

AULA 12

Mecânica Quântica I

(d) Estados Coerentes

O estado fundamental do oscilador harmônico evoluído no tempo que vimos na aula passada pertence a uma classe de estados coerentes que tem um papel muito importante na teoria quântica da luz.

Considere o oscilador não forçado e o conjunto de estados produzidos por $\mathcal{D}(z)$ agindo em $|0\rangle$

$$|z\rangle = \mathcal{D}(z)|0\rangle = e^{-|z|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

$z \in \mathbb{C}$
↑
parâmetro
ind. do tempo

$$= e^{-\frac{1}{2}|z|^2} e^{za^\dagger} e^{-z^*a} |0\rangle \quad (1)$$

$$= e^{-|z|^2/2} e^{za^\dagger} |0\rangle$$

esses vetores são estados coerentes, $|z\rangle$ é um autovetor do operador a

~~$$a|z\rangle = z|z\rangle$$~~
$$a|z\rangle = z|z\rangle \quad (2)$$

$$e^{a^\dagger z} a e^{-a^\dagger z} = a + e^{a^\dagger z} [a, e^{-a^\dagger z}] = a - z$$

$$\Rightarrow e^{a^\dagger z} a = (a - z) e^{a^\dagger z}$$

$$e^{a^\dagger z} a |0\rangle = (a - z) e^{a^\dagger z} |0\rangle = 0 \Rightarrow a|z\rangle = z|z\rangle$$

seja $z = \frac{1}{\sqrt{2}} (q_0 + i p_0)$ $q_0, p_0 \in \mathbb{R}$ *const. reais*

$$D(z) = D(q_0, p_0) = \exp [i (p_0 \tilde{q} - q_0 \tilde{p})] (\equiv \exp [z a^\dagger - z^* a]) \quad (3)$$

Note que: $a = \frac{1}{\sqrt{2}} (\tilde{q} + i \tilde{p})$ $a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\tilde{q} - i \tilde{p})$

$$\begin{aligned} z a^\dagger - z^* a &= \frac{1}{\sqrt{2}} (q_0 + i p_0) \frac{(\tilde{q} - i \tilde{p})}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} (q_0 - i p_0) \frac{1}{\sqrt{2}} (\tilde{q} + i \tilde{p}) \\ &= \frac{1}{2} [\cancel{q_0 \tilde{q}} - i q_0 \tilde{p} + i p_0 \tilde{q} + p_0 \tilde{p} - \cancel{q_0 \tilde{q}} - i q_0 \tilde{p} + i p_0 \tilde{q} - p_0 \tilde{p}] \\ &= i (p_0 \tilde{q} - q_0 \tilde{p}) \end{aligned}$$

essa é uma translação no espaço de fase de uma distância q_0 e momento p_0 . Vejamos

$$D(z) = D(q_0, p_0) = e^{\frac{i}{2} q_0 p_0} e^{-i q_0 \tilde{p}} e^{i p_0 \tilde{q}} \quad (4a)$$

$$[\tilde{q}, \tilde{p}] = i$$

$$= e^{-\frac{i}{2} q_0 p_0} e^{i p_0 \tilde{q}} e^{-i q_0 \tilde{p}} \quad (4b)$$

$$D^\dagger \tilde{p} D = \tilde{p} + D^\dagger [\tilde{p}, D] = \tilde{p} + p_0 \quad (5a)$$

$$D^\dagger \tilde{q} D = \tilde{q} + D^\dagger [\tilde{q}, D] = \tilde{q} + q_0 \quad (5b)$$

Para a função de onda temos

$$\langle u | D(z) | 0 \rangle = e^{-\frac{i}{2} q_0 p_0} e^{i p_0 u} \langle u | e^{-i q_0 \tilde{p}} | 0 \rangle \quad (2)$$

$$= e^{-\frac{i}{2} q_0 p_0} e^{i u p_0} \langle u - q_0 | 0 \rangle = e^{-\frac{i}{2} q_0 p_0} e^{i u p_0} \varphi_0(u - q_0)$$

Como o estado fundamental deslocado $|z\rangle$ evolui com t ?

$$e^{-i H_0 t} |z\rangle = \cancel{e^{-\frac{i}{2} t}} \cancel{e^{-i H_0 t}} \cancel{e^{i H_0 t}} \cancel{e^{i t}} \cancel{e^{i H_0 t}} \rightarrow$$

$$= e^{-i H_0 t} \mathcal{D}(z) |0\rangle$$

$$= e^{-i H_0 t} \mathcal{D}(z) e^{i H_0 t} e^{-i H_0 t} |0\rangle$$

$$= e^{-\frac{i t}{2}} \left(e^{-i H_0 t} \mathcal{D}(z) e^{i H_0 t} \right) |0\rangle$$

$$= e^{-\frac{i t}{2}} \exp [z a^+ e^{-i t} - z^* a e^{i t}] |0\rangle \quad (6)$$

Note que a dependência temporal de a e a^+ é oposta a que usamos antes pois a equação (6) está na descrição de Schrödinger. A menos de fase devido a energia de ponto zero (que definiremos agora como zero)

$$e^{-i H_0 t} |z\rangle = |z e^{-i t}\rangle = \mathcal{D}(z e^{-i t}) |0\rangle \quad (7)$$

a evolução temporal meramente substitui

$$z \rightarrow z e^{-i t}$$

$$z e^{-i t} = \frac{1}{\sqrt{2}} (q_0 \cos t + p_0 \sin t) + i (p_0 \cos t - q_0 \sin t) \quad (8)$$

logo em t o estado coerente é o estado fundamental não deformado deslocado p/ a posição e momento que o oscilador clássico teria se tivesse sido colocado em movimento em $t=0$ com condições iniciais (q_0, p_0) .

Uma propriedade importante dos estados coerentes segue imediatamente do fato que $|z\rangle$ é autoestado de a

$$D^\dagger(z) a D(z) = a + D^\dagger(z) [a, D(z)] = a + z$$

$$\Rightarrow a D(z) = D(z) (a + z) \quad a|0\rangle = 0$$

$$a D(z) |0\rangle = \underline{a|z\rangle} = D(z) (z+a) |0\rangle = \underline{z|z\rangle}$$

exp $\bar{A}(t)$ é o valor esperado de qualquer operador A em um estado coerente.

$$\begin{aligned} \langle z | e^{iH_0 t} a e^{-iH_0 t} | z \rangle &= \langle z e^{-it} | a | z e^{-it} \rangle = \bar{a}(t) \\ &= z e^{-it} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{q}(t) + i \bar{p}(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle z | e^{iH_0 t} H_0 e^{-iH_0 t} | z \rangle &= \langle z | H_0 | z \rangle = \langle z | a^\dagger a | z \rangle = |z|^2 = \bar{H} \\ &= \frac{1}{2} (p_0^2 + q_0^2) \equiv E_0 \quad \text{que é a energia do oscilador clássico.} \end{aligned}$$

o fato que o valor mais baixo de $\bar{H}$ não ser $\frac{1}{2}\hbar\omega$ (ou $\frac{1}{2}$ p/as unidades adimensionais) é devido a termos redefinindo a energia de ponto zero (estado fundamental) como zero.

A expansão dos estados coerentes em termos dos autoestados de energia

$$|z\rangle = e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = D(z) |0\rangle = e^{-|z|^2/2} e^{za^\dagger} |0\rangle$$

$$\langle z|z\rangle = \langle 0| D(z)^\dagger D(z) |0\rangle = 1. (9)$$

mas

$$\langle z'|z\rangle = \langle 0| D^\dagger(z') D(z) |0\rangle$$

$$= e^{-\frac{1}{2}(|z|^2 + |z'|^2)} \langle 0| e^{z'^* a} e^{za^\dagger} |0\rangle$$

$$= e^{-\frac{1}{2}(|z|^2 + |z'|^2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z'^* z)^n}{n!} = e^{-\frac{1}{2}(|z|^2 + |z'|^2)} e^{z'^* z}$$

$$|\langle z'|z\rangle|^2 = e^{-|z-z'|^2} \quad (10) \quad (\text{"distância" entre 2 estados coerentes})$$

não são ortogonais, eles formam um conjunto completo mas não ortogonais

A distribuição dos valores de n é uma lei de Poisson

$$p(n) = |\langle n | z \rangle|^2 = e^{-|z|^2} \frac{|z|^{2n}}{n!} \quad (11)$$

$$= \frac{E_0^n e^{-E_0}}{n!}$$

$$\bar{N} = \sum_n n p_n = e^{-E_0} E_0 \frac{d}{dE_0} \sum_n \frac{E_0^n}{n!} = E_0 = |z|^2$$

~~$$(\Delta N)^2 \equiv \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 = \bar{N}^2$$~~

$$(\Delta N)^2 \equiv \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 = \bar{N} = E_0$$

A complete set is established

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dq_0 \int_{-\infty}^{+\infty} dp_0 |z\rangle \langle z| = \int_{-\infty}^{+\infty} dq_0 \int_{-\infty}^{+\infty} dp_0 \mathcal{D}(z) |0\rangle \langle 0| \mathcal{D}^\dagger(z)$$

$$= \int dq_0 dp_0 e^{-|z|^2} e^{z a^\dagger} |0\rangle \langle 0| e^{z^* a}$$

$$= \int dq_0 dp_0 e^{-|z|^2} \sum_{n,m} \frac{z^n (z^*)^m}{\sqrt{n! m!}} |n\rangle \langle m|$$

$$z = q_0 + i p_0 = p e^{i\phi}$$

$$\int_0^\infty p dp \int_0^{2\pi} d\phi e^{-p^2} \sum_{n,m} \frac{p^{n+m}}{\sqrt{n! m!}} e^{i(n-m)\phi} |n\rangle \langle m| \quad (12)$$

(6)

em (12) a integral angular é nula se $n \neq m$, e usando

$$\boxed{\int_0^\infty da a^n e^{-a} = n!} \quad p^2 = a \quad 2p dp = da$$

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty da e^{-a} a^n / n! = 1/2$$

$$(12) \Rightarrow \sum_n \int_0^{2\pi} d\phi \frac{1}{2} |n\rangle \langle n| = \frac{2\pi}{2} \sum_n |n\rangle \langle n| = \pi$$

$$\frac{1}{\pi} \int d\text{Re} z d\text{Im} z |z\rangle \langle z| = \frac{1}{\pi} \int d^2 z |z\rangle \langle z| \equiv \mathbb{I} \quad (13)$$

os estados coerentes não são L.I.

Vemos que a trajetória clássica do oscilador no plano $\{q(t), p(t)\}$ é determinada pelo valor inicial de

$$z = q_0 + i p_0 \in \mathbb{C} : z = |z| e^{i\theta} \quad |z| = \sqrt{E_0} \text{ está}$$

fixo pelo valor de energia do oscilador clássico. Qual a interpretação de fase de $z e^{-i\omega t} = |z| e^{i(\theta - \omega t)}$

$\phi(t) = \theta - \omega t$, tomemos $\theta = 0$ p/ simplificar.

$$z(t) = |z| e^{-i\omega t}$$

(colocando de volta as unidades)

(7)

$$\hat{q} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \left(\frac{a + a^\dagger}{\sqrt{2}} \right) \quad \hat{p} = \sqrt{m\omega\hbar} i \left(\frac{a^\dagger - a}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\langle z(t') | \hat{q} | z(t') \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle z(t') | a + a^\dagger | z(t') \rangle$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} 2 \operatorname{Re} z(t') = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} |z| \cos \omega t'$$

$$\langle z(t') | \hat{p} | z(t') \rangle = \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}} i \langle z(t') | a^\dagger - a | z(t') \rangle$$

$$= -\sqrt{2\hbar m\omega} \operatorname{Im} z(t') = -\sqrt{2\hbar m\omega} |z| \sin \omega t'$$

os pontos $\{ \langle \hat{q}(t) \rangle, \langle \hat{p}(t) \rangle \}$ descrevem uma elipse, se usarmos os operadores adimensionais

$$\tilde{q} \text{ e } \tilde{p} : \quad \langle \tilde{q} \rangle(t) = \sqrt{2} |z| \cos t$$

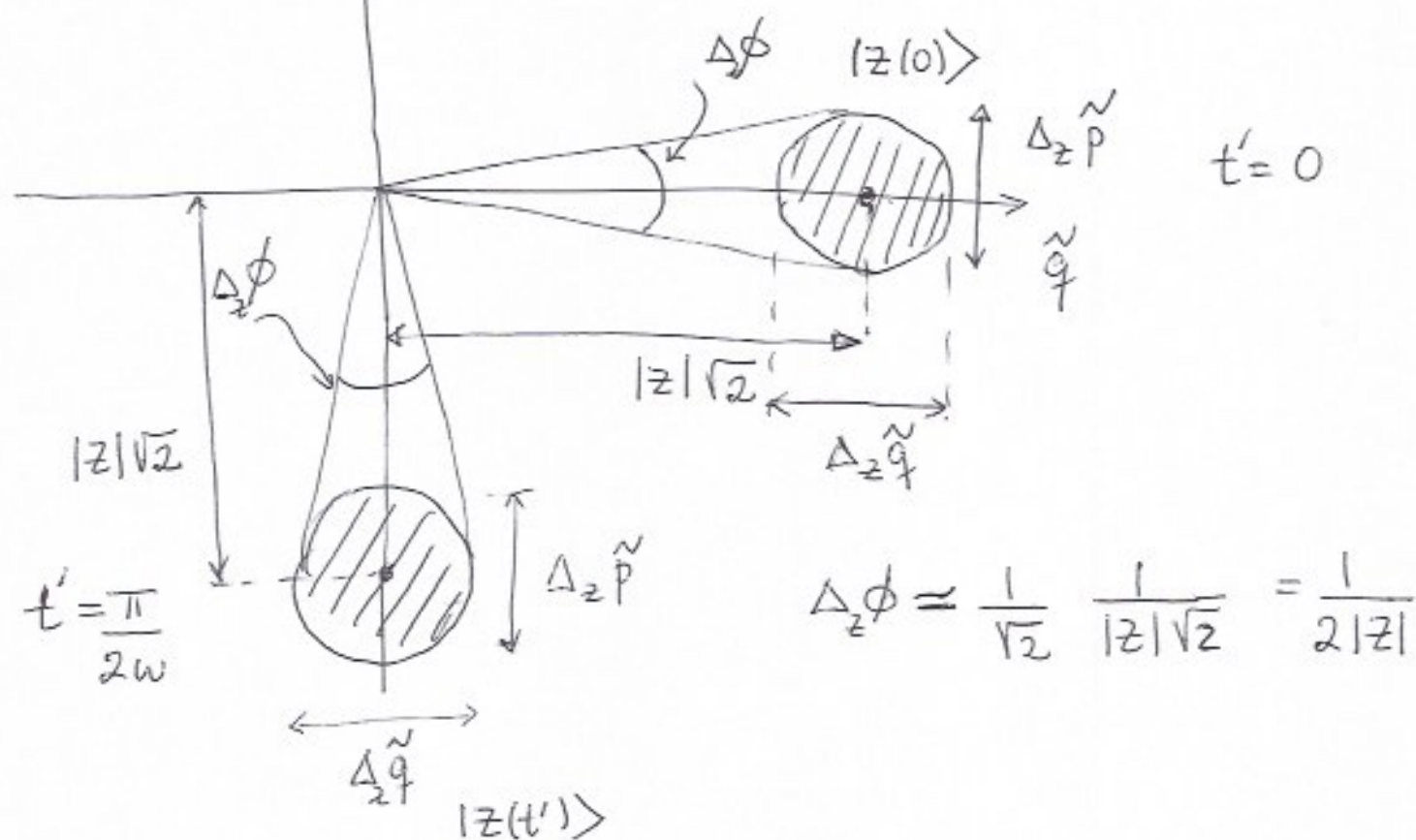
$$\langle \tilde{p} \rangle(t) = -\sqrt{2} |z| \sin t$$

descrevem um círculo de raio $\sqrt{2} |z| = \sqrt{2} E_0$ no plano $\{ \tilde{q}, \tilde{p} \}$. É possível mostrar facilmente

que

$$\Delta_z \tilde{q} = \Delta_z \tilde{p} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{Mostre!})$$

flutuações de fase



$$\Delta_z \phi \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{|z|\sqrt{2}} = \frac{1}{2|z|}$$

Vimos que p/ estados coerentes $\Delta_z N = |z|$ de maneira que

$$\Delta_z \phi \Delta_z N \approx \frac{1}{2} \quad \bar{N}_z = |z|^2, \quad \Delta_z N = \sqrt{\bar{N}_z}$$

$\tilde{p}$ e $\tilde{q}$ são chamados de operadores de quadratura.

Essas noções são importantes na quantização dos campos e.m. onde cada modo do campo pode ser caracterizado por um número de ocupação n , # de fótons em cada modo

$$|n_{\vec{k}_1}, n_{\vec{k}_2}, \dots\rangle = |n_{\vec{k}_1}\rangle \otimes |n_{\vec{k}_2}\rangle \otimes \dots$$

espaço de Fock

↑ auto-estados de energia e do operador de número

(9)

(e) Movimento em Campo Magnético

Considere uma partícula carregada, em um campo magnético uniforme e estático.

(i) equações de movimento e espectro de energia

e = carga da partícula

m = massa da partícula.

$\vec{A}$ potencial vetor associado ao campo $\vec{B}$, $\vec{A}(\vec{q})$

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 \quad (1) \text{ e' o Hamiltoniano do sistema}$$

$$\vec{v} = \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) / m \quad (2) \quad \vec{p} \text{ e' o momento canônico.}$$

usando

$$i\hbar \frac{d}{dt} q_j(t) = i\hbar v_j(t) = [q_j(t), H] \quad \text{Eq. de Heisenberg.}$$

$$= [q_j(t), \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{e}{2mc} \vec{p} \cdot \vec{A} - \frac{e}{2mc} \vec{A} \cdot \vec{p}]$$

$$= \frac{1}{2m} [q_j(t), \vec{p}^2] - \frac{e}{2mc} [q_j(t), \vec{p} \cdot \vec{A}] - \frac{e}{2mc} [q_j(t), \vec{A} \cdot \vec{p}]$$

$$= i\hbar \frac{p_j}{m} - \frac{e}{2mc} [q_j(t), p_i] A_i - \frac{e A_i}{2mc} [q_j(t), p_i]$$

$$= i\hbar \frac{p_j}{m} - \frac{i\hbar e}{2mc} S_{ji} A_i - \frac{i\hbar e}{2mc} S_{ji} A_i$$

$$= i\hbar \left[\frac{p_j}{m} - \frac{e}{mc} A_j \right]$$

$$[q, p^n] = i\hbar n p^{n-1}$$

(10)

$$\therefore \vec{v} = (\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}) / m$$

$$\Rightarrow H = \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2 \quad (3) \quad \left(\begin{array}{c} \text{Invariante de} \\ \text{gauge} \end{array} \right)$$

cuidado: essa não é a energia de uma partícula livre!

$$[v_i, v_j] = \frac{1}{m^2} [p_i - \frac{e}{c} A_i, p_j - \frac{e}{c} A_j]$$

$$= \frac{-e}{m^2 c} [p_i, A_j] - \frac{e}{m^2 c} [A_i, p_j]$$

$$= \frac{-e}{m^2 c} \left(-i\hbar \frac{\partial A_j}{\partial q_i} \right) - \frac{e}{m^2 c} \left(i\hbar \frac{\partial A_i}{\partial q_j} \right)$$

$$= \frac{i e \hbar}{m^2 c} \left(\frac{\partial A_j}{\partial q_i} - \frac{\partial A_i}{\partial q_j} \right) = \frac{i e \hbar}{m^2 c} \epsilon_{ijk} B_k \quad (4)$$

$\uparrow$
 (invariante de gauge)

onde usamos:

$$[p, F(q)] = -i\hbar \frac{\partial F(q)}{\partial q}$$

$$\epsilon_{ijk} B_k = \epsilon_{ijk} (\epsilon_{k\ell m} \partial_\ell A_m) = \epsilon_{ijk} \epsilon_{\ell m k} \partial_\ell A_m$$

$$= (\delta_{i\ell} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{j\ell}) \partial_\ell A_m$$

$$= \partial_i A_j - \partial_j A_i$$

A equação de movimento

$$i\hbar \dot{\vec{v}}(t) = [\vec{v}, H] \Rightarrow i\hbar \frac{d\vec{v}}{dt} = [v_j, \frac{m}{2} v_k v_k]$$

$$= \frac{m}{2} \left\{ v_k [v_j, v_k] + [v_j, v_k] v_k \right\}$$

$$= \frac{m}{2} \left\{ \frac{i e \hbar}{m^2 c} \epsilon_{jke} v_k B_e + \frac{i e \hbar}{m^2 c} \epsilon_{jke} B_e v_k \right\}$$

$$\dot{v}_j(t) = \left\{ \frac{e}{2mc} (\vec{v} \times \vec{B})_j - \frac{e}{2mc} (\vec{B} \times \vec{v})_j \right\}$$

$$\therefore \dot{\vec{v}}(t) = \frac{e}{2mc} (\vec{v} \times \vec{B} - \vec{B} \times \vec{v}) \quad (5)$$

$$[B_j, v_k] = [B_j, \frac{p_k}{m}] - \frac{e}{mc} [B_j, A_k]$$

$$= \frac{i\hbar}{m} \frac{\partial B_j}{\partial q_k} \quad (6)$$

a equação de movimento geral é

$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{e}{mc} \vec{v} \times \vec{B} + \frac{i e \hbar}{2m^2 c} \vec{\nabla} \times \vec{B}} \quad (7)$$

termo ausente
na e.m.
clássico

* Consideremos agora $\vec{B} = (0, 0, B)$, $B > 0$

$[v_x, v_y] = \frac{i e \hbar}{m^2 c} B$ é o único comutador não nulo.

$$H = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \quad v_z = \frac{p_z}{m} \quad [v_x, v_z] = [v_y, v_z] = 0$$

$\Rightarrow$ o momento paralelo a $\vec{B}$ é uma constante de movimento, como no caso clássico. O movimento ao longo de $\vec{B}$ é simplesmente o de uma partícula livre. Assim só vamos nos preocupar com o que acontece no plano $xy \perp \vec{B}$ para o qual

$$H = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2)$$

$$[v_x, v_y] \neq 0 \quad [v_x, H] \neq 0 \quad [v_y, H] \neq 0$$

mas $[v_x, v_y] \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ o movimento no plano $\perp \vec{B}$ é o de um oscilador harmônico!

Def: $a \equiv \sqrt{\frac{m}{2\hbar\omega_c}} (v_x + i v_y)$

$$\omega_c \equiv \frac{eB}{mc}$$

frequência
ciclotron (13)

$$a^{\dagger} \equiv \sqrt{\frac{m}{2\hbar\omega_c}} (v_x - i v_y)$$

$$[v_x, v_y] = i\hbar \frac{\omega_c}{m}$$

$$[a, a^{\dagger}] = \frac{m}{2\hbar\omega_c} [v_x + i v_y, v_x - i v_y] = \frac{m}{2\hbar\omega_c} [v_x, v_y] (-2i)$$

$$= 1.$$

$$\boxed{H = \hbar\omega_c (a^{\dagger}a + 1/2)}$$
 p/ o movimento no plano $\perp \vec{B}$

Conhecemos as soluções p/ o espectro

$$E_n = \hbar\omega_c \left(\frac{1}{2} + n\right) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \underline{\text{níveis de Landau}}$$

~~definimos o comprimento característico~~

~~$$l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_c}}$$~~

~~$$a_B = \frac{\hbar}{me^2} \quad (\text{Raio de Bohr})$$~~

p/ um elétron $e = -|e| < 0$

Podemos estimar a velocidade característica do estado de energia E_n

$$(v/c) \sim 5 \times 10^{-10} \left(\frac{B}{T}\right) n$$

tipicamente não relativísticas.

Quando B é uniforme a equação de movimento se simplifica

(14)

$$\dot{v}_x = \omega_c v_y$$

$$\dot{v}_y = -\omega_c v_x$$

a solução é a mesma que para o caso clássico. Se $e > 0$ temos um movimento circular horário com frequência angular ω_c ($e < 0$ o mov. é anti horário)

$$\begin{cases} x(t) = x_0 - \frac{1}{\omega_c} v_y(t) \\ y(t) = y_0 + \frac{1}{\omega_c} v_x(t) \end{cases}$$

$$x_0 = x(t) + \frac{1}{\omega_c} v_y(t)$$

$$y_0 = y(t) - \frac{1}{\omega_c} v_x(t)$$

São operadores!
 $\swarrow \downarrow$
 $[x_0, y_0] = -i l_B^2$ (Mostre!)

$$l_B \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_c}}$$

$$v_x(t) = \frac{1}{i\hbar} [x(t), H]$$

$$= \frac{1}{i\hbar} \left\{ [x_0, H] - \frac{1}{\omega_c} [v_y(t), H] \right\}$$

$$[v_y(t), \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2)] = \frac{1}{2} m [v_y(t), v_x^2] = -i\hbar \omega_c v_x(t)$$

$$\therefore [x_0, H] = 0 \quad \text{de forma análoga} \quad [y_0, H] = 0$$

são const. de movimento!

(15)

x_0 e y_0 são const. de movimento
mas como não comutam, só uma delas pode ser
diagonalizada simultaneamente com H

$$R^2 \equiv [x(t) - x_0]^2 + [y(t) - y_0]^2 = \frac{2}{m\omega_c^2} H$$

O raio da órbita é proporcional à energia

$$R^2 |E_n\rangle = \frac{2}{m\omega_c^2} H |E_n\rangle = \frac{2}{m\omega_c^2} \hbar \omega_c \left(n + \frac{1}{2}\right) |E_n\rangle$$

$$= \frac{(2n+1)\hbar}{m|e|B} mc |E_n\rangle \quad (r^2)_n = (2n+1) \frac{\hbar c}{|e|B} = (2n+1) l_B^2$$

o raio dos estados estacionários cresce com $\sqrt{n}$

Como vemos os níveis de Landau são infinitamente
degenerados. Para especificar os estados de forma única
precisamos de outro número quântico além de energia.