



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3210 - Mecânica dos Sólidos I

Aula #14

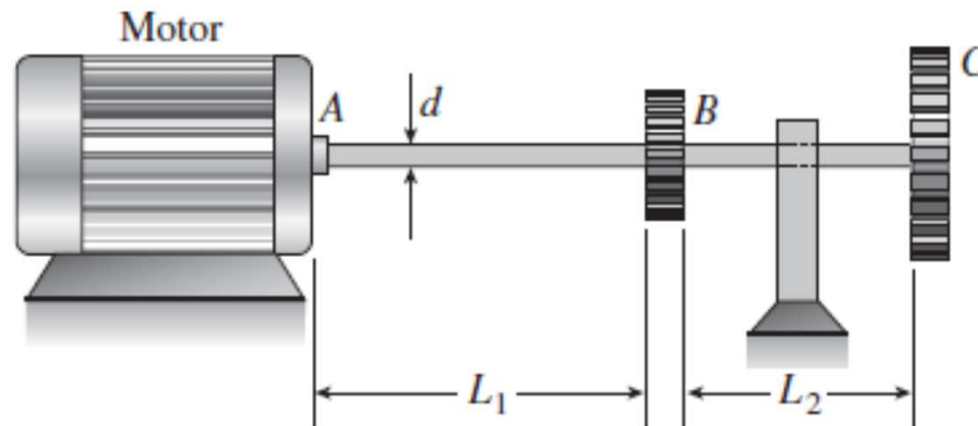
Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.

24/05/2022



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Problem 3.7-10 The shaft ABC shown in the figure is driven by a motor that delivers 300 kW at a rotational speed of 32 Hz. The gears at B and C take out 120 and 180 kW, respectively. The lengths of the two parts of the shaft are $L_1 = 1.5$ m and $L_2 = 0.9$ m. Determine the required diameter d of the shaft if the allowable shear stress is 50 MPa, the allowable angle of twist between points A and C is 4° , and $G = 75$ GPa.





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Solução:

A relação entre potência, torque e velocidade angular é, como vimos:

$$P = \omega T$$
$$\left[\begin{array}{l} \omega = 2\pi f = 201,06 \text{ rad/s} \\ P = 3 \times 10^5 \text{ W} \end{array} \right. \Rightarrow T = \frac{P}{\omega} \cong 1492 \text{ Nm}$$

Como eixo e engrenagens giram com a mesma velocidade angular, a relação entre potências é a mesma relação entre torques:

$$\frac{T_B}{T} = \frac{P_B}{P} = \frac{120}{300} = 0,4 \Rightarrow T_B \cong 597 \text{ Nm}$$

$$\frac{T_C}{T} = \frac{P_C}{P} = \frac{180}{300} = 0,6 \Rightarrow T_C \cong 895 \text{ Nm}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

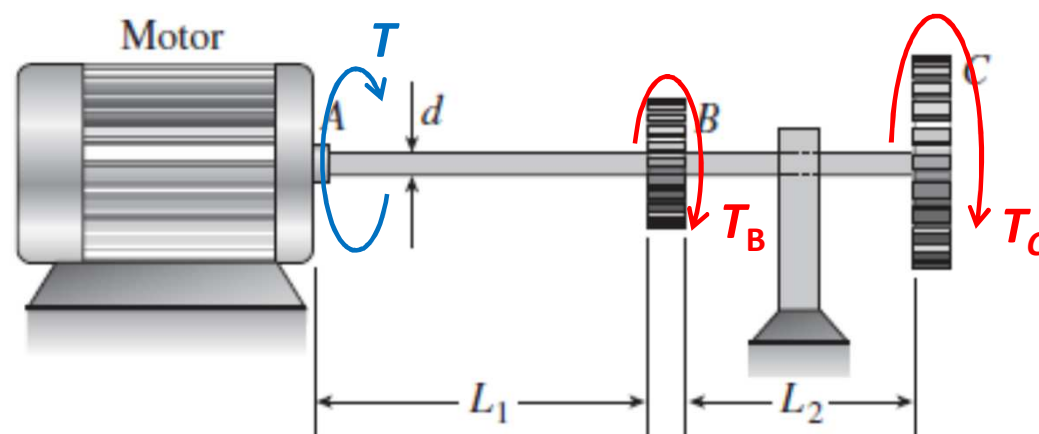
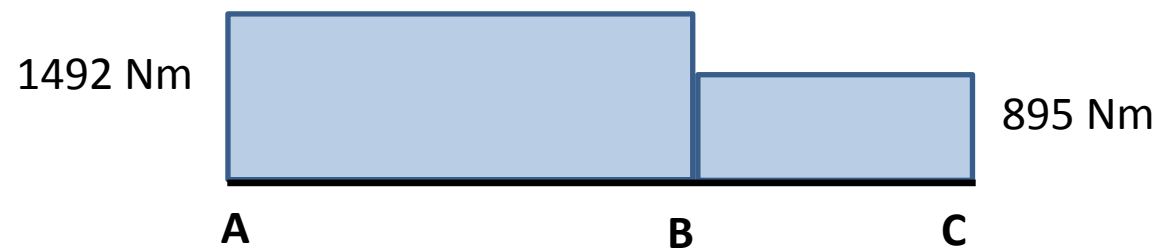


Diagrama de Momentos de Torção:





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Devemos ter: $\tau_{m\acute{a}x} \leq \tau_{adm} \Leftrightarrow \frac{16T_{m\acute{a}x}}{\pi d^3} \leq \tau_{adm} \Leftrightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{16T_{m\acute{a}x}}{\pi \tau_{adm}}}$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \times 1,492 \times 10^6 Nmm}{\pi \times 50 N/mm^2}} \Leftrightarrow d \geq 53,4 mm$$

E também: $\phi_{C,A} \leq \phi_{C,A,adm} = \frac{4\pi}{180} = 0,0698 rad$

$$\phi_{C,A} = \phi_{C,B} + \phi_{B,A} = \frac{T_C L_2}{G I_p} + \frac{T L_1}{G I_p} = \frac{32}{G \pi d^4} (T_C L_2 + T L_1) \leq \phi_{C,A,adm}$$

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32(T_C L_2 + T L_1)}{G \pi \phi_{C,A,adm}}} = \sqrt[4]{\frac{32(895 \times 0,9 + 1492 \times 1,5)10^6}{75000 \times \pi \times 0,0698}} = 49,3 mm$$

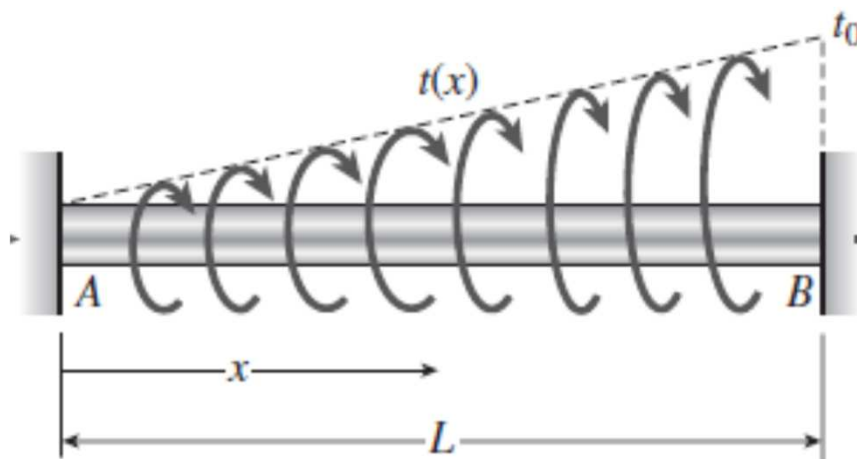
Logo: **$d \geq 53,4 mm$** (critério de resistência é o limitante).



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Problem 3.8-8 A circular bar AB of length L is fixed against rotation at the ends and loaded by a distributed torque $t(x)$ that varies linearly in intensity from zero at end A to t_0 at end B (see figure).

Obtain formulas for the fixed-end torques T_A and T_B .

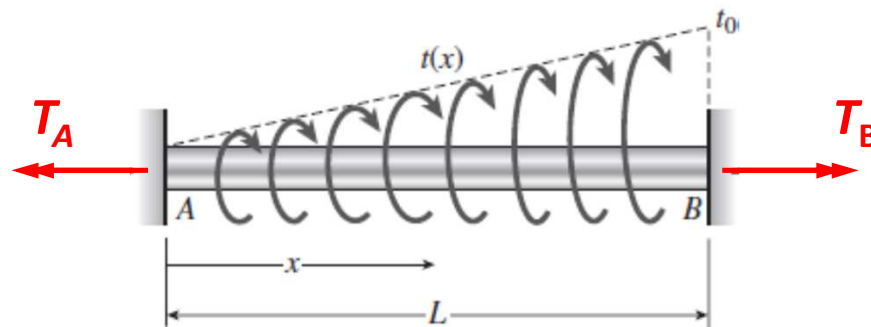




Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Solução:

1º Passo: apresentar o D.C.L.



2º Passo: Determinar o grau de hiperstaticidade estrutural: $g = 2 - 1 = 1$

3º Passo: obter a expressão do torque distribuído ($t(x)$): $t(x) = t_0 \frac{x}{L}$

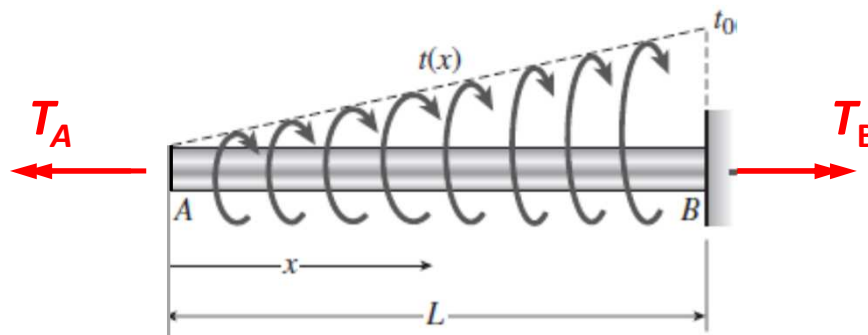
4º Passo: escrever a(s) equaç(ão)(ões) de equilíbrio:

$$T_A + \int_0^L t_0 \left(\frac{x}{L} \right) dx = T_B \quad \Leftrightarrow \quad T_A + \frac{t_0 L}{2} = T_B$$

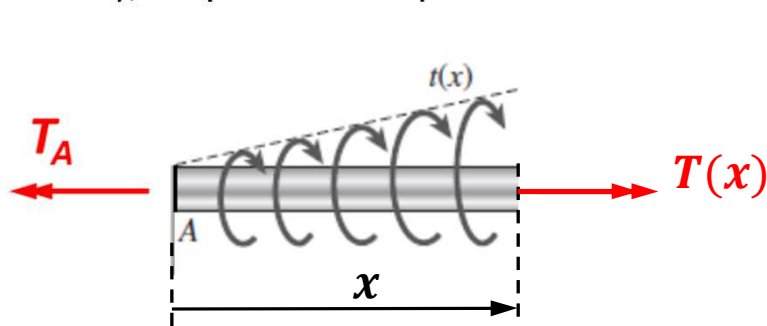


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

5º Passo: Escolher uma E.I.F. (estrutura isostática fundamental), liberando uma das reações (T_A ou T_B). Optando por T_A , p.ex., teremos a seguinte E.I.F.:



6º Passo: Determinar o momento de torção interno (em uma posição genérica), impondo o equilíbrio do trecho em análise:


$$T_A + \int_0^x t_0 \left(\frac{x}{L} \right) dx = T(x)$$
$$T(x) = T_A + \frac{t_0 x^2}{2L}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

7º Passo: Determinar o ângulo de giro de A em relação a B para a E.I.F. escolhida:

$$\phi_{A,B} = \int_0^L \frac{T(x)}{GI_p} dx = \frac{1}{GI_p} \int_0^L \left(T_A + \frac{t_0 x^2}{2L} \right) dx = \frac{1}{GI_p} \left(T_A L + \frac{t_0 L^2}{6} \right)$$

8º Passo: impor a compatibilidade de rotações entre a E.I.F. e a estrutura hiperestática original:

$$\phi_{A,B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad T_A = -\frac{t_0 L}{6}$$

Obs: O sinal negativo indica apenas que o sentido arbitrado para T_A no D.C.L. deve ser invertido.

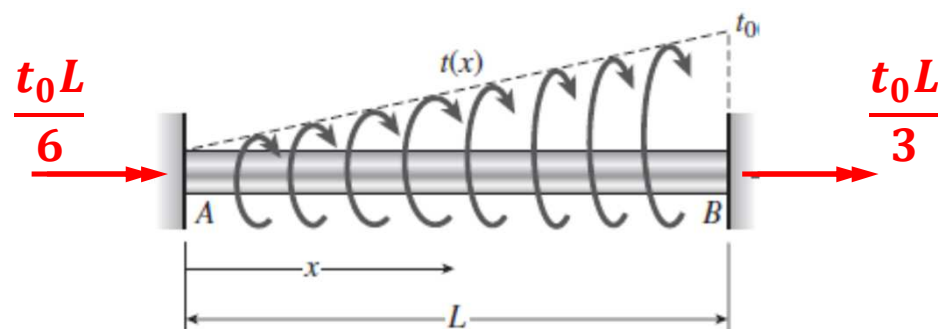
9º Passo: determinar a reação T_B utilizando a equação de equilíbrio:

$$T_A + \frac{t_0 L}{2} = T_B \quad \Leftrightarrow \quad T_B = \frac{t_0 L}{3}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

10º Passo: apresentar o D.C.L. final

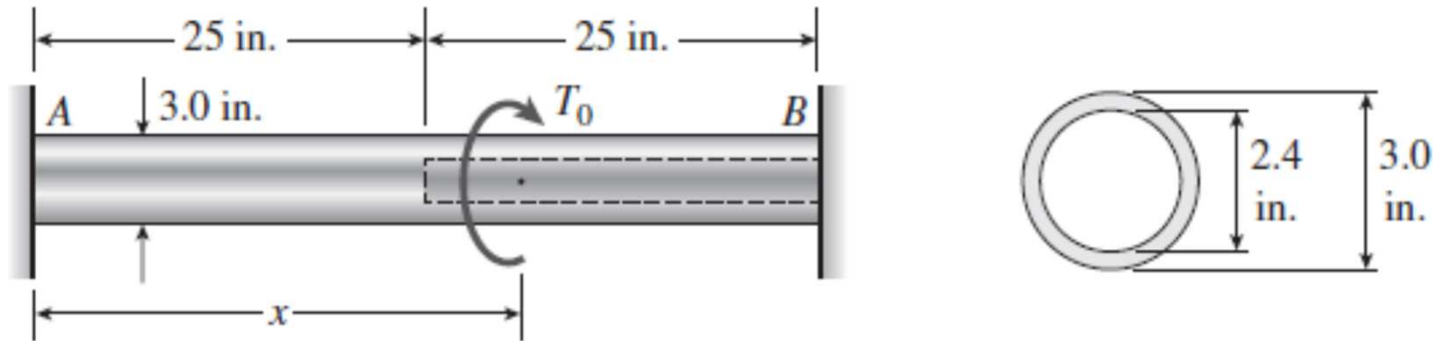




Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Problem 3.8-9 A circular bar AB with ends fixed against rotation has a hole extending for half of its length (see figure). The outer diameter of the bar is $d_2 = 3.0$ in. and the diameter of the hole is $d_1 = 2.4$ in. The total length of the bar is $L = 50$ in.

At what distance x from the left-hand end of the bar should a torque T_0 be applied so that the reactive torques at the supports will be equal?

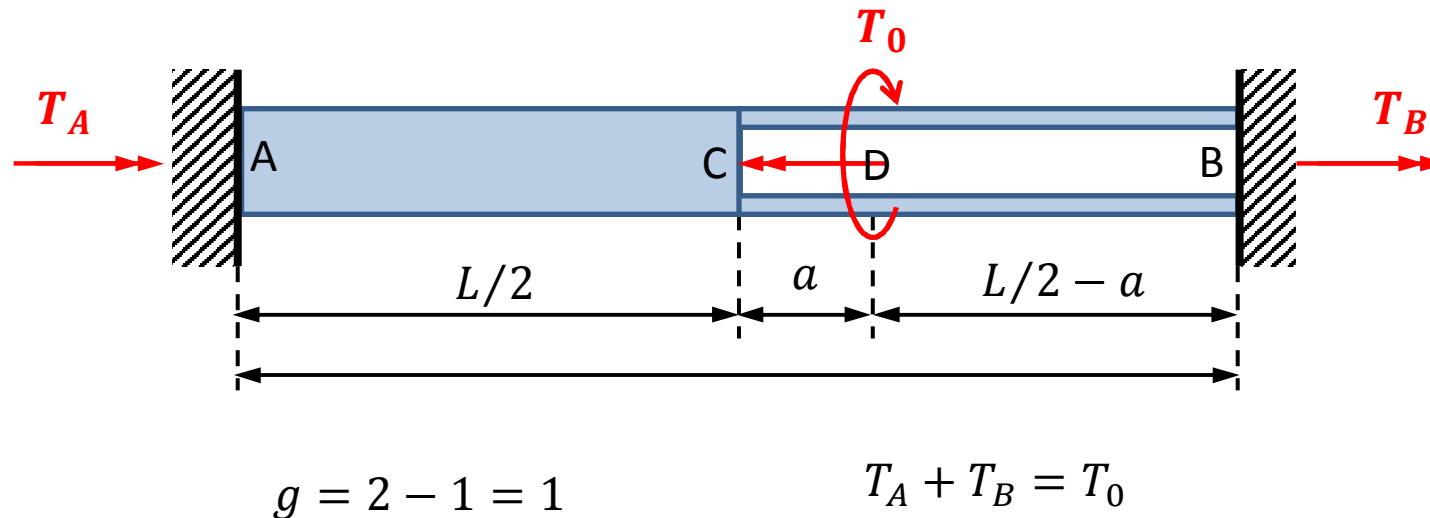




Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Solução:

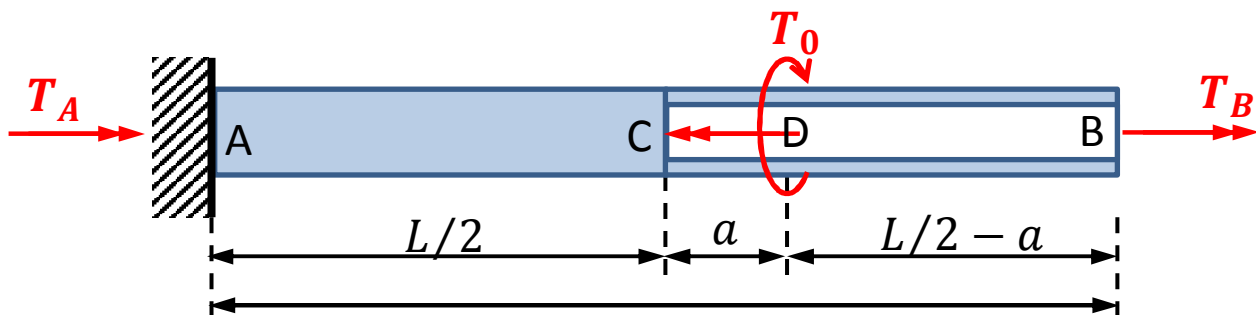
Notamos que a porção mais rígida é a responsável por um maior torque de reação. Se o torque fosse aplicado em $x = L/2$, por exemplo, teríamos $|T_A| > |T_B|$, dado que $I_{pA} > I_{pB}$. Logo, é certo que o torque deve ser aplicado a uma distância maior do que $L/2$ para que os torques de reação sejam iguais. O D.C.L. fica então:





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Liberando o torque reativo em B, obtemos a E.I.F.:



$$\phi_{B,A} = \phi_{B,D} + \phi_{D,C} + \phi_{C,A} = \frac{T_B(L/2 - a)}{GI_{pB}} + \frac{(T_B - T_0)a}{GI_{pB}} + \frac{(T_B - T_0)L/2}{GI_{pA}} = 0$$

$$\frac{T_B L}{2} \left(\frac{1}{I_{pA}} + \frac{1}{I_{pB}} \right) = T_0 \left(\frac{a}{I_{pB}} + \frac{L}{2I_{pA}} \right)$$

Como devemos ter $T_B = T_0/2$, virá:



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$\frac{T_0 L}{4} \left(\frac{1}{I_{pA}} + \frac{1}{I_{pB}} \right) = T_0 \left(\frac{a}{I_{pB}} + \frac{L}{2I_{pA}} \right)$$

$$\frac{a}{L} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{I_{pB}}{I_{pA}} \right)$$

Como: $\frac{I_{pB}}{I_{pA}} = \frac{d_2^4 - d_1^4}{d_2^4} = 1 - \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^4 = 1 - \left(\frac{2,4}{3,0} \right)^4 \cong 0,5904$

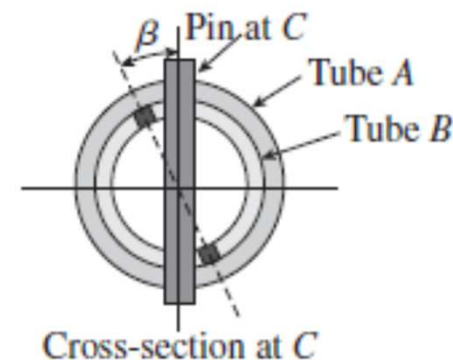
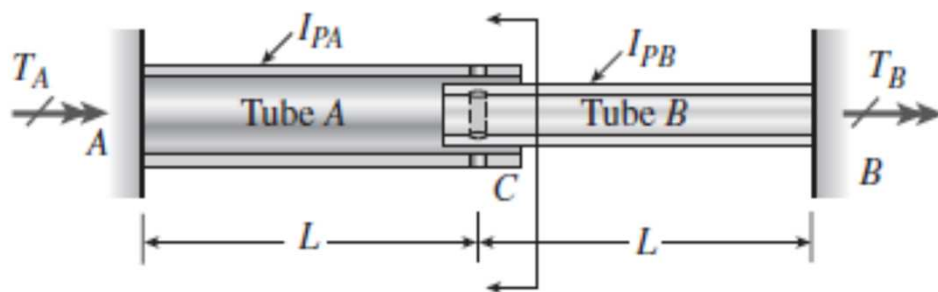
Resulta: $\frac{a}{L} = 0,1024 \quad \longleftrightarrow \quad a = 5,12 \text{ in}$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Problem 3.8-16 A hollow circular tube A (outer diameter d_A , wall thickness t_A) fits over the end of a circular tube B (d_B , t_B), as shown in the figure. The far ends of both tubes are fixed. Initially, a hole through tube B makes an angle β with a line through two holes in tube A. Then tube B is twisted until the holes are aligned, and a pin (diameter d_p) is placed through the holes. When tube B is released, the system returns to equilibrium. Assume that G is constant.

- Use superposition to find the reactive torques T_A and T_B at the supports.
- Find an expression for the maximum value of β if the shear stress in the pin, τ_p , cannot exceed $\tau_{p,allow}$.
- Find an expression for the maximum value of β if the shear stress in the tubes, τ_t , cannot exceed $\tau_{t,allow}$.
- Find an expression for the maximum value of β if the bearing stress in the pin at C cannot exceed $\sigma_{b,allow}$.

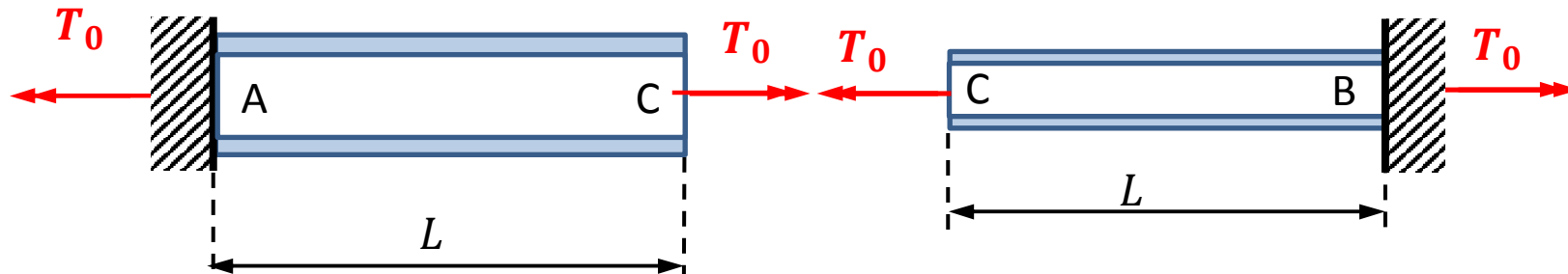




Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Solução:

a) Após a liberação do tubo B, os dois tubos (A e B) estarão submetidos a um mesmo momento de torção. A soma dos ângulos de giro de cada tubo (em relação às respectivas extremidades engastadas) deve igualar o ângulo β (desde que $\beta \ll 1$). Assim:



$$\phi_{C,A} = \frac{T_0 L}{G I_{pA}}$$

$$\phi_{C,B} = \frac{T_0 L}{G I_{pB}}$$

$$\phi_{C,A} + \phi_{C,A} = \beta$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$\frac{T_0 L}{G I_{pA}} + \frac{T_0 L}{G I_{pB}} = \beta \quad \Leftrightarrow \quad \frac{T_0 L}{G} \left(\frac{I_{pA} + I_{pB}}{I_{pA} I_{pB}} \right) = \beta$$

$$T_0 = \frac{G \beta}{L} \left(\frac{I_{pA} I_{pB}}{I_{pA} + I_{pB}} \right)$$

b) Cada pino está submetido a corte simples. Denominando F_c a força de corte em cada superfície do pino (temos duas superfícies sujeitas a corte), teremos:

$$T_0 = F_c d_B = \frac{G \beta}{L} \left(\frac{I_{pA} I_{pB}}{I_{pA} + I_{pB}} \right) \quad \Rightarrow \quad F_c = \frac{G \beta}{L d_B} \left(\frac{I_{pA} I_{pB}}{I_{pA} + I_{pB}} \right)$$

$$\tau_p = \frac{4 F_c}{\pi d_p^2} \leq \tau_{p,adm} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4}{\pi d_p^2} \frac{G \beta}{L d_B} \left(\frac{I_{pA} I_{pB}}{I_{pA} + I_{pB}} \right) \leq \tau_{p,adm}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$\beta \leq \frac{\pi}{4} \left(\frac{\tau_{p,adm}}{G} \right) \left(\frac{I_{pA} + I_{pB}}{I_{pA} I_{pB}} \right) d_p^2 L d_B$$

$$\beta_{m\acute{a}x} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{\tau_{p,adm}}{G} \right) \left(\frac{I_{pA} + I_{pB}}{I_{pA} I_{pB}} \right) d_p^2 L d_B$$

c) Para que a máxima tensão de cisalhamento nos tubos não ultrapasse a tensão de cisalhamento admissível do material devemos ter:

$$\tau_{m\acute{a}x} \leq \tau_{t,adm}$$

$$\tau_{m\acute{a}x} = m\acute{a}x \left\{ \frac{T_0 d_A}{2 I_{pA}}, \frac{T_0 d_B}{2 I_{pB}} \right\} = \frac{T_0}{2} m\acute{a}x \left\{ \frac{d_A}{I_{pA}}, \frac{d_B}{I_{pB}} \right\}$$

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{G\beta}{2L} \left(\frac{I_{pA} I_{pB}}{I_{pA} + I_{pB}} \right) m\acute{a}x \left\{ \frac{d_A}{I_{pA}}, \frac{d_B}{I_{pB}} \right\}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{G\beta}{2L} \left(\frac{I_{pA}I_{pB}}{I_{pA} + I_{pB}} \right) m\acute{a}x \left\{ \frac{d_A}{I_{pA}}, \frac{d_B}{I_{pB}} \right\} \leq \tau_{t,adm}$$

$$\beta_{m\acute{a}x} = \left(\frac{\tau_{t,adm}}{G} \right) \left(\frac{I_{pA} + I_{pB}}{I_{pA}I_{pB}} \right) \frac{2L}{m\acute{a}x \left\{ \frac{d_A}{I_{pA}}, \frac{d_B}{I_{pB}} \right\}}$$

d) Para que a tensão de esmagamento máxima nos tubos não ultrapasse a tensão admissível do material ($\sigma_{b,adm}$), devemos ter:

$$\sigma_{b,m\acute{a}x} = m\acute{a}x \left\{ \frac{F_{bA}}{d_p t_A}, \frac{F_{bB}}{d_p t_B} \right\} \leq \sigma_{b,adm}$$

onde: $F_{bA} = \frac{T_0}{(d_A - t_A)} \quad F_{bB} = \frac{T_0}{(d_B - t_B)}$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Logo: $\max \left\{ \frac{T_0}{(d_A - t_A)d_p t_A}, \frac{T_0}{(d_B - t_B)d_p t_B} \right\} \leq \sigma_{b,adm}$

$$\frac{T_0}{d_p} \max \left\{ \frac{1}{(d_A - t_A)t_A}, \frac{1}{(d_B - t_B)t_B} \right\} \leq \sigma_{b,adm}$$

$$\frac{G\beta}{Ld_p} \left(\frac{I_{pA}I_{pB}}{I_{pA} + I_{pB}} \right) \max \left\{ \frac{1}{(d_A - t_A)t_A}, \frac{1}{(d_B - t_B)t_B} \right\} \leq \sigma_{b,adm}$$

$$\beta \leq \left(\frac{\sigma_{b,adm}}{G} \right) \left(\frac{I_{pA} + I_{pB}}{I_{pA}I_{pB}} \right) \frac{Ld_p}{\max \left\{ \frac{1}{(d_A - t_A)t_A}, \frac{1}{(d_B - t_B)t_B} \right\}}$$

$$\beta_{\max} = \left(\frac{\sigma_{b,adm}}{G} \right) \left(\frac{I_{pA} + I_{pB}}{I_{pA}I_{pB}} \right) \frac{Ld_p}{\max \left\{ \frac{1}{(d_A - t_A)t_A}, \frac{1}{(d_B - t_B)t_B} \right\}}$$