

Lista de Exercícios VIII

- ① Considere a colisão *completamente inelástica* entre dois corpos de massas m_1 e m_2 . Para tempos $t < 0$ os dois corpos estão em movimento em direções ortogonais, até chegar ao tempo $t = 0$ em que eles colidem. Descreva o movimento dos corpos para tempos $t > 0$, ou seja, depois da colisão.
- ② O universo é composto por cerca de 70% de energia escura (responsável pela expansão acelerada do universo) enquanto o restante 30% pode-se dividir entre um 5% de matéria ordinária (prótons, elétrons etc) e um 25% de *matéria escura*, matéria que interage gravitacionalmente mas que ou não interage eletromagneticamente ou interage muito fracamente. Existem experimentos na Terra (por exemplo, Xenon1T ou DarkSide) que procuram as colisões entre matéria escura e núcleos do detector. Considere a colisão *elástica* entre uma partícula de matéria escura e um núcleo:
- (a) Trabalhando no referencial inercial de repouso do núcleo (ou seja, onde o núcleo está parado), calcule a velocidade da partícula de matéria escura depois da colisão sabendo que a velocidade típica das partículas de matéria escura que chegam na Terra é da ordem de $v \simeq 10^{-3}c$, onde c é a velocidade da luz. Suponha inicialmente que a colisão aconteça em uma dimensão e que todas as partículas envolvidas (inclusive o núcleo) possam se movimentar livremente;
 - (b) Repita o cálculo do item (a) considerando agora uma colisão em três dimensões. É possível expressar a velocidade final da matéria escura apenas em termos de v e das massas da matéria escura e do núcleo?
 - (c) Calcule a energia cinética de recuo do núcleo em termos das quantidades relevantes;
 - (d) O que pode ser dito em relação à velocidade da matéria escura depois da colisão no caso $m_{DM} \ll m_{nucleo}$?
 - (e) Os experimentos acima mencionados conseguem detectar experimentalmente apenas energias de recuo do núcleo $E_{recuo} \gtrsim \text{keV}$. É verdade que matéria escura com massa qualquer pode dar origem a uma colisão detectável experimentalmente? Considere a colisão

como sendo unidimensional, a massa do núcleo da ordem de 100 GeV e tome o limite $m_{DM} \ll m_{nucleo}$ para simplificar o cálculo.

- ③ O pêndulo balístico é um dispositivo onde um bloco de massa M , preso por um haste de massa desprezível, pode girar livremente, sem atrito, em torno de um ponto fixo O . O dispositivo é usado para determinar a velocidade de impacto de projéteis, que vão parar dentro do bloco. Determine a velocidade de um projétil que colide com o bloco em função da altura na qual o bloco para depois da colisão.
- ④ Considere a colisão elástica de um corpo com uma parede em movimento. Qual a velocidade final do corpo no caso em que (i) a parede está em movimento na mesma direção e sentido do corpo, e (ii) a parede está em movimento na mesma direção mas sentido oposto ao corpo.
- ⑤ Suponha que uma pessoa de massa M pule de uma altura h sem movimento horizontal. Suponha também que, quando a pessoa colide com o chão, o centro de massa da pessoa se movimentar para baixo de uma distância s . Determine:
- (a) a força média durante a colisão, supondo que essa tem duração Δt ;
 - (b) supondo uniforme a força que o chão exerce na pessoa (e portanto a aceleração), escreva a força média em termos de s ;
 - (c) interprete os resultados achados de acordo com a seguinte pergunta: “durante uma queda, por quê é melhor se agachar o quanto mais possível para reduzir a força do impacto?”
 - (d) Suponha que seu professor (de massa $M \simeq 70$ kg) pule de uma altura de 1 m, tentando não quebrar o tornozelo. A força que o tornozelo consegue sustentar sem quebrar é da ordem de $4 \sim 8$ kN (dependendo da idade). Quanto vale a distância s que garante que o tornozelo não quebre?
- ⑥ Uma estrela em equilíbrio é uma estrela para a qual a pressão gravitacional (que tenderia a causar o colapso) é balanceada pela pressão gerada pelas reações nucleares que acontecem no seu interior. A situação de equilíbrio é sustentada enquanto há combustível nuclear. Quando a pressão das reações nucleares não é mais suficiente para sustentar a

pressão gravitacional, a estrela colapsa e, surpreendentemente, dá origem à explosão de uma supernova. Para entender a física envolvida, vamos modelar as partes externas da estrela como uma bola de massa M_1 , enquanto que o caroço interno será modelado como uma bola de massa $M_2 \gg M_1$. A situação é mostrada na Fig. 1. Vamos supor, por simplicidade, que a altura inicial seja h para as duas bolas (ignoramos os tamanhos), e que a velocidade inicial dos dois corpos seja nula. Calcule a altura final de M_1 supondo que, em primeira aproximação, todas as colisões sejam elásticas. Como você pode usar esse modelo simples para entender a explosão da supernova? (dica: qual o referencial melhor para descrever a colisão entre M_1 e M_2 que acontece depois que M_2 já colidiu com o chão?).

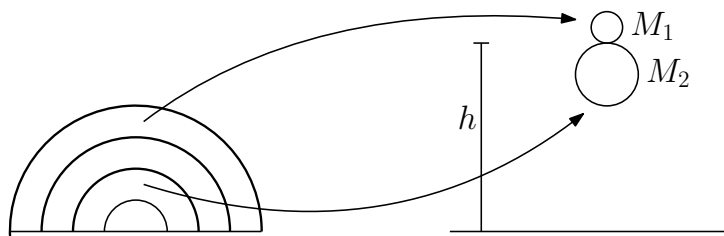


Figura 1: As partes da estrela do exercício ⑥ podem ser modeladas como duas bolas, de massas $M_1 \ll M_2$, em queda sob a ação da gravidade.

- ⑦ Considere a colisão *elástica* entre um corpo em movimento com velocidade \mathbf{v} e um corpo parado com a mesma massa. Mostre que é sempre verdade que, depois da colisão, o ângulo entre as velocidades dos dois corpos é 90° .
- ⑧ O fenômeno de *gravitational slingshot* (estilingue gravitacional) consiste em utilizar o movimento de um planeta de massa M para modificar – geralmente aumentando – a velocidade de uma sonda espacial de massa $m \ll M$ que está se movimentando na direção do planeta. Para simplificar, suponha que os movimentos da sonda e do planeta aconteçam no mesmo eixo.
- (a) Convença-se que, dado que estamos interessados nas velocidades da sonda antes e depois do encontro com o planeta, podemos

- descrever o processo como uma colisão, ignorando os detalhes da atração gravitacional entre os dois corpos;
- (b) Dado o item precedente, identifique qual entre os problemas desta lista descreve uma física parecida. Use-o como inspiração para calcular a velocidade final da sonda.
- ⑨ Vimos em aula que várias estrelas estão orbitando o centro da Via Lactea, um local conhecido como Sagitarius A^* . Uma delas, chamada de S2, tem uma órbita elíptica de grande excentricidade, cujo eixo semi-maior é $R = 970$ au, onde usamos *unidades astronômicas*, em que $1 \text{ au} = 1.5 \times 10^{11} \text{ m}$ é a distância média da Terra ao Sol. Observações dessa estrela ao longo de mais de uma década indicam que a órbita de S2 possui um período de aproximadamente 16 anos.
- (a) Apenas utilizando a 3ª Lei de Kepler, estime a massa do objeto em Sagitarius A^* em unidades da massa do Sol.
- (b) Agora faça um cálculo usando a Lei da Gravitação Universal de Newton. Você pode fazer aproximações com respeito ao movimento de S2. Compare o seu resultado com o resultado do item (a). As duas respostas conferem? Justique.
- ⑩ Considere um sistema planetário com uma estrela sendo orbitada por um único planeta
- (a) Tente demonstrar que, se o planeta executa uma órbita circular, então a estrela também deve seguir uma órbita circular
- (b) Mostre que nesse caso ambos de fato orbitam o centro de massa desse sistema, e que esse fato nem sequer depende da natureza da força gravitacional – basta que a força entre os dois objetos seja uma força *central*.