Lista de Exercícios de "aquecimento"

① Considere o plano euclidiano bidimensional coberto com coordenadas polares $\{(r, \varphi)\}$.

(a) Obtenha o elemento-de-linha e as componentes da métrica do plano euclidiano em coordenadas polares; (Lembre-se que $x = r\cos\varphi$ e $y = r\sin\varphi$, onde $\{(x, y)\}$ é um sistema cartesiano de coordenadas.)

(b) Calcule todos os símbolos de Christoffel associados ao sistema de coordenadas polar;

(c) Manipulando a equação da geodésica em coordenadas polares, obtenha explicitamente as funções F e G tais que $\ddot{r} = F$ e $\ddot{\varphi} = G$, onde "$\cdot$" representa derivação com relação ao parâmetro afim. (As funções F e G não podem depender explicitamente de $\ddot{r}$ nem de $\ddot{\varphi}$.) Se interpretarmos o parâmtro afim como sendo uma "variável temporal", você reconhece as expressões e interpretação de F e G?

② Considere o *elemento-de-linha* (i.e., intervalo invariante entre eventos infinitesimalmente próximos) dado por

$$ds^2 = -(1 - \omega^2 r^2)dt^2 + 2\omega r^2 dt d\theta + dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2,$$

onde ω é uma constante real e as coordenadas $\{(t, r, \theta, z)\}$ assumem valores $t \in \mathbb{R}$, $r > 0$, $0 \le \theta < 2\pi$, $z \in \mathbb{R}$.

(a) Explicite as componentes $g_{\mu\nu}$ da métrica nessas coordenadas;

(b) Considere um observador parado nesse sistema de coordenadas na posição $r = r_0$, $\theta = \theta_0$, $z = z_0$. Obtenha as componentes da 4-velocidade desse observador. Quais os valores possíveis de r_0?

(c) Qual a relação entre a coordenada t e o tempo físico τ desse observador?

(d) Calcule as componentes da 4-aceleração do observador do item (b) e calcule sua aceleração própria.

③ Assuma que o elemento-de-linha nas imediações de um corpo esférico e estático, de massa M, possa ser colocado, no regime de campo fraco, na forma[1]

$$ds^2 = -(1+A)dt^2 + (1+B)(dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

onde $A = A(x, y, z)$ e $B = B(x, y, z)$, com $|A| \ll 1$, $|B| \ll 1$. (Assuma, por simplicidade, que o centro de simetria do sistema localiza-se em $x = y = z = 0$.) Usando aproximações, manipulações e resultados usados/apresentados em aula, resolva as equações de Einstein para determinar as funções A e B.

④ Uma esfera com carga *elétrica* total Q uniformemente distribuída em seu volume, gira com velocidade angular $\vec{\Omega}$. O campo magnético gerado no plano equatorial, fora da esfera, vale (no *Sistema Internacional* de unidades)

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 Q R^2 \vec{\Omega}}{20\pi r^3}, \quad r > R,$$

onde R é o raio da esfera e r a distância até seu centro. Sabendo disso, pede-se:

(a) No regime de gravidade linearizada, qual o campo gravitomagnético $\vec{B}_g$ gerado no plano equatorial de um corpo esférico uniforme de massa M e raio R girando com velocidade angular $\vec{\Omega}$? (Atenção às constantes.)

(b) Seja $\vec{g}$ a "aceleração gravitacional" de uma partícula *livre* se movendo (não relativisticamente) nesse plano equatorial. Calcule a razão entre as componentes angular e radial dessa "aceleração" e *estime* esse valor (numérico) para velocidades típicas de queda num laboratório na superfície da Terra.

[1] Esse fato não é óbvio, mas pode ser demonstrado fazendo-se uso da *liberdade de gauge* da teoria.