**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**
**Departamento de Engenharia Mecânica**

# *PME-3210 - Mecânica dos Sólidos I*

*Aula #13*

*Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.*

*20/05/2022*

*Agenda:*

1. Transmissão de Potência por Eixos Circulares (3.7), [1]
2. Membros de Torção Estaticamente Indeterminados (3.8), [1]

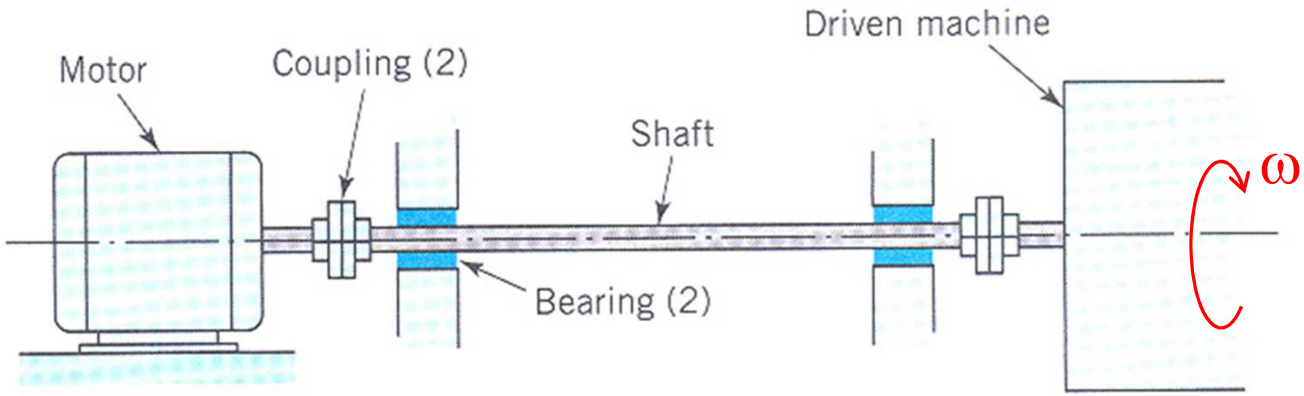
# 1. Transmissão de Potência por Eixos Circulares

Eixos rotativos são fundamentais para a transmissão de potência mecânica de um dispositivo ou máquina para outro(a), como no virabrequim de um automóvel, o eixo propulsor de um navio ou o eixo de um gerador em uma usina hidrelétrica.

Figura 1. Eixo de um gerador para transmissão de potência.

Figura 2. Eixo de um navio acoplado ao hélice [2].

# Alguns elementos utilizados na transmissão de potência




(Unidade motora)

(Unidade movida)

Sejam:

$P$ = potência entregue pelo motor ao eixo;

$T$= torque transmitido ao longo do eixo;

$\omega$ = velocidade angular do eixo (e da unidade movida).

A relação entre potência, torque e velocidade angular é dada por:

$$P = \omega T = \frac{2\pi n}{60} T$$

Unidades no S.I.:

[$T$] = Nm (newton-metro)

[$\omega$] = rad/s (radianos por segundo)

[$P$] = W (watt)

Unidades (sistema inglês):

[$T$] = lb.ft (pound-feet)

[$\omega$] = rad/s (radianos por segundo)

[$P$] = lb.ft/s

Obs: 1 hp = 550 lb.ft/s $\cong$ 746 W

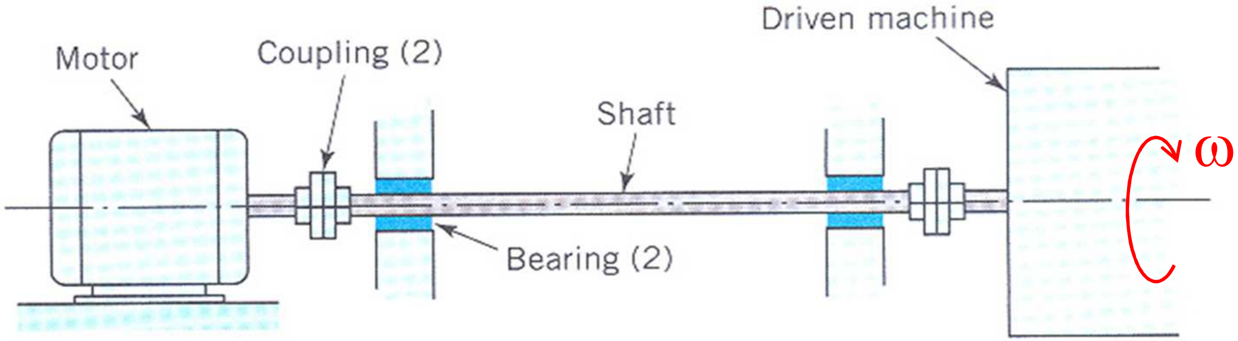
Outras relações úteis:

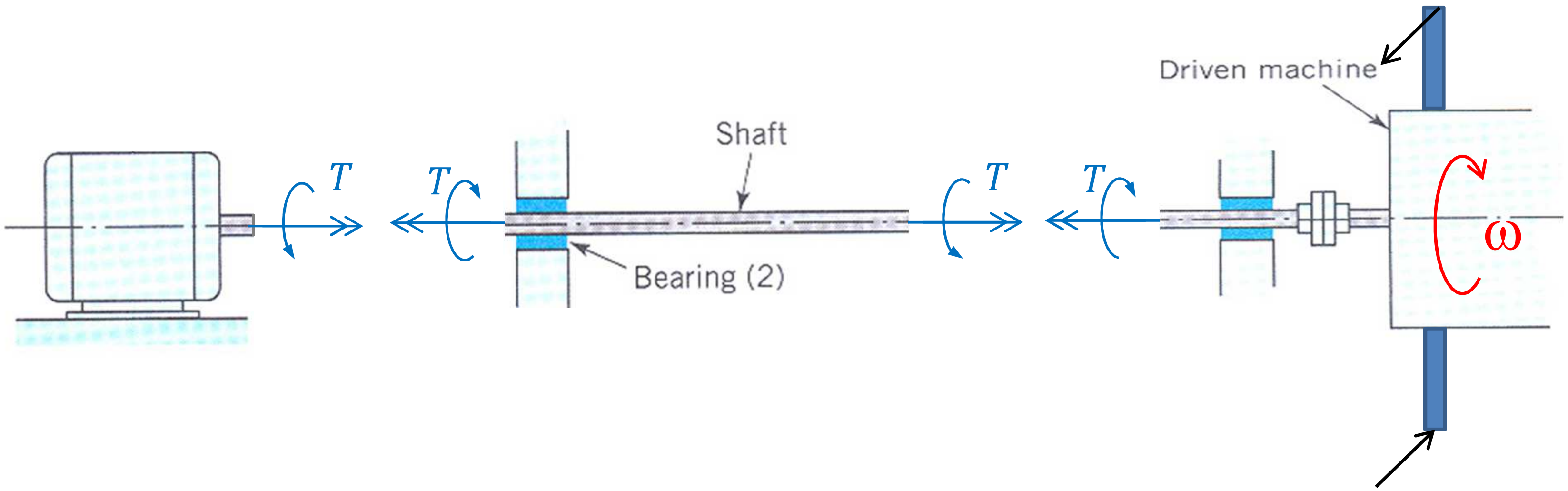
$\omega = 2\pi f$ onde $f$ é a frequência angular expressa em Hz (hertz).

$n = 60f$ onde $n$ é a frequência angular expressa em rpm (rotações por minuto).

$\omega = \dfrac{2\pi n}{60}$ onde $n$ é dada em rpm e $\omega$ é dada em rad/s.

Note que, se o eixo gira no sentido horário (como ilustrado na figura abaixo), o sentido do torque no eixo (junto à unidade movida) terá o mesmo sentido, mas junto à unidade motora terá o sentido oposto (anti-horário):



Exemplo:

Um motor acoplado a um eixo circular maciço de aço transmite 30 kW para uma engrenagem em B. A tensão de cisalhamento admissível para o material é de 42 MPa. Determine:

a) O diâmetro *d* necessário do eixo se ele for operado a 500 rpm;
b) O diâmetro *d* necessário do eixo se ele for operado a 4000 rpm.

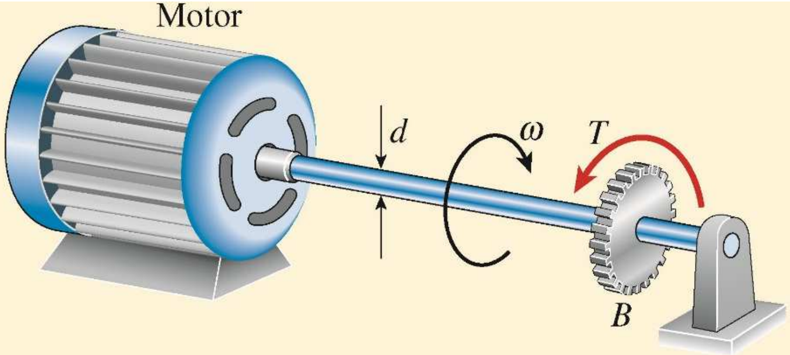



FIG. 3-30 Example 3-7. Steel shaft in torsion

Solução - item (a) :

$$P = \omega T = \frac{2\pi n}{60} T$$

Dados: $P = 30.000W$

$n = 500rpm$

$$T = \frac{60P}{2\pi n} = 573\ Nm$$

$$\tau_{máx} \leq \tau_{adm} \longrightarrow$$

Tensão cisalhante admissível : depende do material escolhido, das condições de operação, e do fator de segurança adotado.

Tensão cisalhante máxima atuante no eixo: irá depender apenas do torque aplicado e do diâmetro do eixo:

$$\tau_{máx} = \frac{T}{I_p}\frac{d}{2}$$

Resulta:

$$\begin{cases} \tau_{máx} = \dfrac{T}{I_p}\dfrac{d}{2} \\ I_p = \dfrac{\pi d^4}{32} \end{cases} \Rightarrow \tau_{máx} = \frac{16T}{\pi d^3}$$

$$\frac{16T}{\pi d^3} \leq \tau_{adm} \quad \Leftrightarrow \quad d \geq \sqrt[3]{\frac{16T}{\pi \tau_{adm}}}$$

Como:

$$\begin{cases} T = 573\ Nm = 5{,}73 \cdot 10^5\ \ Nmm \\ \tau_{adm} = 42MPa = 42\ N/mm^2 \end{cases} \Rightarrow d \geq 41{,}1\ mm$$

Solução - item (b) :

Dados: $P = 30.000W$, $n = 4000rpm$ $\Rightarrow$ $T = \dfrac{60P}{2\pi n} = 71{,}6\ Nm$

$$\tau_{máx} \leq \tau_{adm} \Leftrightarrow \frac{16T}{\pi d^3} \leq \tau_{adm} \Leftrightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{16T}{\pi \tau_{adm}}}$$

Como:

$$\left[\begin{array}{l} T = 71{,}6\ Nm = 7{,}16 \cdot 10^4 Nmm \\ \tau_{adm} = 42MPa = 42\ N/mm^2 \end{array}\right. \Rightarrow d \geq 20{,}6\ mm$$

## Observações:

1. O diâmetro do eixo a ser escolhido deve ser de um eixo comercialmente disponível com valor igual ou superior ao valor mínimo encontrado;
2. O exemplo anterior ilustra que, quanto maior a velocidade de rotação, menor o tamanho necessário do eixo (mantidas a mesma potência e tensão admissível do material);
3. Deve-se tomar cuidado, contudo, com problemas de perda de estabilidade ou vibrações excessivas que podem ser causados em eixos com baixa rigidez flexo-torcional;
4. O uso de eixos vazados pode ser uma solução interessante em determinados projetos (menor massa mas com rigidez torcional praticamente equivalente ao de um eixo maciço);
5. O projeto de eixos também deve levar em consideração diversos outros aspectos que ainda serão explorados ao longo do curso de Engenharia Mecânica. Fadiga, vibrações torcionais, flexo-torção e concentrações de tensões são alguns dos pontos que merecem destaque (sugestão para leitura: [3]).

## *2. Membros de Torção Estaticamente Indeterminados*

As barras e eixos estudados até o momento eram estaticamente determinados, pois todos os torques internos e reações podiam ser obtidos a partir de diagramas de corpo livre e equações de equilíbrio.

Se restrições adicionais (como engastamentos) forem adicionadas aos eixos, as equações de equilíbrio não serão suficientes para a determinação dos torques internos e dos torques de reação. A estrutura, neste caso, é denominada <u>*estaticamente indeterminada*</u> (ou <u>*hiperestática*</u>).

A solução destes problemas envolve a utilização das seguintes equações:

- Equações de equilíbrio;
- Equações de compatibilidade;
- Relações torque-rotação.

# Exemplo 1:

A estrutura indicada abaixo é formada por uma barra sólida e um tubo, estando ambos engastados na extremidade A e unidos a uma placa rígida (supostamente indeformável) na extremidade B. O conjunto é submetido a um torque $T$ aplicado na extremidade B. Considere que sejam dados:

$T$ : torque aplicado ao conjunto;

$L$ : comprimento da barra e do tubo;

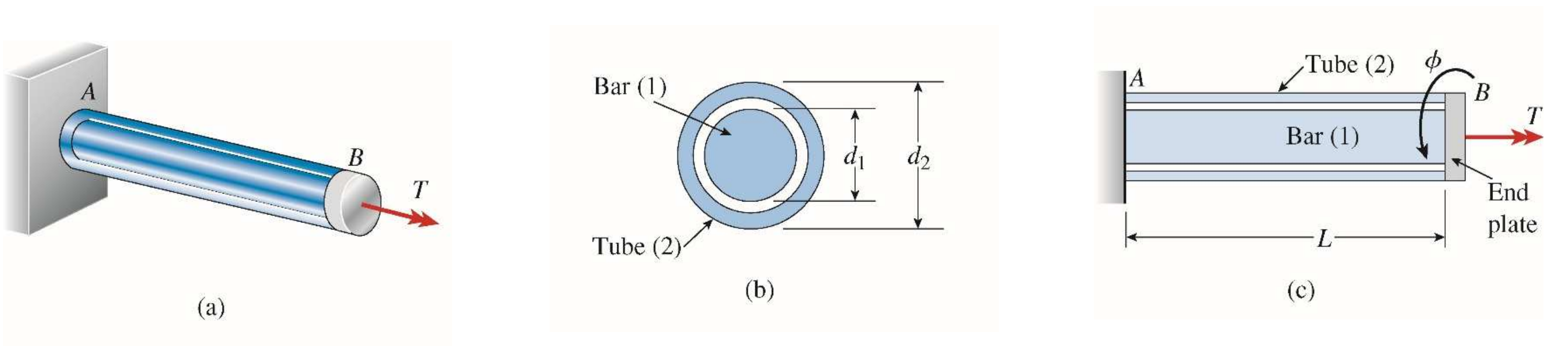
$I_{p1}$ e $I_{p2}$ : momentos de inércia polar da barra sólida (1) e do tubo (2);

$G_1$ e $G_2$ : módulos de cisalhamento dos materiais da barra (1) e do tubo (2).

Pede-se:

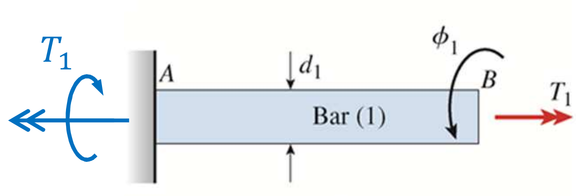
a) torques atuantes em cada um dos elementos que formam o conjunto;

b) O ângulo de giro ($\phi$) do conjunto.

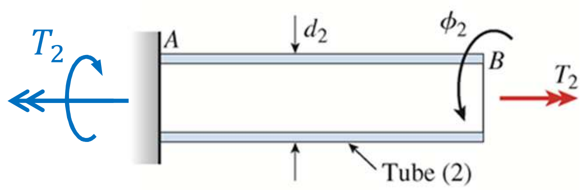


Solução:

Verificamos de imediato que temos uma estrutura hiperestática com grau de hiperestaticidade $g$ = 1, pois temos dois torques a serem determinados e dispomos apenas de uma única equação de equilíbrio. Denotando por $T_1$ e $\phi_1$ o torque suportado pela barra sólida e seu ângulo de giro (da seção B relativamente à seção A) e por $T_2$ e $\phi_2$ as quantidades análogas para o tubo, teremos:



(d)



(e)

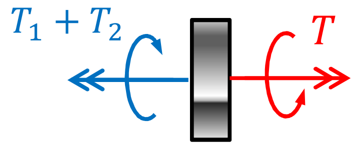
Cada uma destas estruturas, vistas separadamente, é uma estrutura isostática (veja os D.C.L.'s), e a determinação dos respectivos ângulos de giro é simples.

Para a barra: $\boxed{\phi_1 = \dfrac{T_1 L}{G_1 I_{p1}}}$

Para o tubo: $\boxed{\phi_2 = \dfrac{T_2 L}{G_2 I_{p2}}}$

*Relações torque-rotação*

*Equação de equilíbrio:* $\boxed{T = T_1 + T_2}$




*Equação de compatibilidade de rotações:* $\boxed{\phi_1 = \phi_2}$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{T_1}{k_{t1}} = \dfrac{T_2}{k_{t2}}$

$$\begin{cases} T = T_1 + T_2 \\ \dfrac{T_1}{k_{t1}} = \dfrac{T_2}{k_{t2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T_1 = \left(\dfrac{k_{t1}}{k_{t1} + k_{t2}}\right) T \\ T_2 = \left(\dfrac{k_{t2}}{k_{t1} + k_{t2}}\right) T \end{cases}$$

Onde: $k_{t1} = \dfrac{G_1 I_{p1}}{L}$ e $k_{t2} = \dfrac{G_2 I_{p2}}{L}$

Obs: $\phi = \dfrac{T_1}{k_{t1}} = \dfrac{T_2}{k_{t2}} = \dfrac{T}{k_{t,eq}}$ onde: $k_{t,eq} = k_{t,1} + k_{t,2}$

Logo: $\phi = \dfrac{T}{k_{t,eq}} = \dfrac{TL}{G_1 I_{p1} + G_2 I_{p2}}$ (“molas em paralelo”)

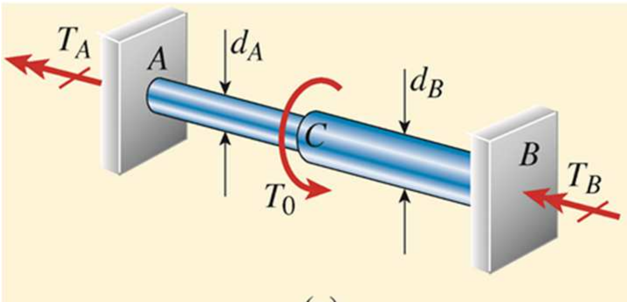
Exemplo 2:

A estrutura indicada abaixo é formada por uma barra sólida escalonada formada pelos segmentos AC e CB, estando ambos engastados nas extremidade A e B. O conjunto é submetido a um torque $T_0$ aplicado em C. São dados: $T_0$, $L_A$, $L_B$, $d_A$, $d_B$ e $G$.

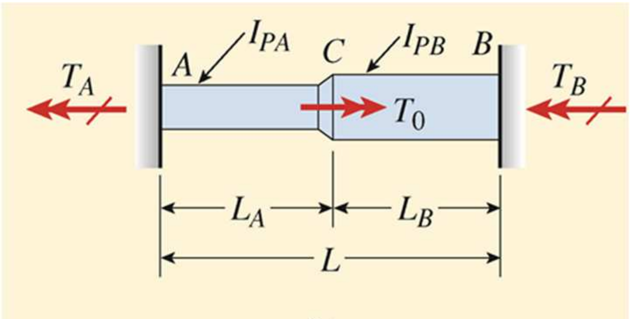
Pede-se:

a) torques atuantes em cada um dos elementos que formam o conjunto;

b) O ângulo de giro ($\phi$) da seção C.



(a)

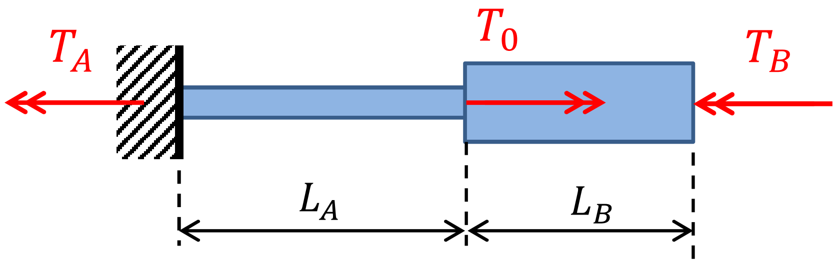


(b)

## Solução:

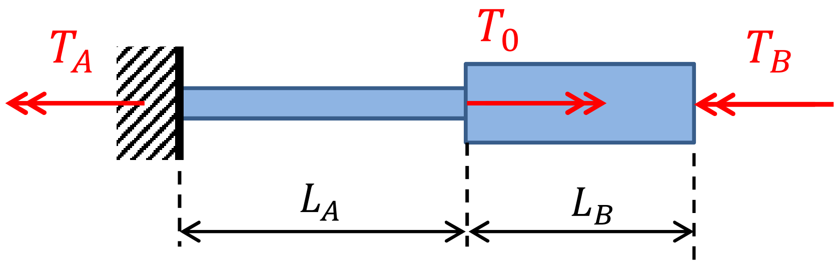
Verificamos, novamente, que se trata de uma estrutura hiperestática com grau de hiperestaticidade $g$ = 1, pois temos dois torques reativos a serem determinados e dispomos apenas de uma única equação de equilíbrio.

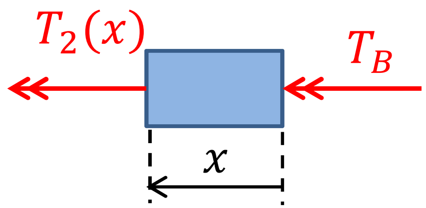
Liberando o ângulo de giro em B para obtermos uma estrutura isostática fundamental (E.I.F.), vamos determinar o ângulo de giro em B (relativamente à seção A, que está engastada) em função dos torques $T_0$ e $T_B$:




$$\phi_{B,A} = \sum_{i=1}^{2} \frac{T_i L_i}{G_i I_{pi}}$$

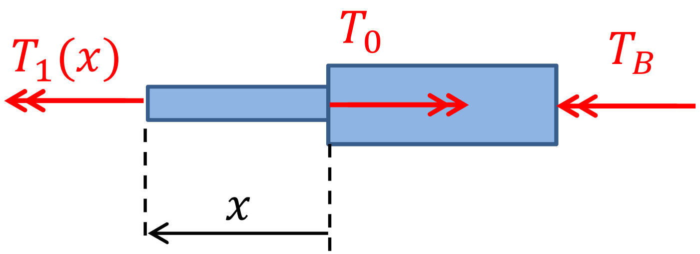
Torque interno no segmento CB (segmento 2):




$$T_2(x) + T_B = 0 \iff T_2(x) = -T_B \qquad (0 \le x < L_B)$$

Torque interno no segmento AC (segmento 1):




$$T_1(x) + T_B = T_0 \iff T_1(x) = T_0 - T_B$$

$$(0 \le x < L_A)$$

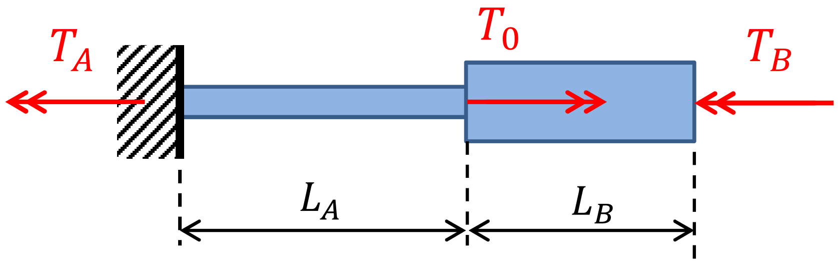
$$\phi_{B,A} = \sum_{i=1}^{2} \frac{T_i L_i}{G_i I_{pi}} = \frac{(T_0 - T_B) L_A}{G I_{pA}} + \frac{(-T_B) L_B}{G I_{pB}} = 0$$

(Equação de compatibilidade)

Resolvendo para $T_B$:

$$T_B \left( \frac{1}{k_{tA}} + \frac{1}{k_{tB}} \right) = \frac{T_0}{k_{tA}} \Leftrightarrow T_B = \left( \frac{k_{tB}}{k_{tA} + k_{tB}} \right) T_0$$

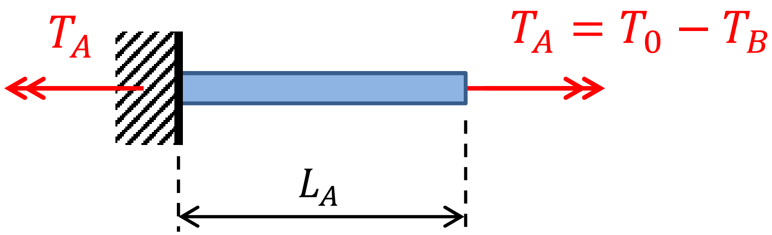
Pela equação de equilíbrio de momentos:




$$T_A + T_B = T_0$$

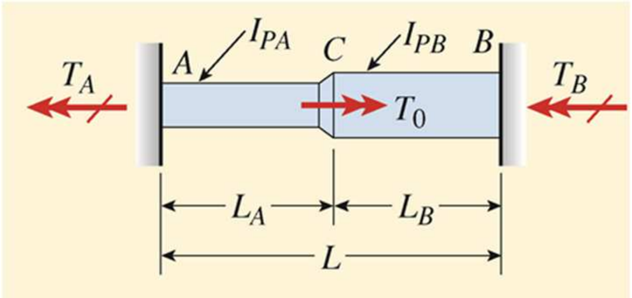
$$T_A = \left( \frac{k_{tA}}{k_{tA} + k_{tB}} \right) T_0$$

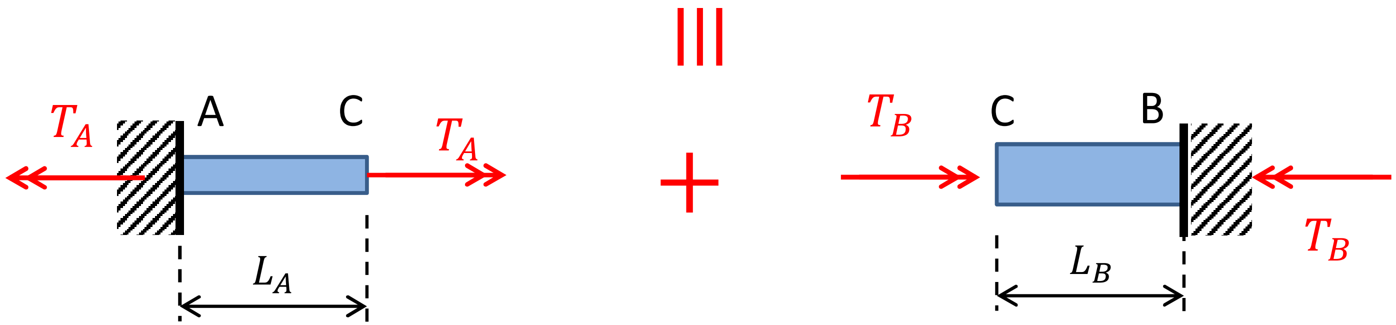
Para determinarmos o ângulo de giro em C basta analisar o trecho AC:




$$\phi_{C,A} = \frac{T_A L_A}{G I_{pA}} = \frac{T_A}{k_{tA}} = \frac{T_0}{k_{tA} + k_{tB}}$$

Observamos, por fim, que este problema é exatamente equivalente ao anterior, podendo ser resolvido da mesma maneira apresentada antes:




$$T_0 = T_A + T_B \qquad \phi_{C,A} = \phi_{C,B} = \frac{T_A}{k_{tA}} = \frac{T_B}{k_{tB}} = \frac{T_0}{k_{tA} + k_{tB}}$$

## Referências:

[1] Gere, J.M.; Goodno, B.J.; Mecânica dos Materiais, Tradução da 7ª edição norte-americana. Cengage Learning, 2010, 860p, cap.3

[2] https://www.nauticexpo.com/pt/prod/schaffran-propeller-service/product-31586-358602.html

[3] Armah, S.K. Preliminary design of a power transmission shaft under fatigue loading using ASME code. Amer J Eng and App Sci, 2018, 11 (1): 227.244. Doi: 10.3844/ajeassp.2018.227.244