DEMONSTRAÇÃO DA FÓRMULA DE CÁLCULO DA ÁREA DE UMA SUPERFÍCIE ESFÉRICA

Adaptado de : http://www2.unemat.br/eugenio/arquivos/esfera.pdf

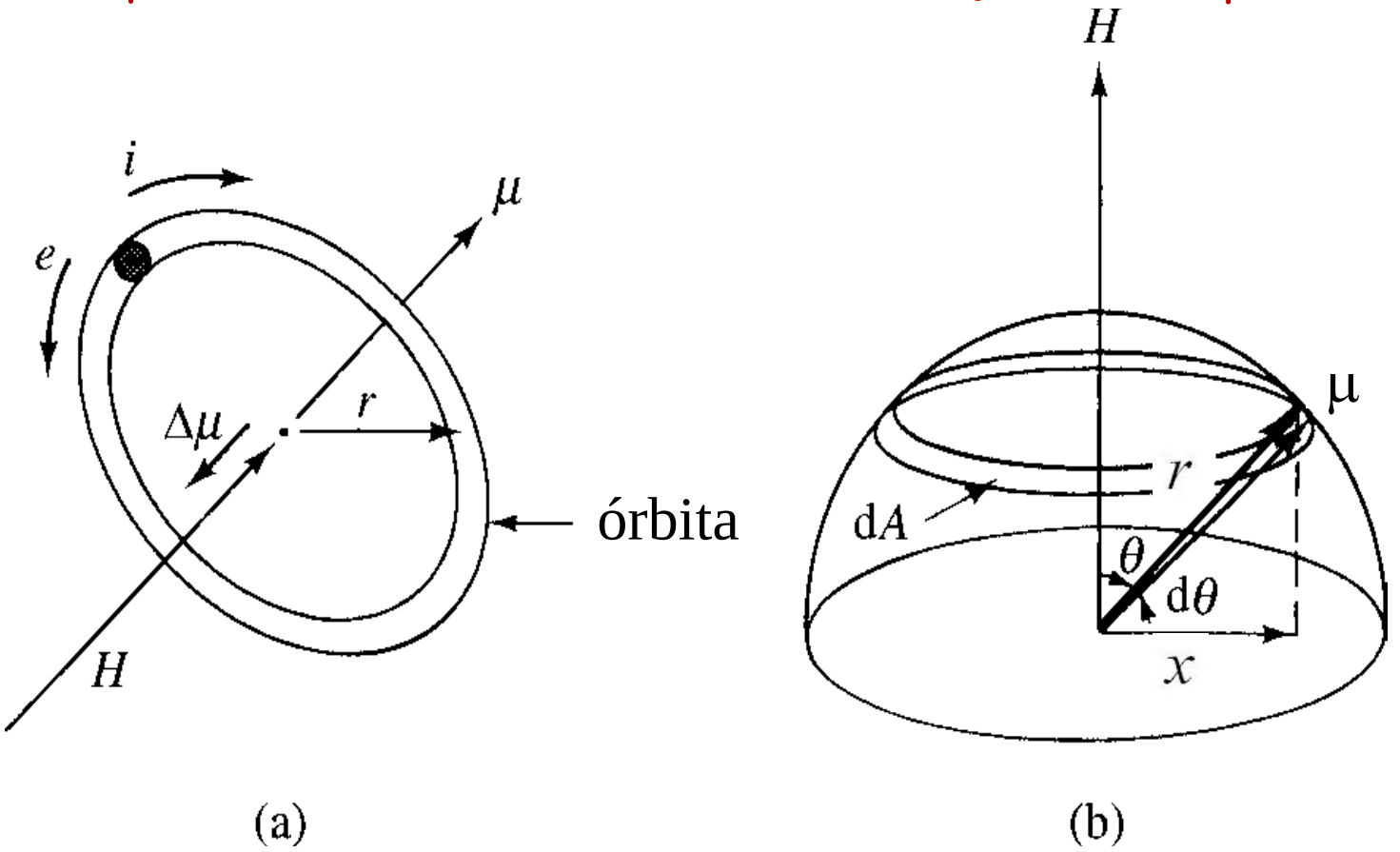
Elemento diferencial de Área (dA)

Descascando uma laranja em anéis (e não helicoidais), fora do equador, as bordas de cada anel serão circunferências com raios distintos, uma maior que a outra:

Figura1 – Laranja

Este cálculo é utilizado na definição do ângulo sólido para o qual o momento magnético μ pode estar para o ângulo θ variando de $0 \leq \theta \leq \pi$.

Para $\pi \leq \theta \leq 2\pi$, corresponderia ao caso do momento magnético estar se alinhando no sentido contrário ao campo, o que não corresponde a situação que estudamos, ou seja, ao aplicar um campo perpendicular à órbita, a tendência é que os momentos se alinhem na direção do campo.



A largura do anel pode ser descrita pela forma simplificada do comprimento de arco:

$dl = r \cdot d\theta$

onde dl a largura do anel, r é o raio da circunferência e $d\theta$ é a variação infinitesimal do ângulo central.

$x = r \cdot sen\theta$

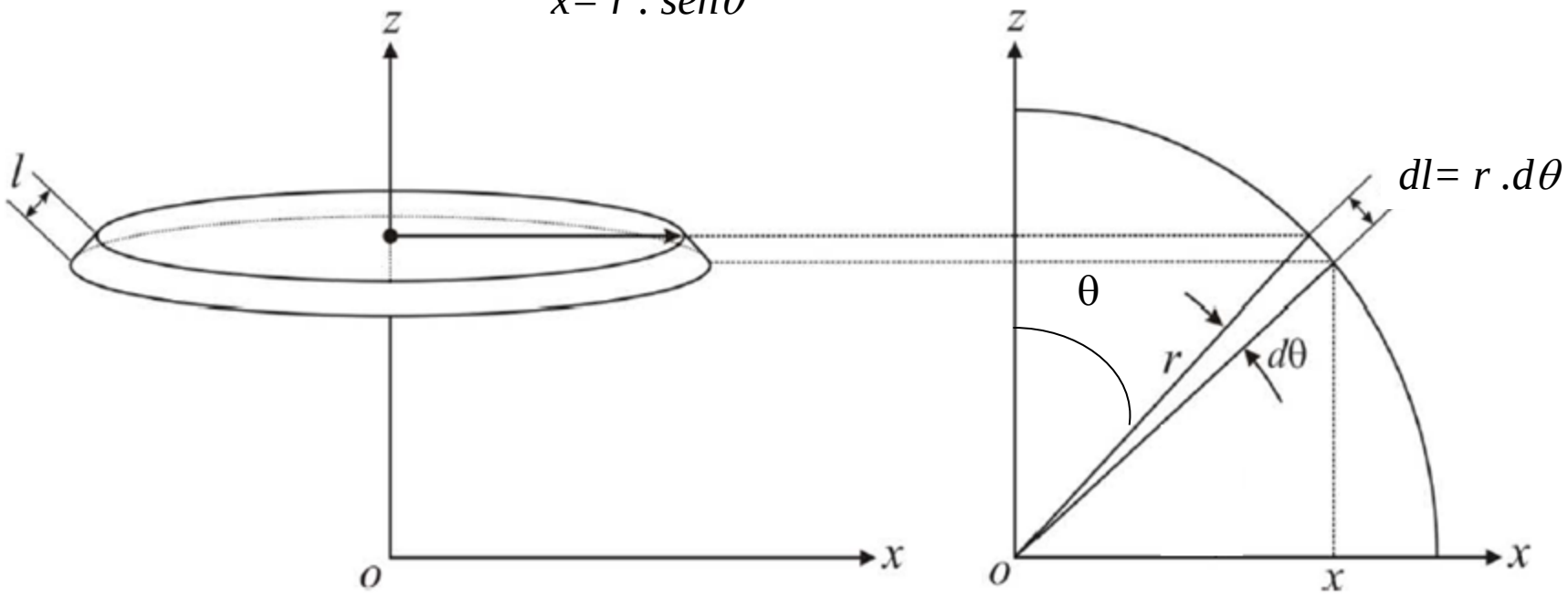


Figura 2 – Construção dos elementos diferenciais de área em coordenadas polares

Mas, se estes anéis tiverem larguras infinitesimais, os raios se confundem e o perímetro do anel de largura infinitesimal é dado por:

$$C(x) = 2\pi x \qquad (I)$$

Vejam que o perímetro C está em função do raio x.

Fazendo uma transformação para coordenadas polares, destacamos o triângulo retângulo da figura 2:

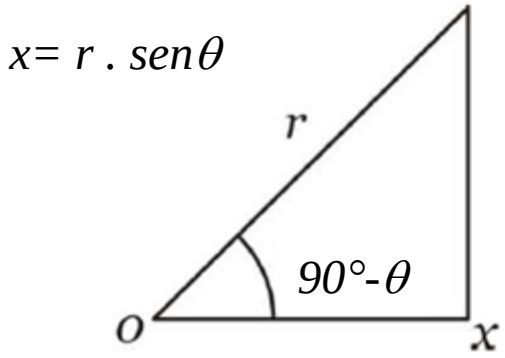


Figura 3 – Triângulo retângulo

Temos que:

$$x = r \,.\, sen\theta \qquad (II)$$

Substituindo o membro da direita da equação *(II)* em *(I)*, obtemos:

$$C(\theta) = 2\pi r \,.\, sen\theta$$

Ângulo Sólido

$$\Omega = \frac{A}{r^2}$$

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{dA}{r^2}$$

$$\mathrm{dA} = C(\theta) \times dl$$

$$C(\theta) = 2\pi r \,.\, sen\theta$$

$$dl = r d\theta$$

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{2\pi r \,\mathrm{sen}\,\theta \times r d\theta}{r^2}$$

$$\mathrm{d}\Omega = 2\pi \,\mathrm{sen}\,\theta d\theta$$