Moisés) 0,1 mol de um gás ideal, com  $C_V = \frac{3}{2}R$ , descreve o ciclo representado na figura abaixo, no plano  $(P, T)$ .



- Represente o ciclo no plano  $(P-V)$ , indicando  $P$  (em atm) e  $V$  (em  $\ell$ ), associados aos pontos A, B e C;
- Calcule  $\Delta W$ ,  $\Delta Q$  e  $\Delta U$  para cada uma das etapas AB, BC e CA e para o ciclo.

R.: (b)

Processo	$\Delta W$ (J)	$\Delta Q$ (J)	$\Delta U$ (J)
AB	173	173	0
BC	0	374	374
CA	-249	-623	-374
Ciclo	-76	-76	0

54. (Moysés) Um mol de um gás ideal, com  $C_V = \frac{3}{2}R$ , a  $17^\circ\text{C}$ , tem sua pressão reduzida à metade por um dos quatro processos seguintes: (i) a volume constante; (ii) isotermicamente; (iii) adiabaticamente; (iv) por expansão livre. Para um volume inicial  $V_i$ , calcule, para cada um dos quatro processos, o volume e a temperatura finais,  $\Delta W$  e  $\Delta U$ . Utilize  $R = 8,31 \text{ J}/(\text{mol K})$ .

R.:

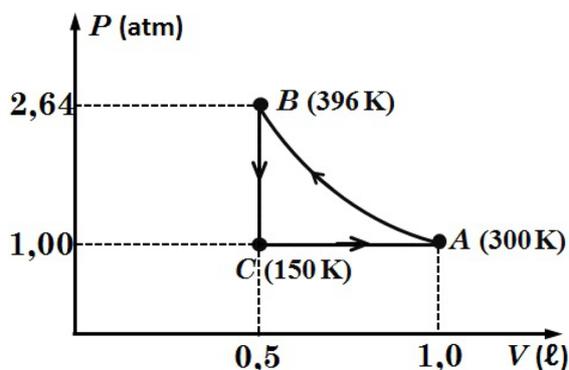
Processo	$V_{\text{final}}$	$T_{\text{final}}$ (K)	$\Delta W$ (J)	$\Delta U$ (J)
(i)	$V_i$	145	0	-1807
(ii)	$2V_i$	290	1671	0
(iii)	$1,52V_i$	219	-885	-885
(iv)	$2V_i$	290	0	0

55. (Moysés)  $1 \text{ l}$  de  $\text{H}_2$  (para o qual  $\gamma = 7/5$ ), à pressão de  $1 \text{ atm}$  e temperatura de  $27^\circ\text{C}$ , é comprimido adiabaticamente até o volume de  $0,5 \text{ l}$  e depois resfriado, a volume constante, até voltar a pressão inicial. Finalmente, por expansão isobárica, volta à situação inicial.

- (a) Represente o processo no plano  $(P, V)$ , indicando  $P$  (atm),  $V$  (l) e  $T$  (K) para cada vértice do diagrama;  
 (b) Calcule o trabalho total realizado;  
 (c) Calcule  $\Delta U$  e  $\Delta Q$  para cada etapa.

R.: (a)

(b)  $W = -30,2 \text{ J}$



(c)

Processo	$\Delta U$ (J)	$\Delta Q$ (J)
AB	80,9	0
BC	-207,5	-207,5
CA	126,6	177,3

56. (Moysés) Uma usina termoelétrica moderna opera com vapor de água superaquecido, a temperaturas da ordem de  $500^\circ\text{C}$ , e é resfriada com água de rio, tipicamente a  $20^\circ\text{C}$ . Devido a inúmeros tipos

de perdas, a eficiência máxima que se consegue atingir, na prática, é da ordem de 40%. Que fração da eficiência máxima idealmente possível para esses valores isto representa?

R.: 64,4%

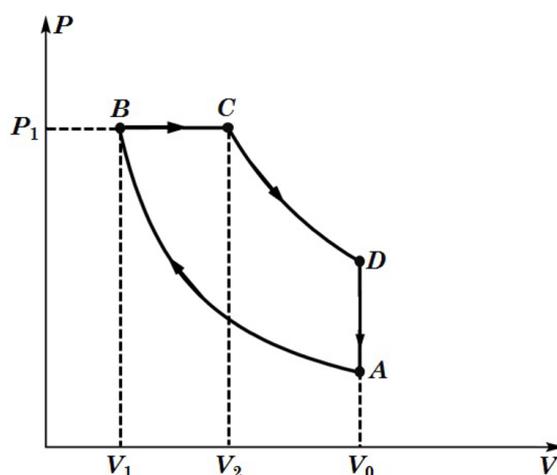
57. Um mol de um gás ideal diatômico ( $\gamma = 7/2$ ) descreve um ciclo quadrado  $ABCD$  no diagrama  $P$ - $V$ . Os valores das pressões e dos volumes nos vértices do ciclo são:  $P_A = P_D = 1$  bar;  $V_A = V_B = 20$  l ;  $P_B = P_C = 2$  bar;  $V_C = V_D = 30$  l (Obs.: 1 bar =  $10^5$  Pa).(adaptado do Moysés)

- Desenhe o ciclo no diagrama  $P$ - $V$  e calcule o valor da temperatura em seus vértices (pontos  $A, B, C$  e  $D$ );
- Calcule a eficiência de um motor térmico operando segundo este ciclo;
- Compare o resultado (b) com a eficiência máxima ideal associada às temperaturas extremas do ciclo.

R.: (a)  $T_A = 244$  K;  $T_B = 488$  K;  $T_C = 732$  K;  $T_D = 366$  K;

(b)  $\eta = 8,3\%$ ; (c)  $\eta_{\text{máx}} = 66,7\% > 8,3\%$ .

58. (Moysés) O ciclo Diesel, representado na figura abaixo, esquematiza o que ocorre num motor Diesel de 4 tempos, onde os trechos  $AB$  e  $CD$  são adiabáticas. A taxa de compressão adiabática  $r_c = V_0/V_1$  é maior que no motor a gasolina (ciclo de Otto), permitindo que o combustível inflame sem necessidade da centelha de ignição. Esta etapa ocorre à pressão constante e está representada pelo trecho  $BC$  do ciclo. A taxa de expansão adiabática, no trecho  $CD$  é  $r_e = V_0/V_2$ . (adaptado do Moysés)



- Mostre que o rendimento do ciclo é dado por

$$\eta = 1 - \frac{1}{\gamma} \left[ \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B} \right] = 1 - \frac{1}{\gamma} \left[ \frac{(1/r_e)^\gamma - (1/r_c)^\gamma}{(1/r_e) - (1/r_c)} \right]$$

(b) Calcule  $\eta$  para  $\gamma = 1,4$ ,  $r_e = 5$  e  $r_c = 15$ .

59. O ciclo de Otto é uma esquematização idealizada do que ocorre num motor a gasolina de 4 tempos. O ciclo (ABCD) consiste de: AB - compressão rápida (adiabática) da mistura de ar com vapor de gasolina, de um volume inicial  $V_0$  para um volume final  $V_0/r$  (onde  $r$  é a taxa de compressão); BC - aquecimento da mistura, a volume constante, devido à ignição; CD - expansão adiabática dos gases aquecidos, movendo o pistão; DA - queda de pressão a volume constante associada à exaustão dos gases da combustão. A mistura pode ser tratada como um gás ideal de coeficiente adiabático  $\gamma$ . (adaptado do Moysés)

(a) Represente o ciclo deste processo no plano  $(P, V)$ ;

(b) Mostre que o rendimento do ciclo é dado por

$$\eta = 1 - \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B} = 1 - \left[ \frac{1}{r} \right]^{\gamma-1}$$

(c) Calcule  $\eta$  para  $\gamma = 1,4$  e  $r = 10$ .

60. Um quilograma de gelo é removido de um congelador, que estava a  $-15^\circ\text{C}$ , e é aquecido até converter-se totalmente em vapor, a  $100^\circ\text{C}$ . Qual é a variação de entropia deste sistema? Dados: calor específico do gelo:  $0,5 \text{ cal}/(\text{g}^\circ\text{C})$ ; calor latente de fusão do gelo:  $79,6 \text{ cal/g}$ ; o calor latente de vaporização da água:  $539,6 \text{ cal/g}$ . (adaptado do Moysés)

R.:  $\Delta S = 2,079 \text{ cal/K} = 8,702 \text{ J/K}$ .

61. (Moysés) Um cilindro contendo  $1 \text{ kg}$  de He a  $150 \text{ atm}$ , em equilíbrio térmico com o ambiente a  $17^\circ\text{C}$ , tem um pequeno vazamento através do qual o gás escapa para a atmosfera, até que o tanque se esvazia por completo do hélio.

(a) Qual é a variação de entropia do gás hélio?

(b) Que quantidade de trabalho é desperdiçada por esse processo?

R.:(a)  $\Delta S_{\text{gás}} = 1,04 \times 10^4 \text{ J/K}$ ; (b)  $W_{\text{desperdicado}} = 3,02 \times 10^6 \text{ J}$ .

62. (Moysés) Uma chaleira contém  $1 \ell$  de água em ebulição. Despeja-se toda a água numa piscina, que está à temperatura ambiente de  $20^\circ\text{C}$ .

(a) De quanto variou a entropia da água da chaleira?

(b) De quanto variou a entropia do universo?

R.: (a)  $\Delta S_{\text{chaleira}} = -241,4 \text{ cal/K}$ ; (b)  $\Delta S_{\text{universo}} = 31,9 \text{ cal/K}$ .

63. (Moysés) Um recipiente de paredes adiabáticas contém  $2 \ell$  de água a  $30^\circ\text{C}$ . Coloca-se nele um bloco de  $500 \text{ g}$  de gelo.

(a) Calcule a temperatura final do sistema (use  $80 \text{ cal/g}$  para o calor latente de fusão do gelo);

(b) Calcule a variação de entropia do sistema.

R.: (a)  $T_f = 8^\circ\text{C}$ ; (b)  $\Delta S = 10,2 \text{ cal/K}$ .

### 2.3.2 Teoria Cinética dos Gases

64. Um dos vácuos mais elevados que podem ser produzidos corresponde a uma pressão de  $10^{-12} \text{ mm/Hg}$ . Nesta pressão, a  $27^\circ\text{C}$ , quantas moléculas de ar por  $\text{cm}^3$  ainda permanecem?

R.:  $3,2 \times 10^4 \text{ moléculas/cm}^3$

65. Calcule o número médio de moléculas por  $\text{cm}^3$  e o espaçamento médio entre as moléculas:

(a) Em água líquida;

(b) Em vapor de água a  $1 \text{ atm}$  e  $100^\circ\text{C}$  (tratado como gás ideal);

(c) No caso (b), calcule a velocidade quadrática média das moléculas.

R.:(a)  $n = 3,3 \times 10^{22} \text{ moléculas/cm}^3$ ; (b)  $\delta = 3,72 \times 10^{-7} \text{ cm}$ ;

(c)  $v_{qm} = 718,92 \text{ m/s}$ .

66. Considere uma amostra de gás argônio em um recipiente a  $35^\circ\text{C}$  e pressão de  $1,22 \text{ atm}$ . Supondo o raio desse átomo igual a  $0,71 \times 10^{-10} \text{ m}$ , calcule a fração do volume do recipiente que é realmente ocupada pelos átomos.

R.:  $4,3 \times 10^{-5}$

67. O diâmetro efetivo da molécula de  $\text{CO}_2$  é  $4,59 \times 10^{-8} \text{ cm}$ . Qual é o livre percurso médio de uma molécula de  $\text{CO}_2$  para uma densidade de  $4,91 \text{ kg/m}^3$ ?

Resolução:

Como  $n_{mol} = m/m_m$ , onde  $m$  = massa de substância e  $m_m$  = massa molar, que para a molécula de  $\text{CO}_2$  é  $44 \text{ g}$ , temos que  $n_{mol} = 4,91/(44 \times 10^{-3}) = 112 \text{ moles}$ . Assim, o número médio de moléculas por unidade de volume será:  $n = n_{mol}N_0 = 112(6 \times 10^{23}) = 6,7 \times 10^{25}$

(moléculas de  $\text{CO}_2$ )/ $\text{m}^3$ . Com isso, o livre percurso médio de uma molécula de  $\text{CO}_2$  será:

$$\bar{\ell} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi n d^2} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi(6,7 \times 10^{25})(4,59 \times 10^{-10})^2} = 1,6 \times 10^{-8} \text{ m}$$

68. (a) Calcule o expoente adiabático  $\gamma = C_P/C_V$  para um gás diatômico a uma temperatura elevada, tal que uma fração  $x$  das moléculas se encontram dissociadas em átomos. Verifique que o resultado se reduz aos casos limites esperados quando não há dissociação ou quando ela é total.
- (b) Se o valor observado é  $\gamma = 1,5$ , qual é a porcentagem de dissociação  $x$ ?

Resolução: Considerando somente os graus de liberdade translacionais

(a) Sejam:

- $n \Rightarrow$  número inicial de moles de moléculas diatômicas
- $x \Rightarrow$  fração de moles de moléculas que se dissociaram
- $2nx \Rightarrow$  número de moles do gás monoatômico (a multiplicação por 2 se deve ao fato de cada molécula diatômica dar origem a dois átomos)
- $(1 - x)n \Rightarrow$  número de moles de moléculas diatômicas que sobraram
- $2nx + (1 - x)n = (1 + x)n = N \Rightarrow$  número final de moles na mistura (moléculas monoatômicas e diatômicas)

Considerando volume constante, a variação da energia interna do sistema será:

$$dU = dU_{\text{mono}} + dU_{\text{di}} = dQ_V = NC_V dT,$$

onde, de acordo com o teorema da equipartição de energia, temos que

$$dU_{\text{mono}} = \frac{3}{2}(2nx)RdT \text{ e } dU_{\text{di}} = \frac{5}{2}(1 - x)nRdT.$$

Assim, a variação da energia interna do sistema fica:

$$(1+x)nC_V dT = \frac{3}{2}(2nx)RdT + \frac{5}{2}(1-x)nRdT \Rightarrow C_V = \frac{(x+5)}{2(x+1)}R$$

Utilizando a relação  $C_P = C_V + R$ , temos que

$$C_P = \left[ \frac{(x+5)}{2(x+1)} + 1 \right] R \Rightarrow \frac{C_P}{C_V} = \gamma = \frac{(3x+7)}{(x+5)}$$

Testando os casos limite:

- (i) Não há dissociação ( $x = 0$ ):  $\frac{C_P}{C_V} = \gamma = \frac{7}{5} \Rightarrow$  correto para gases diatômicos.
- (ii) Dissociação total ( $x = 1$ ):  $\frac{C_P}{C_V} = \gamma = \frac{5}{3} \Rightarrow$  correto para gases monotômicos.

(b) Se  $\gamma = 1,5 = 3/2$  então

$$\gamma = \frac{3}{2} = \frac{(3x+7)}{(x+5)} \Rightarrow x = \frac{1}{3} = 33\%$$

# Capítulo 3

## Oscilações Harmônicas

### 3.1 Resumo: oscilações harmônicas forçadas e amortecidas

Neste capítulo apresentamos um resumo sobre oscilações forçadas e amortecidas (texto baseado no livro de física básica do Moysés Nussenzveig). A equação que descreve o movimento harmônico amortecido e forçado de uma partícula de massa  $m$  é dada por:

$$m\ddot{x}(t) + \rho\dot{x}(t) + kx(t) = F_0 \cos(\omega t), \quad (3.1)$$

onde  $k$  é a constante elástica da mola,  $\rho$  é o coeficiente de amortecimento, devido à uma força externa do tipo  $F = -\rho(dx/dt)$ , e  $F_0 \cos(\omega t)$  é a força externa oscilatória, de frequência  $\omega$  e amplitude  $F_0$ , aplicada ao sistema para mantê-lo em regime estacionário. Dividindo a expressão anterior pela massa  $m$  obtemos:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t), \quad (3.2)$$

onde definimos  $\gamma = \rho/m$  e  $\omega_0^2 = k/m$  (frequência natural). A solução geral da equação (3.2) é dada por:

$$x(t) = x_p(t) + x_h(t), \quad (3.3)$$

onde  $x_p$  é a solução particular da equação inhomogênea (solução estacionária) e  $x_h$  é a solução da equação homogênea (solução transiente):

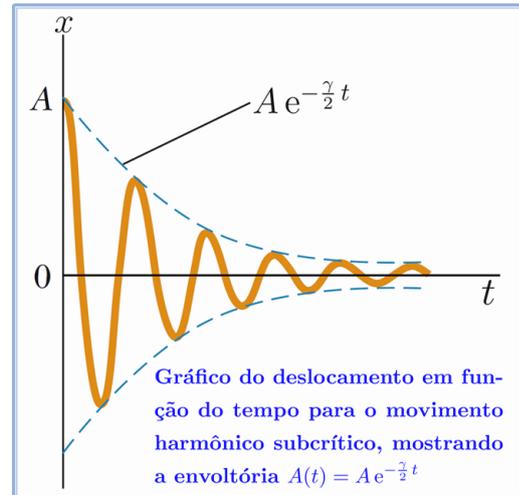
$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (3.4)$$

A solução da equação homogênea (3.4) depende da relação entre  $\omega_0$  e  $\gamma$ , levando a três diferentes soluções. Este três diferentes limites são classificados como subcrítico, crítico e supercrítico. A seguir estão apresentadas as soluções transientes para estes três casos.

### 1. Subcrítico ( $\gamma/2 < \omega_0$ )

$$x(t) = A e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega' t + \phi)$$

$$\text{sendo } \omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}$$



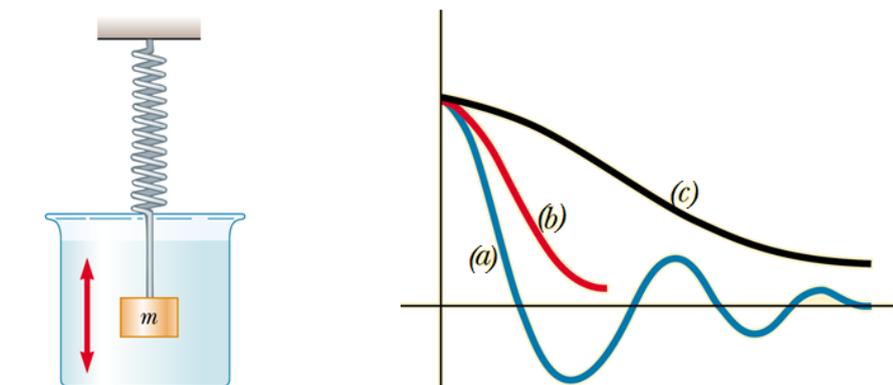
### 2. Crítico ( $\gamma/2 = \omega_0$ )

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} [A t + B]$$

### 3. Supercrítico ( $\gamma/2 > \omega_0$ )

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} [A e^{\beta t} + B e^{-\beta t}] , \text{ onde } \beta = \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}$$

Na figura abaixo mostramos, no lado esquerdo, um exemplo de um oscilador amortecido representado por uma massa ligada à uma mola e submersa em um meio viscoso e, no lado direito, um gráfico do deslocamento em função do tempo para o movimento de um oscilador com amortecimento no limites: (a) subcrítico; (b) crítico e (c) supercrítico.



As soluções homogêneas tendem a zero para  $t \rightarrow \infty$ , tornando-se desprezíveis para tempos maiores que  $T_d$ , chamado tempo de decaimento. Por outro lado, a força externa continua suprindo energia

ao sistema indefinidamente de modo que as oscilações forçadas devem persistir e, para  $t \gg T_d$ , somente as oscilações forçadas irão sobreviver (regime estacionário), correspondendo à solução particular da equação inhomogênea. Para encontrarmos esta solução, de modo não muito complicado, primeiramente iremos desenvolver, resumidamente, como escrever um número complexo na forma trigonométrica para, depois, encontrarmos a solução particular da equação (3.2).

### 3.2 Forma trigonométrica de um número complexo

Um número complexo pode ser escrito como a soma de um número real e um número imaginário puro:

$$z = x + iy, \quad (3.5)$$

onde a parte real de  $z$  é  $x = \Re[z]$  e a parte imaginária de  $z$  é  $y = \Im[z]$ .

O número complexo  $z$  pode ser representado geometricamente no plano complexo (coordenadas cartesianas) como um segmento orientado (vetor) da origem ao ponto  $(x, y)$ .

Podemos escrevê-lo em coordenadas polares utilizando as relações:  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$ . Então teremos:

$$z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta},$$

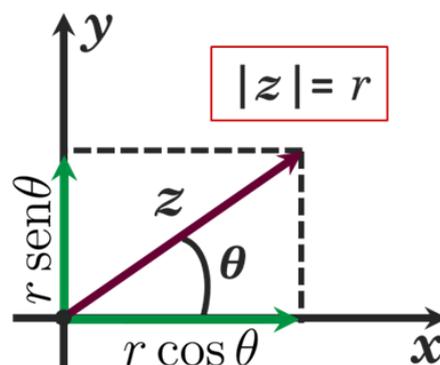
que é a forma trigonométrica do número complexo.

O módulo de  $z$  é dado por:

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3.6)$$

e  $\theta$  chama-se argumento de  $z$ , dado por:

$$\theta = \text{tg}^{-1}(y/x). \quad (3.7)$$



### 3.3 Solução particular da equação inhomogênea

Vamos escrever a equação (3.2) para uma função complexa  $z(t)$ :

$$\ddot{z}(t) + \gamma \dot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t} \quad (3.8)$$

e procuremos uma solução da forma:

$$z(t) = C e^{i\omega t}, \quad (3.9)$$

onde  $C$  é uma constante complexa arbitrária que precisamos encontrar. Substituindo  $z$ ,  $\dot{z} = (i\omega)z$  e  $\ddot{z} = -\omega^2 z$  na equação (3.8) obtemos:

$$-\omega^2 C e^{i\omega t} + \gamma (i\omega) C e^{i\omega t} + \omega_0^2 C e^{i\omega t} = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}. \quad (3.10)$$

Simplificando a equação (3.10) ficamos com:

$$C [-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2] = \frac{F_0}{m}, \quad (3.11)$$

que leva à

$$C = \frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega}. \quad (3.12)$$

A constante complexa  $C$ , dada pela expressão (3.12), pode ser escrita como o quociente entre dois números complexos  $z_1$  e  $z_2$ , tal que

$$C = \frac{z_1}{z_2}, \quad \text{com} \quad z_1 = \frac{F_0}{m} + i0 \quad \text{e} \quad z_2 = (\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega. \quad (3.13)$$

Podemos ainda reescrever o número complexo  $z_1$  como:

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \quad \text{onde} \quad r_1 = \frac{F_0}{m} \quad \text{e} \quad \text{tg}\theta_1 = 0 \Rightarrow \theta_1 = 0. \quad (3.14)$$

O número complexo  $z_2$  pode ser escrito na forma

$$z_2 = r_2 e^{i\theta_2}, \quad \text{onde} \quad r_2 = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \quad \text{e} \quad \text{tg}\theta_2 = \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (3.15)$$

Com estas definições podemos reescrever a constante complexa  $C$ , equação (3.13), como:

$$C = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} e^{-i\theta_2}, \quad (3.16)$$

uma vez que  $\theta_1 = 0$ . Substituindo os valores de  $r_1$  e  $r_2$  definidos nas equações (3.14) e (3.15), podemos reescrever a eq. (3.16) como:

$$C = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}} e^{-i\theta_2} \equiv A e^{i\varphi}, \quad (3.17)$$

com

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}} \quad \text{e} \quad (3.18)$$

$$\varphi = -\theta_2 = -\text{tg}^{-1} \left[ \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \right]. \quad (3.19)$$

A solução particular que procuramos, da equação inhomogênea (3.2) do oscilador amortecido e forçado, é a parte real da solução complexa  $z(t)$ , ou seja,  $x_p(t) = \Re[z(t)]$ :

$$x_p(t) = \Re\{A e^{i\varphi} e^{i\omega t}\} = \Re\{A[\cos\varphi + i\sin\varphi][\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)]\} \quad (3.20)$$

$$x_p(t) = A[\cos\varphi\cos(\omega t) - \sin\varphi\sin(\omega t)] = A\cos(\omega t - \varphi), \quad (3.21)$$

onde a constante  $A$  é dada pela expressão (3.18) e a fase pela expressão (3.19).