

Tópico 4 - Forças centrais

Considere por simplicidade um sistema de referência cuja origem é fixada no centro de uma força (por exemplo na origem das partículas ou no centro de massa no caso de um sistema de duas partículas). Se a força puder ser escrita como

$$\vec{f}(\vec{r}) = F(r) \hat{r}, \text{ a força é denominada}$$

força central, de forma que ela aponta para o centro quando for atrativa e para fora do centro quando for repulsiva. A intensidade da força só depende da distância do seu centro até a partícula.

Mais especificamente, dado um sistema de duas partículas de massas m_1 e m_2 , tendo apenas uma interação mútua entre elas (força central), Aplicando a 2ª lei de Newton num referencial fixo na origem temos

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{12}$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{21}$$

talvez que $m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = 0$, de

forma que $\frac{d}{dt} (m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2) = 0$ ou

$m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2 = \text{cte}$ (o vetor momento linear total é conservado).

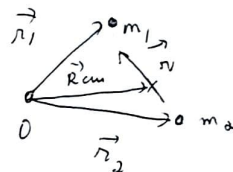
(1)

Considere agora a posição do centro de massa $\vec{R}_{cm}$ e relativa $\vec{r}$ dados por

$$\vec{R}_{cm} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad \text{e}$$

(2)

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$



Multiplicando a 1ª equação por m_2 e a 2ª equação por m_1 , temos, ao ~~subtrair~~ subtrair as que:

$$m_1 m_2 (\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2) = m_2 \vec{F}_{12} - m_1 \vec{F}_{21}$$

Dado que $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ temos

$$\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{(m_1 + m_2)}{m_1 m_2} \vec{F}_{12}$$

ou ainda $\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ onde

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

A equação acima pode ser interpretada como se fosse o movimento de uma única partícula de massa μ sujeita a uma força $\vec{F}$ cujo centro

está em uma das partículas.

(3)

De acordo com o que escrevemos anteriormente,

como $(m_1 + m_2) \ddot{\vec{R}}_{cm} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = c\vec{k}$, $\rightarrow$ pois, $\downarrow$ de forma que $\vec{F}_{12} = \vec{F}_{21} = \vec{0}$ somente duas forças centrais temos que

$\ddot{\vec{R}}_{cm} = \text{constante}$ de forma que o centro de massa está em repouso ou em movimento retilíneo uniforme. Se nós escolhermos $\vec{R}_{cm} = \vec{0}$ temos finalmente

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}(r) \quad \text{ou}$$

onde $\frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 + u(r) = E,$

$$\text{onde } u(r) = - \int_{-\infty}^r \vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' \quad \text{e}$$

a energia potencial $(u(-\infty) = 0).$

Portanto, basta considerarmos o movimento de uma "partícula de massa" μ sujeita a uma força central $F(r)$.

O momento (vetor) angular do sistema é dado por $\vec{L} = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2.$

Calculando (passando) para o referencial da posição relativa ao C.M. e lembrando que $\vec{R}_{cm} = \vec{0}$ temos:

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

(4)

$$\vec{r}_2 = - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

$$\vec{L} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \times \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}} +$$

$$(-) \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \times \frac{(-m_1) m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}}$$

$$= \mu (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})$$

Por outro lado, como a força é central

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \mu (\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}) + \mu (\vec{r} \times \ddot{\vec{r}})$$

$$= 0 + \vec{r} \times (-F\vec{r}) = 0,$$

e portanto o vetor momento angular é conservado na presença de uma força central. A conservação implica no vetor momento angular ser constante em módulo, direção e sentido e está sempre perpendicular a $\vec{r}$ e $\dot{\vec{r}}$.

Portanto, o movimento da partícula ^(P)
sujeta a força central é sempre
no mesmo plano perpendicular a $\vec{L}$,
pois $(\vec{L} \perp \dot{\vec{r}})$.

sendo $\vec{L}$ constante, os pontos varridos / percorridos
por $\dot{\vec{r}}$ estarão sempre contidos num plano $\perp$
a $\vec{L}$ que passa pela origem, sendo assim,
a trajetória fica inteiramente contida
neste plano.

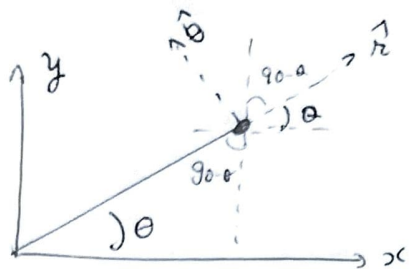
É conveniente estudar o movimento de
uma partícula sujeita a uma força
central usando coordenadas polares já
que a força central depende da
distância do centro da força e o movimento
~~de~~ ~~de~~ está inteiramente contido num plano.

Dado que as componentes do vetor $\vec{r}$
podem ser escritas em coordenadas polares
por meio de coordenadas

Dadas as coordenadas polares

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$



segue que $\hat{r} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}$

$$\hat{\theta} = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}$$

Note que $\hat{r} \cdot \hat{\theta} = 0$.

e $\vec{r} = r \hat{r}$ de forma que

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\hat{r}} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta}, \text{ pois}$$

$$\dot{\hat{r}} = -\sin \theta \dot{\theta} \hat{i} + \cos \theta \dot{\theta} \hat{j} = +\dot{\theta} \hat{\theta}$$

Portanto

$$\vec{L} = \mu \vec{r} \times (\dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta})$$

$$= \mu r^2 \dot{\theta} \hat{z}$$

Ainda podemos calcular $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ dada por

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{r} \hat{r} + \dot{r} \dot{\hat{r}} + \dot{r} \dot{\theta} \hat{\theta} + r \ddot{\theta} \hat{\theta} + r \dot{\theta} \dot{\hat{\theta}}$$

Mas $\dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta} (\sin \theta \hat{j} + \cos \theta \hat{i}) = -\dot{\theta} \hat{r}$

e então $\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \hat{r} + (2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \hat{\theta}$

de forma que $r^2 \dot{\theta}$ seja constante.

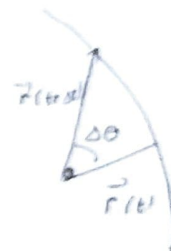
Tal quantidade está diretamente relacionada, conforme vimos no 1º tópico, com a velocidade angular.

Quando a posição angular da partícula varia de um ângulo pequeno $\Delta \theta$, o raio vetor varre uma área dada por:

$$\Delta S \approx \frac{r^2 \Delta \theta}{2} + r \frac{\Delta r \Delta \theta}{2}$$

de forma que

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} \approx \frac{r^2}{2} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} + \frac{r}{2} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \Delta r$$



e tomando o limite $\Delta t \rightarrow 0$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{r^2}{2} \dot{\theta} = \frac{L^2}{2\mu} = \text{cte}$$

A equação acima estabelece que "o raio vetor" varre áreas iguais em tempos iguais. Quando $\vec{F}(r) = -\frac{k}{r^2} \hat{r}$ ($k = GMm$), tal resultado é conhecido como 2ª lei de Kepler.

Escrevendo a expressão para a energia total em coordenadas polares temos:

$$E = \frac{\mu}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + V(r)$$

$$= \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r).$$

Como $\vec{F}(r)$ é uma força conservativa, E é uma constante de movimento, de forma que o movimento de uma partícula (sistema de duas partículas) sujeita a uma força central possui duas constantes de movimento: a energia total E e o vetor momento angular $\vec{L}$. Podemos também/ portanto usarmos as constantes de movimento acima, de forma que a partícula (sistema no presente caso) somente poderá executar seu movimento na região em que

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{\mu} [E - V_{\text{ef}}(r)], \text{ onde}$$

$$V_{\text{ef}}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r).$$

↑ potencial efetivo

Os pontos onde $E = V_{\text{ef}}(r)$ são denominados pontos de retorno.

Dessa forma:

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu} \left[E - V(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2} \right]} \quad \text{e}$$

$$r = \pm \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{E - V(r') - \frac{L^2}{2\mu r'^2}}}, \quad (*)$$

de forma que dado um potencial $V(r)$ a solução radial $r(t)$ pode ser encontrada por meio da integração acima.

Para encontrarmos a solução angular $\theta(t)$, podemos novamente usarmos a relação $L = \mu r^2(t) \dot{\theta}(t)$.

$$\text{Dessa forma: } \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\mu r^2(t)} \quad \text{e então}$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_0^t \frac{L}{\mu r^2(t')} dt',$$

onde $r(t)$ foi obtido a partir da solução (*) anteriormente.

Dependendo da natureza da força central é mais conveniente usarmos uma forma diferencial da trajetória ao invés da integral para $r(t)$. Para tal, considere a mudança de variável $r = \frac{1}{u}$

$$\dot{r} = - \frac{1}{u^2} \frac{du}{dt} = - \frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = - r^2 \dot{\theta} \frac{du}{d\theta} = - \frac{L}{\mu} \frac{du}{d\theta},$$

onde de agora em diante usaremos a

variável m para especificar a massa reduzida μ , a fim de não confundirmos com u .

$$\ddot{r} = -\frac{L}{m} \frac{d}{dt} \left(\frac{du}{d\theta} \right) = -\frac{L}{m} \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} \right) \frac{d\theta}{dt}$$

$$\text{Como } L = m r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

$$\ddot{r} = -\frac{L}{m} \left(\frac{L}{m r^2} \right) \frac{d^2 u}{d\theta^2} = -\frac{L^2}{m^2} u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2}$$

Dessa forma, a equação diferencial para a componente radial $r(t)$ é dada por

$$m \ddot{r} - m r \dot{\theta}^2 = F(r) \quad (\text{pg 5})$$

a relação acima é obtida lembrando que em coordenadas polares
 $\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \hat{r} + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \hat{\theta}$

$$\text{e portanto } -\frac{L}{m} u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} - m r \frac{L^2}{m^2 r^4} = F(r)$$

$$-\frac{L}{m} u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} - \frac{L^2}{m r^3} = F(r)$$

ou ainda

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + \frac{L}{u^2 r^3} = F(r)$$

ou seja a equação diferencial da trajetória é dada por

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{L^2 u^2} F\left(\frac{1}{u}\right)$$

Exemplo:

(1)

Dada uma força central cuja órbita é dada por $r = K e^{\alpha \theta}$ (sendo K e α constantes), encontre:

- a expressão para a força central
- Determine $r(t)$ e $\theta(t)$
- Encontre a energia da órbita

Dada a equação anterior

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{L^2} \frac{1}{u^2} F\left(\frac{1}{u}\right)$$

obtemos que $u = \frac{1}{K} e^{-\alpha \theta}$

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = \frac{d^2}{d\theta^2} \frac{1}{K} e^{-\alpha \theta} = \alpha^2 u$$

Então:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = \alpha^2 u \quad \text{de forma que}$$

$$(1 + \alpha^2) u = -\frac{m}{L^2} \frac{1}{u^2} F\left(\frac{1}{u}\right)$$

$$F\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{L^2}{m} (1 + \alpha^2) u^3 = -\frac{L^2}{m} \frac{(1 + \alpha^2)}{r^3}$$

Dado que

(12)

$$L = m r^2 \dot{\theta}$$

$$\frac{dr}{dt} = k \alpha e^{\alpha \theta} \dot{\theta} = \alpha r \dot{\theta}, \text{ temos}$$

$$L = m r^2 \dot{\theta} = m r^2 \frac{\dot{r}}{\alpha r} = \frac{m r \dot{r}}{\alpha}$$

Como L é constante

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\alpha L}{m r} \Rightarrow r dr = \frac{\alpha L}{m} dt$$

e então $\frac{r^2}{2} + C = \frac{\alpha L}{m} t$

$$r(t) = \sqrt{2\left(\frac{\alpha L}{m} t - C\right)}$$

Como $\frac{r}{k} = e^{\alpha \theta}$ e $\theta = \frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{r}{k}\right)$

temos: $\theta(t) = \frac{1}{2\alpha} \ln\left(\frac{2C + 2\alpha L t/m}{k}\right)$

Finalmente, temos que a energia total é dada por $E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + u(r)$

onde $u(r) = - \int F(r) dr = \int_{\infty}^r \frac{l^2}{m r'^3} (1 + \alpha^2) dr'$
 $= \frac{l^2}{2m r^2} (1 + \alpha^2)$

Então

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2m r^2} - \frac{l^2}{2m r^2} (1 + \alpha^2) \quad (13)$$

Como $l = m r^2 \dot{\theta}$

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{l^2}{m^2 r^4} + \frac{l^2}{2m r^2} - \frac{l^2}{2m r^2} (1 + \alpha^2)$$

$$= 0$$

Lei do inverso do quadrado da distância (14)

Dada a força central $\vec{F}(r) = -\frac{k}{r^2} \hat{r}$ com

$k > 0$ (no problema de Kepler $k = GMm$),

a energia potencial é dada por

$$V(r) = - \int_{-\infty}^r \frac{k}{r'^2} dr' = -\frac{k}{r},$$

de forma que o potencial efetivo $V_{eff}(r)$ é dado por

$$V_{eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}$$

Vamos examinar o comportamento de $V_{eff}(r)$.

* Note que $V_{eff}(r) \rightarrow \infty$ para $r \rightarrow 0$ e

$V_{eff}(r) \rightarrow 0$ para $r \rightarrow \infty$. Por outro lado

ela apresenta uma raiz dada por

$$-\frac{k}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} = 0 \Rightarrow r_0 = \frac{L^2}{2mk}$$

* Além disso, ela apresenta os pontos de mínimo e inflexão dados por:

$$V'_{eff}(r) \Big|_{r=r_m} = 0 \Rightarrow r_m^* = \frac{L^2}{mk}$$

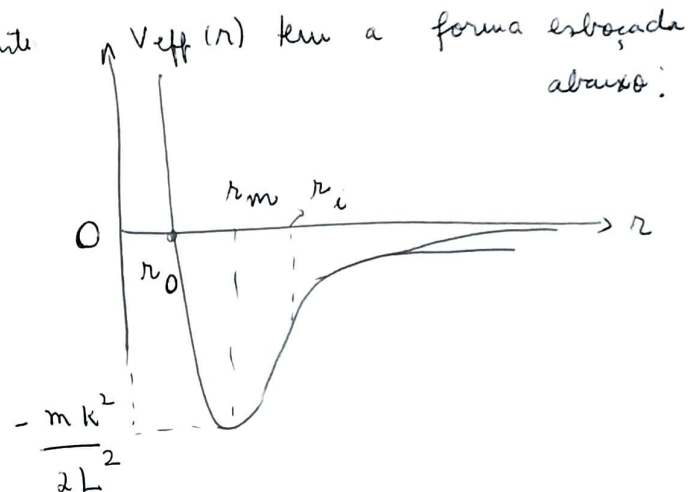
que é um ponto de mínimo pois:

$$V''_{eff}(r_m) = -\frac{2k}{r_m^3} + \frac{3L^2}{mr_m^4} = \frac{m^3 k^4}{L^6} > 0.$$

Além disso, $V_{eff}(r)$ apresenta um ponto de inflexão dado por

$$r_i = \frac{3L^2}{2k}$$

Finalmente $V_{eff}(r)$ tem a forma esboçada abaixo:



Conforme vimos anteriormente, a partícula

se moverá na região onde $\dot{r}^2 = \frac{2}{m} [E - V_{eff}(r)] \geq 0$

ou seja, quando $E \geq V_{eff}(r)$.

Para um E fixo, os pontos de retorno são aqueles em que $E = V_{eff}(r) = -\frac{k}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$,

que podem ser calculados por meio da equação:

$$\frac{1}{r^2} - \frac{2mk}{L^2} \cdot \frac{1}{r} - \frac{2mE}{L^2} = 0,$$

cujas raízes são:

$$\frac{1}{r_1} = \frac{mK}{L^2} + \sqrt{\left(\frac{mK}{L^2}\right)^2 + \frac{dmc}{L^2}} \quad (16)$$

$$\frac{1}{r_2} = \frac{mK}{L^2} - \sqrt{\left(\frac{mK}{L^2}\right)^2 + \frac{dmc}{L^2}}$$

sendo r_1 e r_2 denominadas distâncias de maior aproximação e menor aproximação da partícula ao centro de força (ou de um corpo/planeta em relação ao outro).

$$r_1 \text{ e } r_2 \text{ valem para } -\frac{mK^2}{2L^2} \leq E < 0,$$

Conforme discutiremos a seguir:

1) O primeiro caso a ser analisado é aquele em que $E = -\frac{mK^2}{2L^2}$. Note que nesse caso $r_1 = r_2$ e corresponde ao limite em que $E = \underbrace{V_{\text{eff}}(r_m)}_{\text{mínimo do potencial efetivo}}$ e

Consistente com uma trajetória circular de raio $r_m = \frac{L^2}{mK}$.

Como outros valores de r não são possíveis neste caso, temos que o momento angular $|\vec{L}|$ e $\dot{\theta}$ são dados por

$$L = m r^2 \dot{\theta} \quad \text{e} \quad \dot{\theta} = \frac{L}{m} \frac{m^2 K^2}{L^4} = \frac{m K^2}{L^3}, \quad (17)$$

constante com um movimento circular uniforme.

2) O segundo caso a ser considerado é aquele em que $-\frac{mK^2}{2L^2} < E < 0$ no qual a trajetória da partícula/planta/corpo fica confinada numa região anelar definida por $r_1 \leq r \leq r_2$, sendo r_1 e r_2 calculados anteriormente, conforme ilustrado abaixo:



Quando se atinge r_1 e r_2 , temos que $\dot{r} = 0$ mas

$$m \ddot{r} = \frac{L^2}{2mr^3} + F(r) = -\frac{dV_{\text{eff}}}{dr}$$

Como $-\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} > 0$ para $r = r_1$ e $-\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} < 0$ para $r = r_2$, $\dot{r}$ muda de sinal em r_1 e r_2 .

3) Para $E \geq 0$ a trajetória da partícula fica fora do círculo de raio r_1 , isto é o movimento da partícula fica delimitado na região por $r > r_1$. Nesta condição somente existe a solução $E = V_{\text{eff}}(r)$ correspondente a r_1 que é a distância de maior aproximação. O movimento será limitado / não confinado.

Vamos agora achar as possíveis trajetórias para os diferentes valores de energia.

Dada a equação diferencial para a trajetória que obtemos anteriormente

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{L^2} u^2 \underbrace{\left(-K u^2 \right)}_{\text{para } F(r) = -\frac{K}{r^2}},$$

temos que a equação diferencial é a mesma de um oscilador harmônico sujeito a uma força constante e dada por:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{mK}{L^2},$$

Cuja solução geral é:

$$u(\theta) = A \cos \theta + B \sin \theta + \frac{mK}{L^2}.$$

Escolhendo como $u(0)$ o ponto em que a partícula está na distância de maior aproximação (e portanto $\frac{du(0)}{d\theta} = 0$)

temos que

$$u(0) = A + \frac{mK}{L^2} = \frac{mK}{L^2} + \sqrt{\left(\frac{mK}{L^2}\right)^2 + \frac{2mE}{L^2}}$$

de forma que

$$A = \sqrt{\left(\frac{mK}{L^2}\right)^2 + \frac{2mE}{L^2}}$$

Analogamente, a constante B é obtida impondo que

$$\frac{du(0)}{d\theta} = 0 \Rightarrow B = 0, \text{ de}$$

forma que

$$u = \frac{1}{r} = \frac{mK}{L^2} + \sqrt{\left(\frac{mK}{L^2}\right)^2 + \frac{2mE}{L^2}} \cos \theta$$

A trajetória descrita pela equação acima pode ser circular se $E = -\frac{mK^2}{2L^2}$, ~~ou~~ elíptica

se $-\frac{mK^2}{2L^2} < E < 0$, cuja excentricidade ϵ

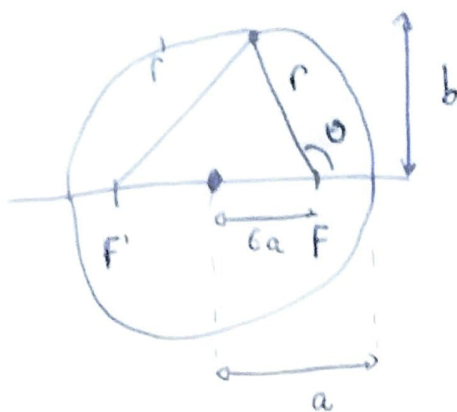
$$\text{é dada por } \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{mK^2}}.$$

Se $E = 0$, a trajetória será parabólica e se $E > 0$, a trajetória será hiperbólica.

Exercício:

19-1

Elipse:



É o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois focos fixos (F e F') é constante, isto é, $r + r' = 2a$, onde a é o semi-eixo maior da elipse. O semi-eixo menor está relacionado com o menor com a relação

$$b = a \sqrt{1 - e^2}$$

Lembrando que

$$r'^2 = r^2 + 4e^2 a^2 - 4ea r' \cos(180 - \theta)$$

$$r'^2 = r^2 + 4e^2 a^2 + 4ea r' \cos \theta$$

Por outro lado

$$r'^2 = r^2 - 4ea r + 4a^2$$

Comparando as equações acima, obtemos

$$r(1 + \cos \theta) = a(1 - e^2)$$

e finalmente

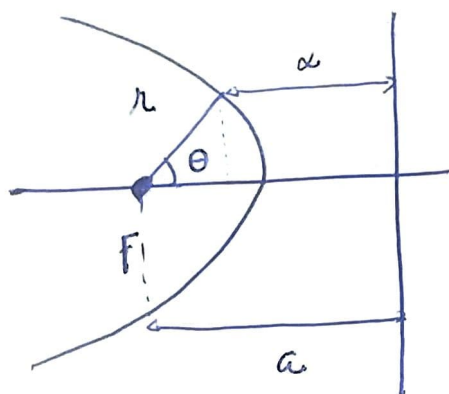
$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e \cos \theta}{a(1 - e^2)}$$

onde $e < 1$.

Parábola

(9-2)

É o lugar geométrico dos pontos de um plano equidistantes a um foco F e a uma reta geratriz que dista $\underline{a}$ de F .



Como a é igual a r (pela definição)

temos que

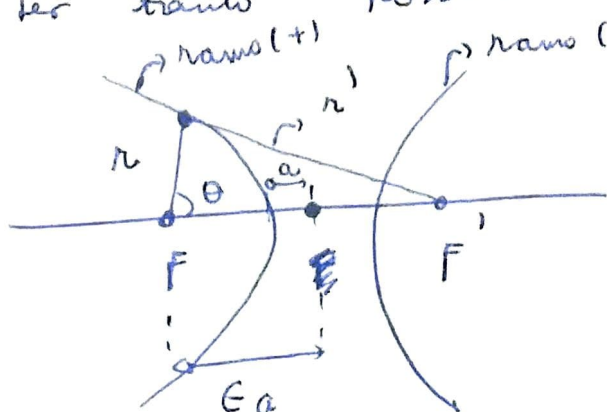
$$a - r \cos \theta = r \quad \text{e finalmente}$$

$$a = r(1 + \cos \theta) \quad \text{ou}$$

$$\text{ainda} \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{a} (1 + \cos \theta)$$

Hiperbole

É o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja diferença das distâncias a dois focos fixos é constante. Essa distância pode ser tanto positiva como negativa.



$$r' - r = 2a$$

Então

19-3

$$r'^2 = r^2 + 4e^2 a^2 - 4r ea \cos \theta$$

Como

$$r'^2 = r^2 + 4ar + 4a^2 \quad \text{obtemos}$$

$$e^2 a^2 - 4ar \cos \theta = ar + a^2$$

$$a^2 (e^2 - 1) = ar (1 + e \cos \theta)$$

e finalmente

$$\frac{1}{r} = \frac{(1 + e \cos \theta)}{a(e^2 - 1)} \quad (\text{para o ramo } (+))$$

e analogamente (ao usarmos $r' - r = -2a$)

$$\frac{1}{r} = \frac{e \cos \theta - 1}{a(e^2 - 1)}$$

para o ramo $(-)$.

Note que as três cônicas acima podem ser escritas sob a forma

$$\frac{1}{r} = A + B \cos \theta \quad (B > 0)$$

• Elipse $\Rightarrow A > B$ e $e = \frac{B}{A}$, $a = \frac{A}{A^2 - B^2}$

• Parábola $a = \frac{1}{A} = \frac{1}{B}$

• Hipérbole $e = \frac{B}{A}$, $a = \frac{A}{B^2 - A^2}$, onde $0 < A < B$ (ramo $(+)$).
Análogo p/lo ramo $(-)$

Leis de Kepler

($m \rightarrow$ massa reduzida)

20

O movimento confinado numa região para

$$-\frac{mk^2}{2L^2} < E < 0 \quad \text{cujas trajetórias são elípticas}$$

Como $\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m} \Leftrightarrow S = \frac{L}{2m} \tau$, onde

τ é o tempo necessário para completar uma revolução ao redor do centro de força de uma trajetória elíptica.

Como $S = \frac{L}{2m} \tau = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1-e^2}$,

comparando com a equação da elipse

obtemos $\frac{1}{a(1-e^2)} = \frac{mk}{L^2}$

$$\frac{e}{a(1-e^2)} = \sqrt{\left(\frac{mk}{L^2}\right)^2 + \frac{2mE}{L^2}}$$

e portanto

$$e = \sqrt{\frac{1 + \frac{2L^2 E}{mk^2}}{\frac{mk^2}{L^2}}} \quad \text{e } a = \frac{L^2}{2(-E)}$$

Assim $S = \pi a^2 \sqrt{\frac{2(-E)L^2}{mk^2}} = \frac{L}{2m} \tau$

$$\pi a^2 \sqrt{\frac{L^2}{mk} \frac{1}{a}} = \frac{L}{2m} \tau$$

$$\pi^2 a^4 \frac{L^2}{mk a} = \frac{L^2 \tau^2}{4m^2}$$

$$\frac{\tau^2}{3} = \frac{4m\pi^2}{k}$$

ou seja, a razão $\frac{r^2}{a^3}$ é uma constante para a massa reduzida $\underline{m}$.

No caso em que $k = G m_1 m_2$, temos

$$\frac{r^2}{a^3} = \frac{4 m_1 m_2 \pi^2}{(m_1 + m_2) G m_1 m_2}$$

$$\frac{r^2}{a^3} = \frac{4 \pi^2}{G(m_1 + m_2)},$$

que constitui a 3ª lei de Kepler.

É importante notar que enquanto a 1ª e 2ª lei de Kepler valem para quaisquer forças centrais, a 3ª lei de Kepler considera uma força central $\vec{F}(r) = -\frac{k}{r^2} \hat{r}$.

Propriedades de um movimento confinado

Quando o movimento de uma partícula é restrito a uma vizinhança finita do centro de força, o movimento é dito confinado.

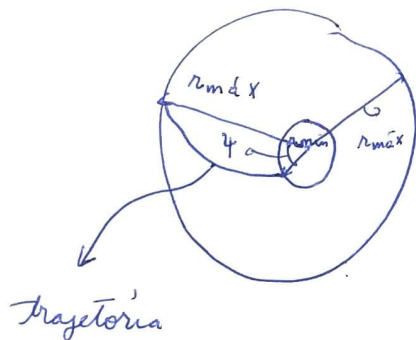
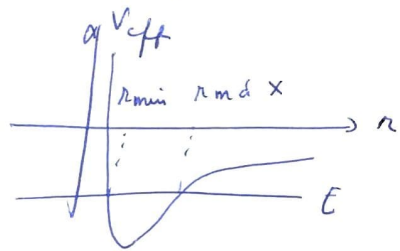
Sempre existe uma distância de maior afastamento ($r_{\max}$) em todos os movimentos confinados. A quantidade ($r_{\min}$), que é a distância de menor aproximação nem sempre existe e depende da natureza da força.

(Ex: $r_{\min} = 0$ para $\vec{F}(r) = k\vec{r}$).

(22)

No caso de uma partícula sujeita a uma força central, $r_{\max}$ define um raio de circunferência que delimita a região de movimento. Se existir um $r_{\min} \neq 0$ ela também define o raio de uma outra circunferência delimitadora, de forma que o movimento torna-se limitado por $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$, onde $r_{\min}$ e $r_{\max}$ são também chamados de distâncias apsidais.

Esquematicamente temos



Dadas as condições iniciais (eq. trajetória)

$$u(0) = u_0 \quad \text{e} \quad \frac{du(0)}{d\theta} = 0 \quad (\text{ponto de retorno})$$

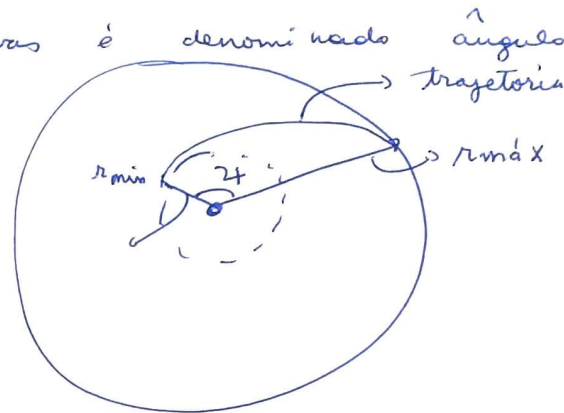
onde $\frac{1}{u_0}$ pode ser $r_{\min}$ ou $r_{\max}$, verificamos

$$\text{que} \quad \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = - \frac{m}{L^2 u^2} F\left(\frac{1}{u}\right) \quad \text{não é}$$

afetada por reflexão ($\theta \rightarrow -\theta$), implicando que

a trajetória é simétrica por reflexão à reta que passa pelo centro de força. O ângulo 2θ entre duas apsides consecutivas é denominado ângulo apsidal.

(23)



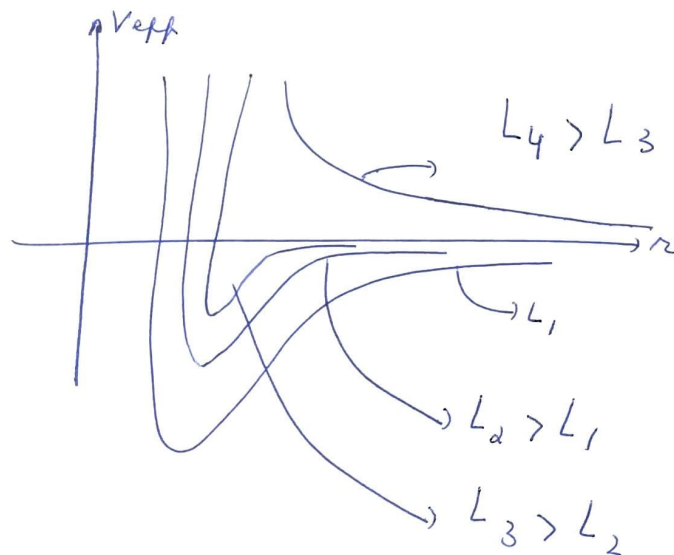
O ângulo 2θ depende da natureza da força central. Como a trajetória é simétrica em relação à direção de qualquer apside, os ângulos apsidais de um movimento com trajetórias fechadas devem ser iguais e uma fração racional de 2π (ou π no caso de um movimento elíptico). Se o ângulo apsidal não for uma fração racional de 2π , a trajetória não é fechada, uma vez que a partícula nunca retorna à origem.

No caso de $\vec{F} = -\frac{k}{r^2} \hat{r}$, a trajetória é fechada. (elíptica)

Estabilidade de órbitas circulares

(24)

Dada uma força central atrativa $\vec{F}(r) = -\frac{k}{r^2} \hat{r}$
e a potencial efetivo $V_{\text{eff}}(r) = -\frac{k}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$
é sempre possível "contrabalançar" a
força atrativa escolhendo um L apropriado,
conforme ilustrado na figura abaixo



Dada a equação

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) = \text{constante } (E)$$

ou

equivalentemente

$$m \ddot{r} = F(r) + \frac{L^2}{mr^3} = - \frac{dV_{\text{eff}}}{dr},$$

a trajetória será circular de raio $\bar{r}$

com $\dot{r} = 0$ (circular) se

(25)

$$\left(\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} \right) \bigg|_{r=\bar{r}} = 0 \quad \text{e} \quad \left(\frac{d^2V_{\text{eff}}}{dr^2} \right) \bigg|_{r=\bar{r}} > 0$$

$$\text{Como } \frac{dV_{\text{eff}}}{dr} \bigg|_{r=\bar{r}} = - \frac{L^2}{m\bar{r}^3} - F(\bar{r})$$

segue que

$$\frac{L^2}{m\bar{r}^3} = -F(\bar{r}).$$

Além disso

$$\frac{d^2V_{\text{eff}}}{dr^2} \bigg|_{r=\bar{r}} = \frac{3L^2}{m\bar{r}^4} - F'(\bar{r}) > 0$$

ou ainda

$$3 \frac{F(\bar{r})}{\bar{r}} + F'(\bar{r}) \leq 0$$

ou equivalentemente

$$F(\bar{r}) + \frac{\bar{r}}{3} F'(\bar{r}) < 0.$$

Por outro lado, para $r = \bar{r}$ em que
 $L = m \bar{r}^2 \dot{\theta}$ e $F(\bar{r}) = -\frac{L^2}{m \bar{r}^3}$, segue

$$\text{que } \frac{d\theta}{dt} = \frac{\sqrt{-m \bar{r}^3 F(\bar{r})}}{m \bar{r}^2} = \sqrt{\frac{-F(\bar{r})}{m \bar{r}}}$$

Como no movimento circular $\dot{\theta} = \text{constante}$,
 e este movimento oscilatório é caracterizado por
 um $r_{\min}$ e $r_{\max}$, podemos estimar o ângulo
 apical φ pela expressão acima de

forma que

$$\varphi = \frac{2}{2} \sqrt{\frac{-F(\bar{r})}{m \bar{r}}},$$

pois após um intervalo de tempo $\frac{2}{\omega}$

o corpo / partícula foi de $r_{\min}$ até $r_{\max}$
 formando o ângulo $\Delta\theta = \varphi$.

Como $\omega = \frac{2\pi}{T_0}$ onde T_0 foi calculado
 anteriormente

$$\varphi = \pi \sqrt{\frac{-F(\bar{r})/m \bar{r}}{-\frac{1}{m} \left[\frac{3}{\bar{r}} F(\bar{r}) + F'(\bar{r}) \right]}},$$

podendo ser ainda reescrito
 como

$$\varphi = \frac{\pi}{\sqrt{3 + \bar{r} \frac{F'(\bar{r})}{F(\bar{r})}}}$$

Lembrando que a expressão acima é
 aproximada e vale para uma trajetória
 aproximadamente circular ($t \ll 1$).

Porém elas não dizem porque para uma
 força central, a trajetória será fechada.
 Conforme calculamos anteriormente

$$\frac{\bar{r} F'(\bar{r})}{F(\bar{r})} = \frac{\bar{r} (+n K \bar{r}^{-n-1})}{-K \bar{r}^{-n}} = -n \quad \text{e}$$

o ângulo apical portanto vale

$$\varphi = \frac{\pi}{\sqrt{3-n}}$$

Note que apenas para $n = -1$ e $n = 2$

φ é um múltiplo inteiro de π .

O primeiro caso corresponde a uma força
 do tipo $\vec{F}(r) = -K/r$ e o segundo à força central $\vec{F}(r) = -K/r^2$

Dada uma força central atrativa
 $\vec{F}(r) = -\frac{K}{r^n} \hat{r}$ como

(26)

$$F'(\bar{r}) = + \frac{nK}{\bar{r}^{n+1}} \text{ temos}$$

$$-\frac{K}{\bar{r}^n} \left[1 - \frac{n}{3} \right] < 0$$

ou seja a trajetória circular será estável apenas se $1 - \frac{n}{3} > 0$

$$\text{ou } \underline{n < 3} //$$

Uma órbita elíptica (mas quase circular, isto é $\epsilon \ll 1$) pode ser considerada como circular no qual uma perturbação é aplicada.

Mostraremos a seguir que tal tratamento nos permitirá estimar o ângulo apsidal

e bem como se a trajetória elíptica é aberta ou fechada.

Neste caso, expandindo $V_{\text{eff}}(r)$ em torno do mínimo $r = \bar{r}$ consistente com a trajetória circular, temos

$$V_{\text{eff}}(r) \sim V_{\text{eff}}(\bar{r}) + \frac{d^2 V_{\text{eff}}}{dr^2} \bigg|_{r=\bar{r}} \frac{(r-\bar{r})^2}{2},$$

onde $\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} \bigg|_{r=\bar{r}} = 0$ pelo fato de

(27)

expansão ser em torno do mínimo do potencial efetivo (onde a trajetória é circular).

$$\text{Neste caso, sendo } \omega_0^2 \equiv \frac{1}{m} \frac{d^2 V_{\text{eff}}}{dr^2} \bigg|_{r=\bar{r}},$$

temos que

$$m \ddot{r} = -m \omega_0^2 (r - \bar{r})$$

chamando $\xi = r - \bar{r}$ temos

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0, \text{ que é a mesma}$$

equação de movimento de um oscilador harmônico unidimensional, de forma que a perturbação na estabilidade da órbita circular terá "caráter" harmônico.

Conforme vimos anteriormente

$$\frac{d^2 V_{\text{eff}}}{dr^2} \bigg|_{r=\bar{r}} = -3 \frac{F(\bar{r})}{\bar{r}} - F'(\bar{r})$$

$$\text{e portanto } \omega_0^2 = -\frac{1}{m} \left[\frac{3}{\bar{r}} F(\bar{r}) + F'(\bar{r}) \right]$$

Espectramento de Rutherford

(31)

Os primeiros estudos sobre a estrutura do átomo começaram no século XIX, porém apenas com a descoberta dos elétrons em 1897 foi que a estrutura interna dos átomos começou a ser investigada.

Citamos o modelo de Thomson (pudim de passas) onde as cargas positivas estavam distribuídas uniformemente em uma esfera "gelatinosa" e os e^- s, sendo muito pequenos, estavam encrustados ^{dentro} nela de forma a manter a neutralidade do átomo e o equilíbrio eletrostático.

Oraio de um átomo, era  da ordem de 10^{-10} m (O raio de um átomo típico, segundo a época).

Em 1911, Rutherford mostrou a inadequabilidade ^{inicial} do modelo de Thomson ao α partículas sobre os átomos. Rutherford, mostrou que ao invés de ser e^- de distribuída pelo átomo, as cargas positivas estavam concentradas no núcleo do átomo.

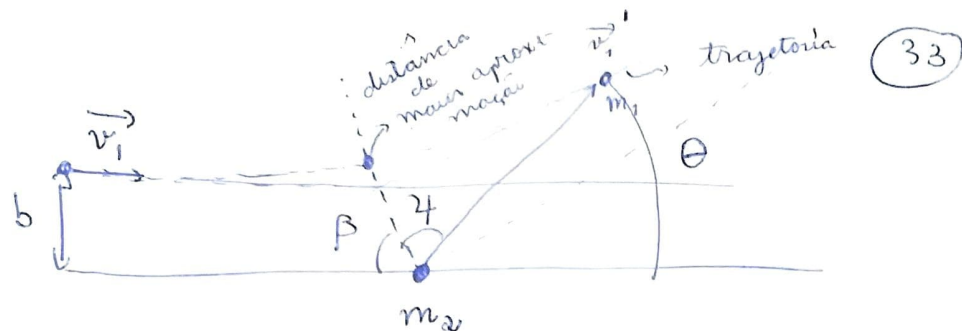
Segundo o modelo de Thomson, uma vez que as cargas positivas estavam distribuídas de forma uniforme sobre todo o volume de raio 10^{-10} m, a repulsão Coulombiana não seria "intensa" o suficiente para produzir grandes deflexões de partículas α . Experimentalmente,

verificou-se que algumas partículas α sofriam ⁽³²⁾ deflexões significativamente grandes, sendo até partículas α espalhadas de volta também encontradas.

Portanto, a existência de uma pequena, porém finita "probabilidade" de espalhamento à ângulos grandes não pode ser explicada pelo modelo de Thomson. Isto levou a Rutherford a propor um modelo atômico novo, no qual as cargas positivas estavam concentradas numa pequena região denominada de núcleo, neste caso, sendo as dimensões do núcleo

"pequenas" o suficiente, a partícula α incidindo sobre o núcleo seria espalhada devido à "forte repulsão coulombiana". Como a massa do e^- << massa do núcleo, Rutherford desprezou a contribuição eletrônica. A figura abaixo ilustra o espalhamento de uma partícula α (de carga $Z_1 e$) e massa m_1 incidindo sobre um núcleo ^{de massa m_2} de carga $+Z_2 e$, sendo e a carga do elétron. Como a repulsão coulombiana é uma força

central, toda discussão que apresentamos aqui pode ser utilizada, desde que usamos a conservação da energia, do vetor momento angular e usamos o referencial relativo ao alvo (átomo ^{deve}). Além disso, consideramos a partícula α em repouso (no referencial do laboratório).



Vamos a seguir reavaliar as seguintes relações (obtidas anteriormente)

$$(m_1 + m_2) \vec{R}_{cm} = 0 \Rightarrow \vec{R}_{cm} = 0$$

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r^2} \hat{r} \quad \left(\begin{array}{l} \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \\ \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \end{array} \right)$$

$$V(r) = - \int_{\infty}^r \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r'^2} dr' = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}$$

$$V_{eff}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}$$

e o momento angular do movimento relativo

pode ser usado pelas condições antes da colisão e

é dado por $\vec{L} = \mu (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \mu v_1 b$, pois

como a partícula 2 está em repouso no

referencial do laboratório, $\dot{\vec{r}} = \vec{v}_1$ o parâmetro de impacto. Uma das interpretações é que b seria a distância de menor aproximação se não houvesse interação, de forma que a trajetória seria reta. Além disso, $E = \frac{1}{2} \mu v_1^2 + V_{eff}(r) = \frac{1}{2} \mu v_1^2$

pois, novamente como mencionado anteriormente, $(\vec{v}_2 = 0)$ no referencial do laboratório

Da relação acima, encontramos que a distância de menor aproximação satisfaz a condição

$$\frac{\mu v_1^2}{2} = \frac{(\mu v_1 b)^2}{2\mu r_1^2} + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r_1}$$

ou ainda

$$\frac{1}{r_1} = - \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\mu v_1^2 b^2} + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\mu v_1^2 b^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\mu v_1 b}{Z_1 Z_2 e^2} \right)^2}$$

Para encontrarmos a trajetória da figura devemos lembrar que

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = - \frac{\mu Z_1 Z_2 e^2}{\mu v_1^2 b^2} \quad \left(u = \frac{1}{r} \right)$$

onde ϕ é o ângulo formado / medido entre a direção polar. Portanto

$$u(\phi) = A \cos \phi + B \sin \phi - \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\mu v_1^2 b^2}$$

considerando (novamente) $u(0) = \frac{1}{r_1}$ e

$u'(0) = 0$ temos que

$$\frac{1}{r} = - \frac{z_1 z_2 e^2}{\mu v_1^2 b^2} + \frac{z_1 z_2 e^2}{\mu v_1^2 b^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\mu v_1^2 b}{z_1 z_2 e^2} \right)^2} \cos \varphi,$$

de forma que a trajetória é uma hipérbole

Alguns pontos:

- Uma vez que a trajetória da partícula é simétrica (sob a ação de uma força central) (vide eq. acima) temos que $\varphi = \beta$.

Além disso, de acordo com a equação anterior quando $r \rightarrow \infty$ (partícula 2 suficientemente distante da partícula 1)

segue que $r \rightarrow \infty$ e portanto $\varphi \rightarrow \Theta$.
 Como $\Theta = \beta$
 portanto $2\Theta + \Theta = \pi \Rightarrow \Theta = \frac{\pi - \Theta}{2}$

sendo Θ o ângulo de espalhamento

- Foi considerado/tratado o raio do núcleo menor que o raio clássico do e^- (que é $2,8 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$) a fim de tratá-lo
- Portanto $\cos\left(\frac{\pi - \Theta}{2}\right) = \sin\frac{\Theta}{2}$, de onde como partícula

chegamos a expressão para o ângulo

de espalhamento

$$\cot\left(\frac{\Theta}{2}\right) = \frac{\mu v_1^2 b}{z_1 z_2 e^2}$$

De acordo com a relação acima, conhecendo-se o parâmetro de impacto b determinamos Θ , uma vez que μv_1^2 e $z_1 z_2 e^2$ são medidos e conhecidos, respectivamente.

Como foi adotado o sistema de referência fixo no alvo, o ângulo Θ é o mesmo visto daquele no C.M. Para encontrarmos

Θ no referencial do laboratório, é necessário incluirmos a contribuição do C.M. Entretanto tipicamente $\frac{m_2}{m_1} \gg 1$, de forma que o C.M. tem pode ser considerado em repouso na origem. Neste caso $\mu \approx m_1$ e Θ é o mesmo daquele medido no laboratório. Determinando-se b, obtemos

Θ . Note que $\Theta \rightarrow \pi$ quando $b \rightarrow 0$ e $\Theta \rightarrow 0$ quando $b \rightarrow \infty$ (partículas de que passam longe do núcleo sofrem pequenas deflexões).

Entretanto, dado que não é possível medirmos b para cada Θ , temos que introduzir outros conceitos para estudar o espalhamento. Isto pode ser feito por meio do conceito de seção de choque

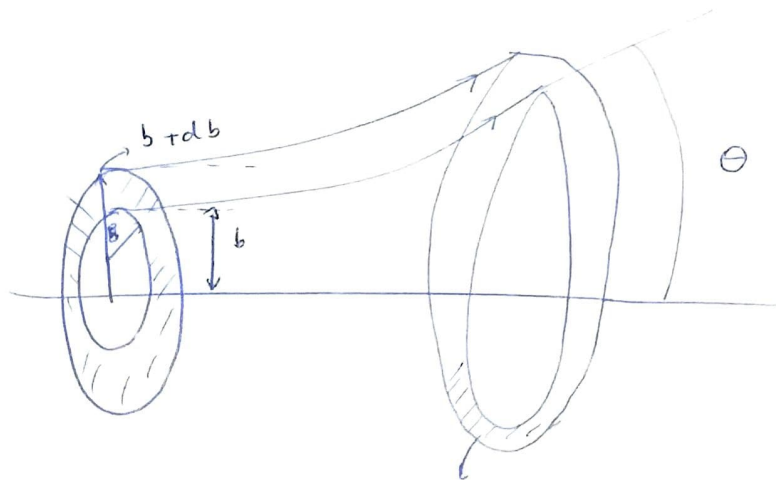
(37)

Considere todas as partículas que se aproximam do alvo com parâmetro de impacto entre b e $b+db$. Elas estão sobre um anel incidente de área (de seção de choque) dada por

$$d\sigma = 2\pi b db$$

Essas mesmas partículas emergem entre os ângulos θ e $\theta + d\theta$ em um ângulo sólido

$$d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta.$$



$$d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$$

Portanto

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|, \text{ onde o módulo foi introduzido}$$

(38)

pois θ pode decrescer com o aumento de b (devido a força central)

Por outro lado $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta)$ pode ser medida

experimentalmente uma vez que

$\int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$ é o número de partículas

que foram espalhadas na direção (θ, φ) formando o ângulo sólido $d\Omega$.

$$\text{Uma vez que } b = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{m_1 v_1^2} \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\frac{db}{d\theta} = - \frac{Z_1 Z_2 e^2}{2 m_1 v_1^2} \frac{1}{\sin^2(\theta/2)}$$

e finalmente

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) = \frac{1}{4} \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{m_1 v_1^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)},$$

que é a fórmula do espalhamento de Rutherford. Se ^{considerarmos} a força coulombiana atrativa, a seção de choque seria

a mesma que a eq. anterior.