BIOESTATÍSTICA I

GLEICE M S CONCEIÇÃO

MARIA DO ROSÁRIO D O LATORRE

FSP USP

BIOESTATÍSTICA

TESTES DE HIPÓTESES PARA COMPARAÇÃO DAS MÉDIAS DE DUAS POPULAÇÕES

GLEICE M S CONCEIÇÃO
FSP USP

Comparando dois grupos

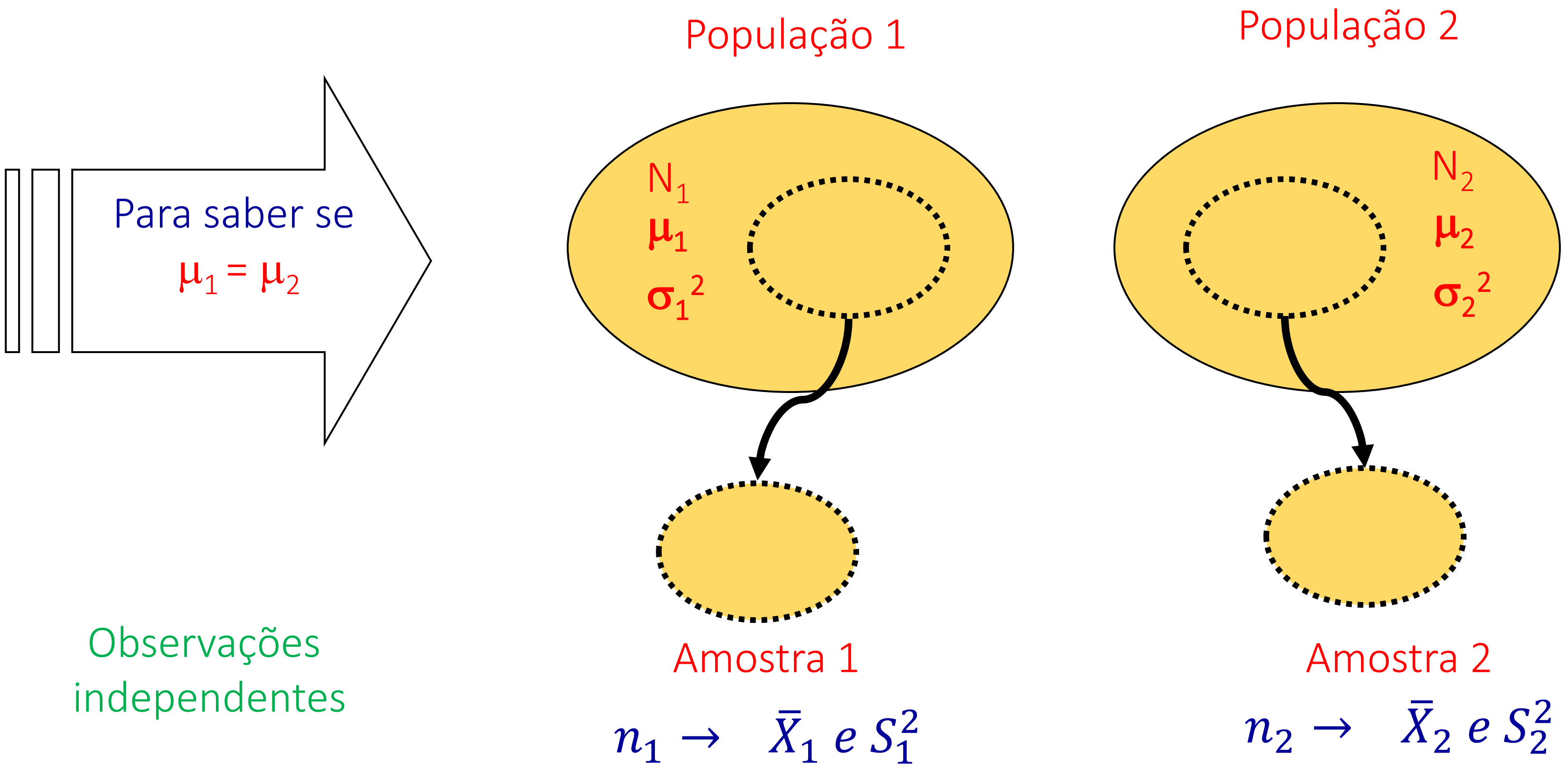
BIOESTATÍSTICA

- ✓ Comparar técnicas usuais com métodos alternativos
- ✓ Comparação de drogas, de métodos cirúrgicos, de dietas, de procedimentos de laboratório, de tratamentos, etc.
- ✓ Considera-se o melhor tratamento aquele que produz bons resultados para a grande maioria da população em estudo

Comparando dois grupos

X_1 : v.a. de interesse na população 1, com $E(X_1) = \mu_1$ e $Var(X_1) = \sigma_1^2$

X_2 : v.a. de interesse na população 2, com $E(X_2) = \mu_2$ e $Var(X_2) = \sigma_2^2$



Comparando dois grupos

BIOESTATÍSTICA

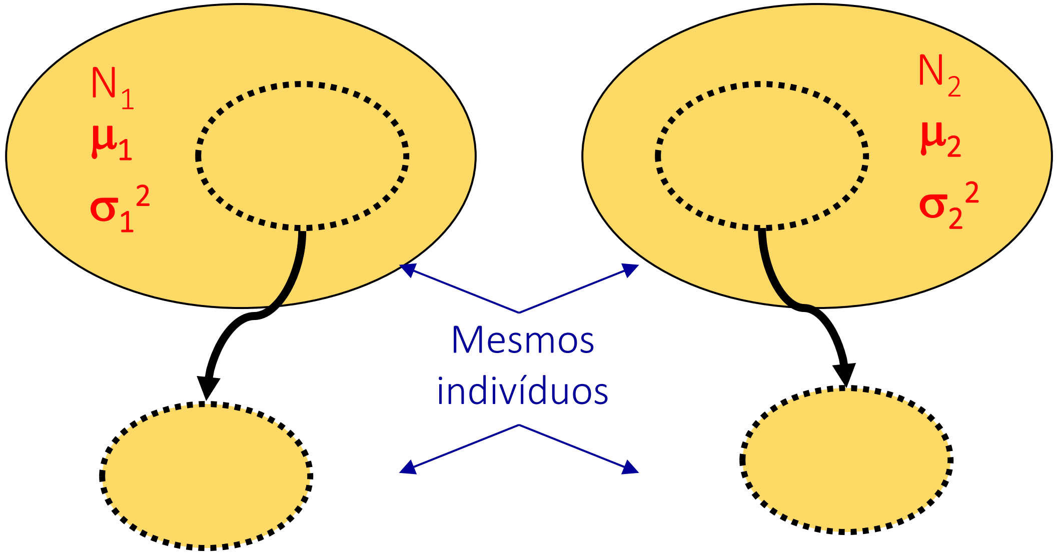
X_1 : v.a. de interesse na população, no instante 1, com $E(X_1) = \mu_1$ e $Var(X_1) = \sigma_1^2$

X_2 : v.a. de interesse na população, no instante 2, com $E(X_2) = \mu_2$ e $Var(X_2) = \sigma_2^2$

Para saber se $\mu_1 = \mu_2$

População no instante 1

População no instante 2



Observações dependentes

Amostra no instante 1

$n \rightarrow \quad \bar{X}_1 \; e \; S_1^2$

Amostra no instante 2

$n \rightarrow \quad \bar{X}_2 \; e \; S_2^2$

BIOESTATÍSTICA

Teste de hipóteses para comparação das médias de duas populações com observações dependentes

GLEICE M S CONCEIÇÃO
FSP USP

Exemplo

Foi conduzido um experimento para estudar o conteúdo de hemoglobina no sangue de suínos com deficiência de niacina. Foram mensurados os níveis de hemoglobina antes e depois da aplicação de 20 g de niacina em oito suínos. Os resultados obtidos foram:

Suíno	Antes (X_1)	Depois (X_2)
1	13,6	11,4
2	13,6	12,5
3	14,7	14,6
4	12,1	13,0
5	12,3	11,7
6	13,2	10,3
7	11,0	9,8
8	12,4	10,4

III. Teste t-pareado

observações dependentes

BIOESTATÍSTICA

1. Definir a(s) variável(eis) de interesse e o(s) parâmetro(s) que a(s) caracteriza(m).

X_1 – conteúdo de hemoglobina no sangue antes da aplicação,

com $E(X) = \mu_1$ e $Var(X) = \sigma_1^2$

X_2 – conteúdo de hemoglobina no sangue depois da aplicação,

com $E(X) = \mu_2$ e $Var(X) = \sigma_2^2$

D – Diferença entre os conteúdos de hemoglobina antes

e depois da aplicação (D= X_1 - X_2), com $E(D) = \mu_D$ e $Var(D) = \sigma_D^2$

III. Teste t-pareado

observações dependentes

BIOESTATÍSTICA

Suíno	Antes (X_1)	Depois (X_2)	$D = X_1 - X_2$
1	13,6	11,4	
2	13,6	12,5	
3	14,7	14,6	
4	12,1	13,0	
5	12,3	11,7	
6	13,2	10,3	
7	11,0	9,8	
8	12,4	10,4	

D – Diferença entre os conteúdos de hemoglobina antes e depois da aplicação,

$D = X_1 - X_2$, com

$E(D) = \mu_D$ e $Var(D) = \sigma_D^2$

III. Teste t-pareado

observações dependentes

Suíno	Antes (X_1)	Depois (X_2)	$D = X_1 - X_2$
1	13,6	11,4	2,2
2	13,6	12,5	1,1
3	14,7	14,6	0,1
4	12,1	13,0	-0,9
5	12,3	11,7	0,6
6	13,2	10,3	2,9
7	11,0	9,8	1,2
8	12,4	10,4	2,0

D – Diferença entre os conteúdos de hemoglobina antes e depois da aplicação,

$D = X_1 - X_2$, com

$E(D) = \mu_D$ e $Var(D) = \sigma_D^2$

III. Teste t-pareado

observações dependentes

Suíno	$D = X_1 - X_2$
1	2,2
2	1,1
3	0,1
4	-0,9
5	0,6
6	2,9
7	1,2
8	2,0

D – Diferença entre os conteúdos de hemoglobina antes e depois da aplicação,

$D = X_1 - X_2$, com

$E(D) = \mu_D$ e $Var(D) = \sigma_D^2$

$$\bar{D} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} = 1{,}150$$

$$S_D = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i - \bar{D})^2}{n-1}} = 1{,}225$$

III. Teste t-pareado

$\left(\begin{array}{l}\text{observações}\\ \text{dependentes}\end{array}\right)$

BIOESTATÍSTICA

2. Estabelecer as hipóteses nula e alternativa e interpretá-las.

$$\begin{array}{l}H_0\colon \mu_1 = \mu_2\\ H_a\colon \mu_1 \neq \mu_2\end{array} \Rightarrow \begin{array}{l}H_0\colon \mu_1 - \mu_2 = 0\\ H_a\colon \mu_1 - \mu_2 \neq 0\end{array} \Rightarrow \begin{array}{l}H_0\colon \mu_D = 0\\ H_a\colon \mu_D \neq 0\end{array}$$

onde $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$

✓ Agora temos apenas uma variável (D), reduzindo o problema à análise de uma única população (a população das diferenças). Trata-se então de um teste para uma média. Já sabemos fazer isto!

III. Teste t-pareado

(observações dependentes)

2. Estabelecer as hipóteses nula e alternativa e interpretá-las.

$H_0: \mu_D = 0$ O conteúdo médio de hemoglobina é o mesmo antes e depois da aplicação

$H_a: \mu_D \neq 0$ O conteúdo médio de hemoglobina não é o mesmo antes e depois da aplicação

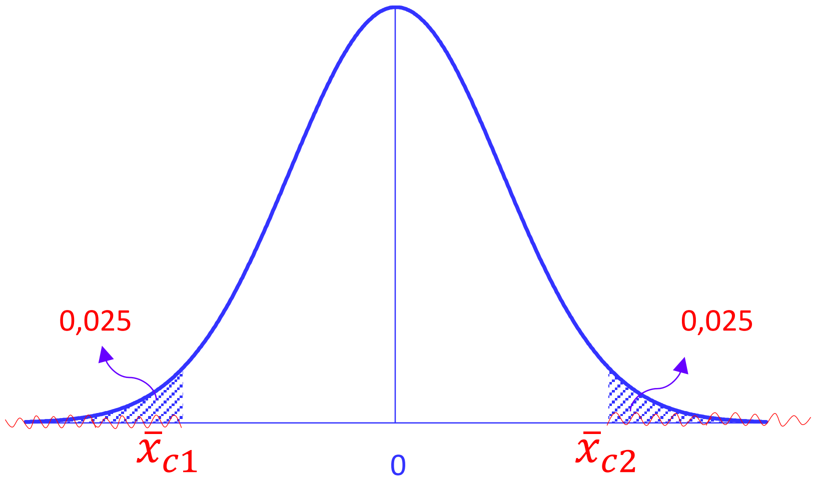
III. Teste t-pareado

(observações dependentes)

3. Definir a forma da região crítica, com base na hipótese alternativa

Sob H_0

$\bar{D} \sim N(0, \frac{S_D}{\sqrt{n}})$



RC=$\{\bar{X} \in \mathcal{R} \mid \bar{X} \leq \bar{x}_{c1}$ ou $\bar{X} \geq \bar{x}_{c2}\}$

III. Teste t-pareado

$\begin{pmatrix} \text{observações} \\ \text{dependentes} \end{pmatrix}$

4. Identificar o parâmetro, o seu estimador e a distribuição do estimador; definir a estatística do teste (que deve conter parâmetro e estimador e ter uma distribuição conhecida) e sua distribuição. Especificar as suposições assumidas.

Parâmetro: μ_D

Estimador e distribuição do estimador: $\bar{D} \sim N\left(\mu_D, \frac{\sigma_D^2}{n}\right)$

Estatística do teste e sua distribuição: $T = \frac{\bar{D} - \mu_D}{S_D / \sqrt{n}} \sim t_{n-1}$

Suposições assumidas: $X_1 \; e \; X_2 \sim N$

III. Teste t-pareado

(observações dependentes)

Sob H_0

5. α=0,05 e α=0,01

6. ii) Obter a região crítica com base no valor de t_c

Da tabela da t_7:

Para α=0,05 ⇒ RC={t ∈ $\mathcal{R}$ $|t \leq -2{,}365$ ou $t \geq 2{,}365$}

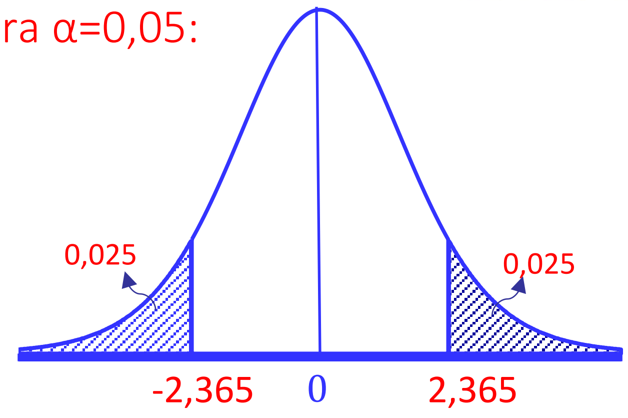
Para α=0,01 ⇒ RC={t ∈ $\mathcal{R}$ $|t \leq -3{,}499$ ou $t \geq 3{,}499$}

Sob H_0, o valor de t observado é:

$$t_{obs} = \frac{\bar{D}_{obs} - \mu}{S_D/\sqrt{n}} = \frac{1{,}15-0}{1{,}225/\sqrt{8}} = 2{,}65581$$

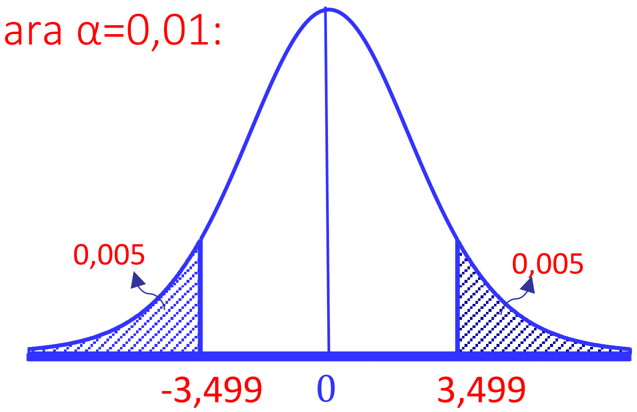
t_7

Para α=0,05:



t_7

Para α=0,01:



BIOESTATÍSTICA

GLEICE M S CONCEIÇÃO
FSP - USP

III. Teste t-pareado

$\left(\begin{array}{l}\text{observações}\\ \text{dependentes}\end{array}\right)$

BIOESTATÍSTICA

7. ii) Tomar a decisão, comparando o valor de t_{obs} com a região crítica

Para α=0,05 ⇒ RC={t ∈ $\mathcal{R}$ $|t \leq -2{,}365\ ou\ t \geq 2{,}365\}$

Como $t_{obs} = 2{,}65581$, $t_{obs} \in RC$, então rejeito H_0 e decido que houve redução do **conteúdo médio de hemoglobina depois da aplicação,** isto é, $\mu_1 > \mu_2$

Para α=0,01 ⇒ RC={t ∈ $\mathcal{R}$ $|t \leq -3{,}499\ ou\ t \geq 3{,}499\}$

Como $t_{obs} = 2{,}65581$, $t_{obs} \notin RC$, então não rejeito H_0 e decido que **o conteúdo médio de hemoglobina é o mesmo antes e depois da aplicação,** isto é, $\mu_1 = \mu_2$

III. Teste t-pareado

observações dependentes

Sob H_0

$\bar{D} \sim N\left(0, \frac{\sigma_D^2}{n}\right)$

5. α=0,05 e α=0,01

6. iii) Obter o nível descritivo (p-valor)

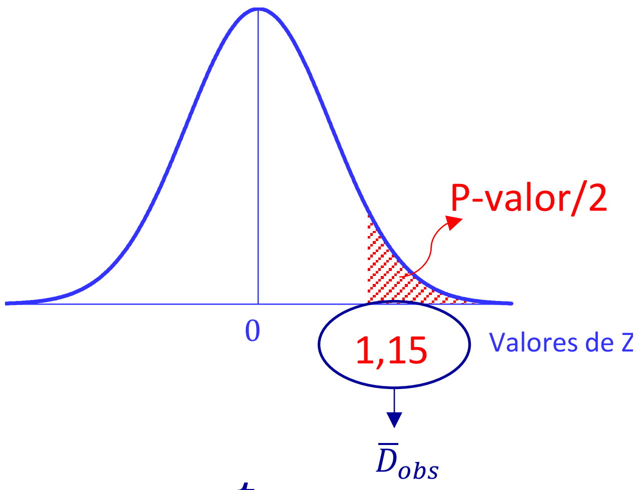
$$p - valor = 2P(\bar{D} \geq \bar{D}_{obs} | H_0 \text{ é } verdadeira) =$$

$$= 2P(\bar{D} \geq 1{,}15 \,|\mu_D = 0)$$

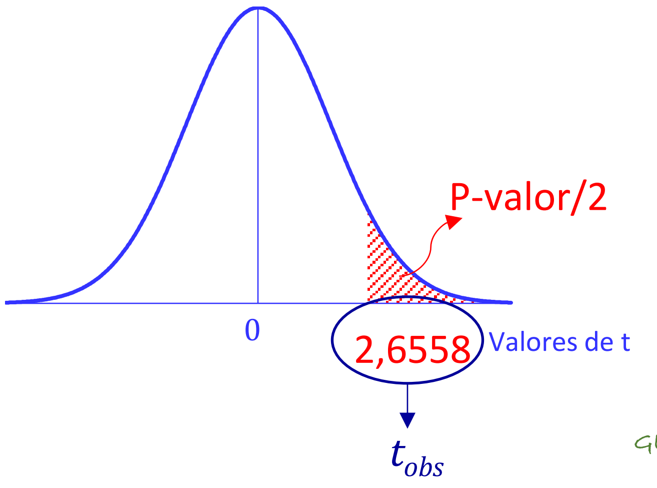
$$= 2P\left(\frac{\bar{D} - 0}{1{,}225 / \sqrt{8}} \geq \frac{1{,}15 - 0}{1{,}225 / \sqrt{8}}\right)$$

$$= 2P(t_7 \geq 2{,}65581) \rightarrow t_{obs}$$

$$\cong 0{,}035$$



t_7



III. Teste t-pareado

(observações dependentes)

7. iii) Tomar a decisão, comparando o p-valor com o valor de α

$$p - valor \cong 0{,}035$$

Para $\alpha = 0{,}05$

Como $p - valor < \alpha$, rejeito H_0 e decido que a niacina causa uma redução nos níveis médios de hemoglobina

Para $\alpha = 0{,}01$

Como $p{-}valor > \alpha$, não rejeito H_0 e decido que a niacina não causa alterações nos níveis médios de hemoglobina

III. Teste t-pareado

observações dependentes

O que significa o p-valor, neste caso?

$$p - valor \cong 0{,}035$$

Se a niacina não causa alterações nos níveis médios de hemoglobina, a probabilidade de que a diferença entre os níveis médios de hemoglobina antes de depois da aplicação da niacina seja tão grande ou maior que a observada é menor do que 5%, entretanto, é maior do que 1%.

III. Teste t-pareado

observações dependentes

BIOESTATÍSTICA

Em resumo:

- ✓ Teste de hipóteses para comparação das médias de duas populações com observações pareadas (medidas duas vezes na mesma unidade experimental).
- ✓ **Estratégia:** Definir a variável D, obtendo uma amostra resultante das diferenças entre os valores de cada par, reduzindo o problema à análise de uma única população (teste para uma média).

III. Teste t-pareado

observações dependentes

BIOESTATÍSTICA

Suíno	~~Antes (X_1)~~	~~Depois (X_2)~~	$D = X_1 - X_2$
1	13,6	11,4	2,2
2	13,6	12,5	1,1
3	14,7	14,6	0,1
4	12,1	13,0	-0,9
5	12,3	11,7	0,6
6	13,2	10,3	2,9
7	11,0	9,8	1,2
8	12,4	10,4	2,0
Média	12,9	11,7	**1,150**
DP	~~1,1~~	~~1,6~~	**1,225**

D – Diferença entre os conteúdos de hemoglobina antes e depois da aplicação,

$D = X_1 - X_2$, com

$E(D) = \mu_D$ e $Var(D) = \sigma_D^2$

Note que:

$\bar{D} = \bar{X}_1 - \bar{X}_2$, ou seja, $\bar{D}$ pode ser obtido por meio de $\bar{X}_1 e\ \bar{X}_2$,

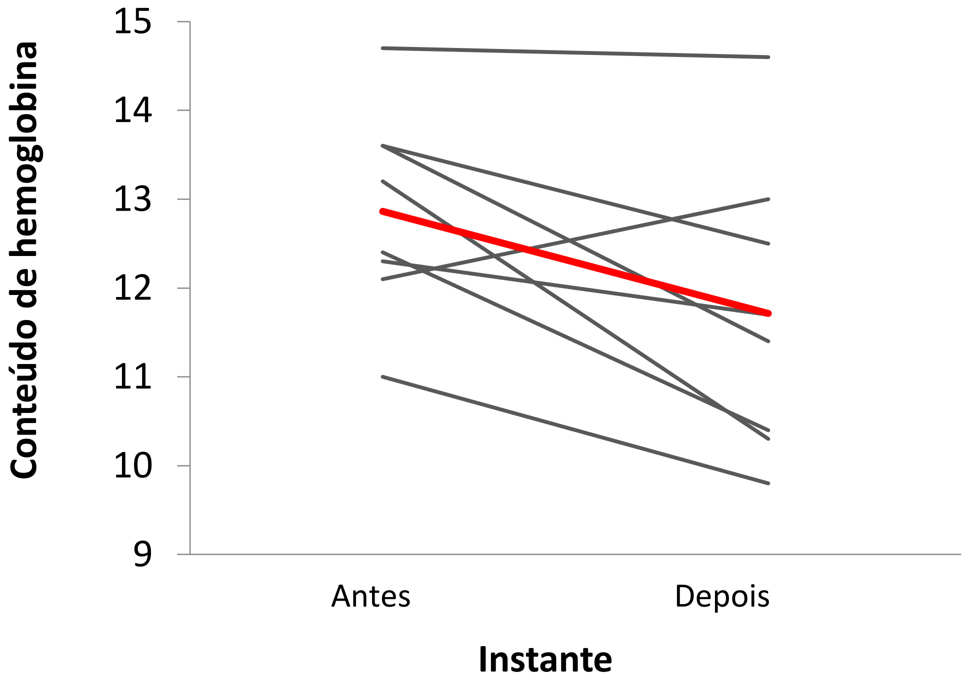
Mas $S_D \neq S_1 - S_2$, ou seja, S_D não pode ser obtido por meio de S_1 e S_2

III. Teste t-pareado

observações dependentes

Análise descritiva

Perfis individuais e perfil médio para o conteúdo de hemoglobina em 8 suínos.



III. Teste t-pareado

observações dependentes

BIOESTATÍSTICA

Análise descritiva

Suíno	$D = X_1 - X_2$
1	2,2
2	1,1
3	0,1
4	-0,9
5	0,6
6	2,9
7	1,2
8	2,0
$\bar{D}$	1,150
S_D	1,225

D – Diferença entre os conteúdos de hemoglobina antes e depois da aplicação,

$D = X_1 - X_2$, com

$E(D) = \mu_D$ e $Var(D) = \sigma_D^2$

$$IC(\mu_D, ; 0{,}95 = [0{,}126 : 2{,}174]$$

Conclusões iniciais:

É possível que a aplicação de niacina cause uma diminuição nos níveis de hemoglobina porque o IC não inclui o valor zero e é positivo .

Exercício 1

BIOESTATÍSTICA

Realizou-se um estudo para verificar a efetividade de uma dieta combinada com um programa de exercícios físicos na redução do nível de colesterol. A Tabela mostra os níveis de colesterol dos 12 participantes no início e no final do programa

Participante	Início	Final
1	201	200
2	231	236
3	221	216
4	260	233
5	228	224
6	237	216
7	326	296
8	235	195
9	240	207
10	267	247
11	284	210
12	201	209

Exercício 1

1. Definir a(s) variável(eis) de interesse e o(s) parâmetro(s) que a(s) caracteriza(m).

X_1 – nível de colesterol no início do programa,

com $E(X) = \mu_1$ e $Var(X) = \sigma_1^2$

X_2 – nível de colesterol no final do programa,

com $E(X) = \mu_2$ e $Var(X) = \sigma_2^2$

D – Diferença entre os níveis de colesterol no início e no final do programa

D= $X_1 - X_2$, com $E(D) = \mu_D$ e $Var(D) = \sigma_D^2$

Exercício 1

BIOESTATÍSTICA

2. Estabelecer as hipóteses nula e alternativa e interpretá-las.

$$H_0:\ \mu_1 = \mu_2 \quad \Rightarrow \quad H_0:\ \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad H_0:\ \mu_D = 0$$

$$H_a: \mu_1 > \mu_2 \qquad\quad H_a: \mu_1 - \mu_2 > 0 \qquad\quad H_a: \mu_D > 0$$

onde $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$

$H_0:\ \mu_D = 0$ Os níveis médios de colesterol são os mesmos no início e no final do programa.

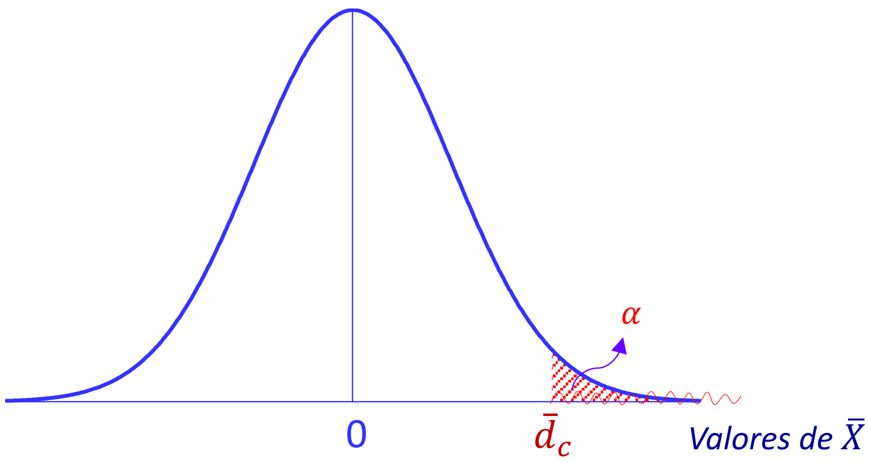
$H_a: \mu_D > 0$ Há uma redução nos níveis médios de colesterol ao final do programa.

Exercício 1

3. Definir a forma da região crítica, com base na hipótese alternativa

Sob H_0

$\bar{D} \sim N(0, \frac{S_D}{\sqrt{n}})$



RC=$\{\bar{X} \in \mathcal{R} \mid \bar{D} \geq \bar{d}_c\}$

Exercício 1

4. Identificar o parâmetro, o seu estimador e a distribuição do estimador; definir a estatística do teste (que deve conter parâmetro e estimador e ter uma distribuição conhecida) e sua distribuição. Especificar as suposições assumidas.

Parâmetro: μ_D

Estimador e distribuição do estimador: $\bar{D} \sim N\left(\mu_D, \frac{\sigma_D^2}{n}\right)$

Estatística do teste e sua distribuição: $T = \frac{\bar{D} - \mu_D}{S_D / \sqrt{n}} \sim t_{n-1}$

Suposições assumidas: $X_1 \ e \ X_2 \sim N$

III. Teste t-pareado

(observações dependentes)

5. α=0,05 e α=0,01

6. ii) Obter a região crítica com base no valor de t_c

Da tabela da t_{11}:

Para α=0,05 $\Rightarrow$ RC={t $\in \mathcal{R}$ | $t \geq$1,796}

Para α=0,01 $\Rightarrow$ RC={t $\in \mathcal{R}$ | $t \geq$2,817}

Da amostra:

$$\bar{D}_{obs} = 20{,}167 \text{ e } S_D = 23{,}131$$

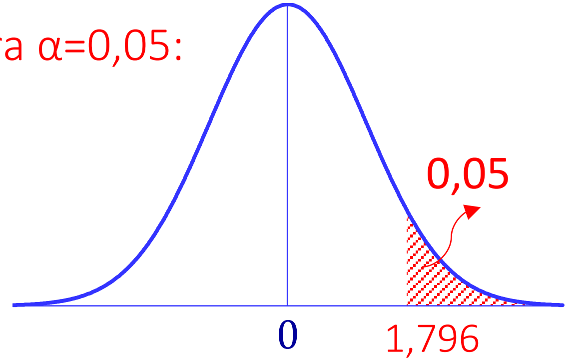
Sob H_0, o valor de t observado é:

$$t_{obs} = \frac{\bar{D}_{obs} - \mu}{S_D/\sqrt{n}} = \frac{20{,}167 - 0}{23{,}131/\sqrt{12}} = 3{,}02011$$

Sob H_0

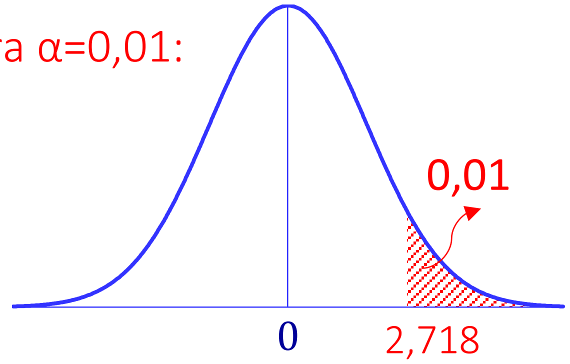
t_{11}

Para α=0,05:



t_{11}

Para α=0,01:



BIOESTATÍSTICA

GLEICE M S CONCEIÇÃO
FSP - USP

III. Teste t-pareado

(observações dependentes)

BIOESTATÍSTICA

7. ii) Tomar a decisão, comparando o valor de t_{obs} com a região crítica

Para α=0,05 $\Rightarrow$ RC={t $\in \mathcal{R}$ $|t \leq -2{,}365$ ou $t \geq 2{,}365$}

Como $t_{obs} = 2{,}65581$, $t_{obs} \in RC$, então rejeito H_0 e decido que houve redução do conteúdo médio de hemoglobina depois da aplicação, isto é, $\mu_1 > \mu_2$

Para α=0,01 $\Rightarrow$ RC={t $\in \mathcal{R}$ $|t \leq -3{,}499$ ou $t \geq 3{,}499$}

Como $t_{obs} = 2{,}65581$, $t_{obs} \notin RC$, então não rejeito H_0 e decido que o conteúdo médio de hemoglobina é o mesmo antes e depois da aplicação, isto é, $\mu_1 = \mu_2$

Exercício 1

5. α=0,05 e α=0,01

6. iii) Obter o nível descritivo (p-valor)

Da amostra:

$$\overline{D}_{obs} = 20{,}167 \text{ e } S_D = 23{,}131$$

Participante	Início	Final	Diferença
1	201	200	1
2	231	236	-5
3	221	216	5
4	260	233	27
5	228	224	4
6	237	216	21
7	326	296	30
8	235	195	40
9	240	207	33
10	267	247	20
11	284	210	74
12	201	209	-8

BIOESTATÍSTICA

GLEICE M S CONCEIÇÃO
FSP - USP

Exercício 1

6. iii) Obter o nível descritivo (p-valor)

$$p - valor = P(\bar{D} \geq \bar{D}_{obs} | H_0 \text{ é } verdadeira) =$$

$$= P(\bar{D} \geq 20{,}167 \; | \mu_D = 0)$$

$$= P\left(\frac{\bar{D} - 0}{23{,}131 / \sqrt{12}} \geq \frac{20{,}167 - 0}{23{,}131 / \sqrt{12}}\right)$$

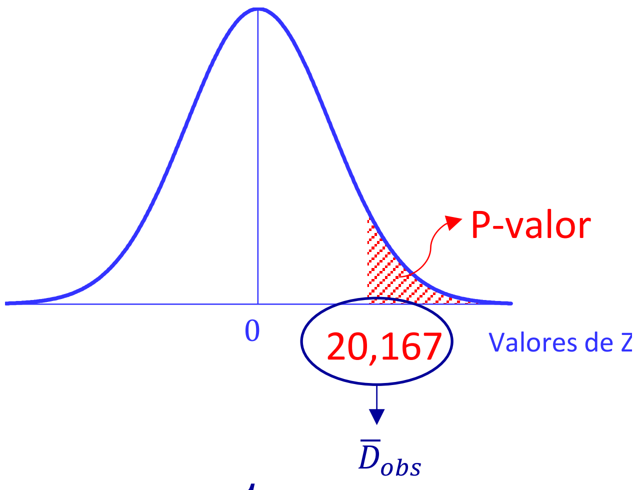
$$= P(t_{11} \geq 3{,}02011)$$

t_{obs}

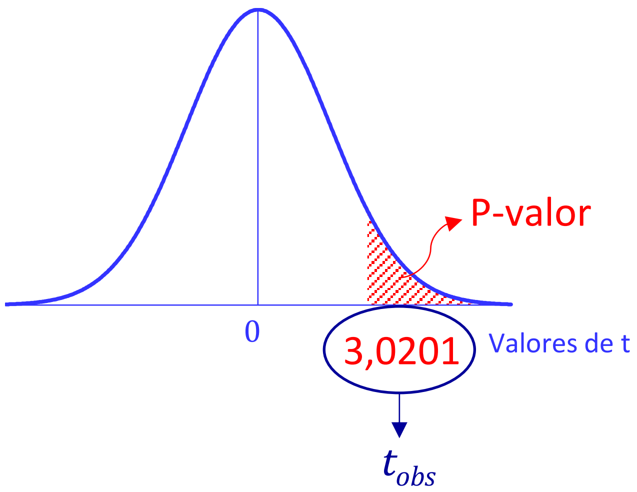
$$\cong 0{,}0075$$

Sob H_0

$$\bar{D} \sim N\left(0, \frac{\sigma_D^2}{n}\right)$$



t_{11}



GLEICE M S CONCEIÇÃO
FSP - USP

Exercício 1

7. iii) Tomar a decisão, comparando o p-valor com o valor de α

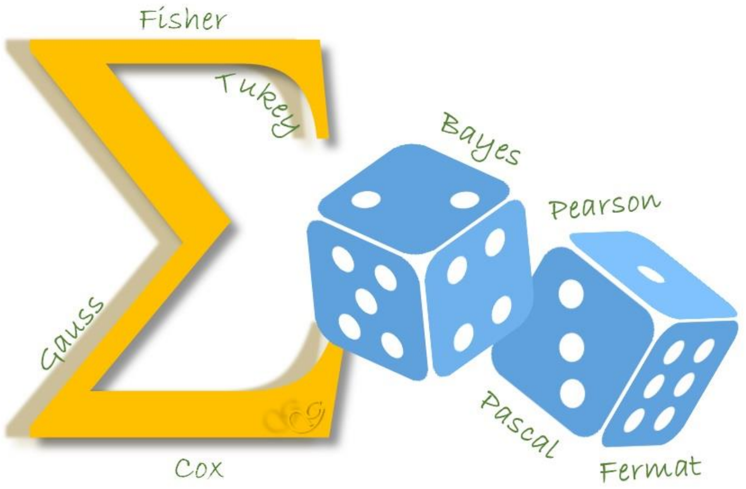
$$p - valor \cong 0{,}0075$$

Para $\alpha = 0{,}05$

Como $p - valor < \alpha$, rejeito H_0 e decido que houve uma redução nos níveis médios de colesterol ao final do programa.

Para $\alpha = 0{,}01$

Mesma decisão



BIOESTATÍSTICA

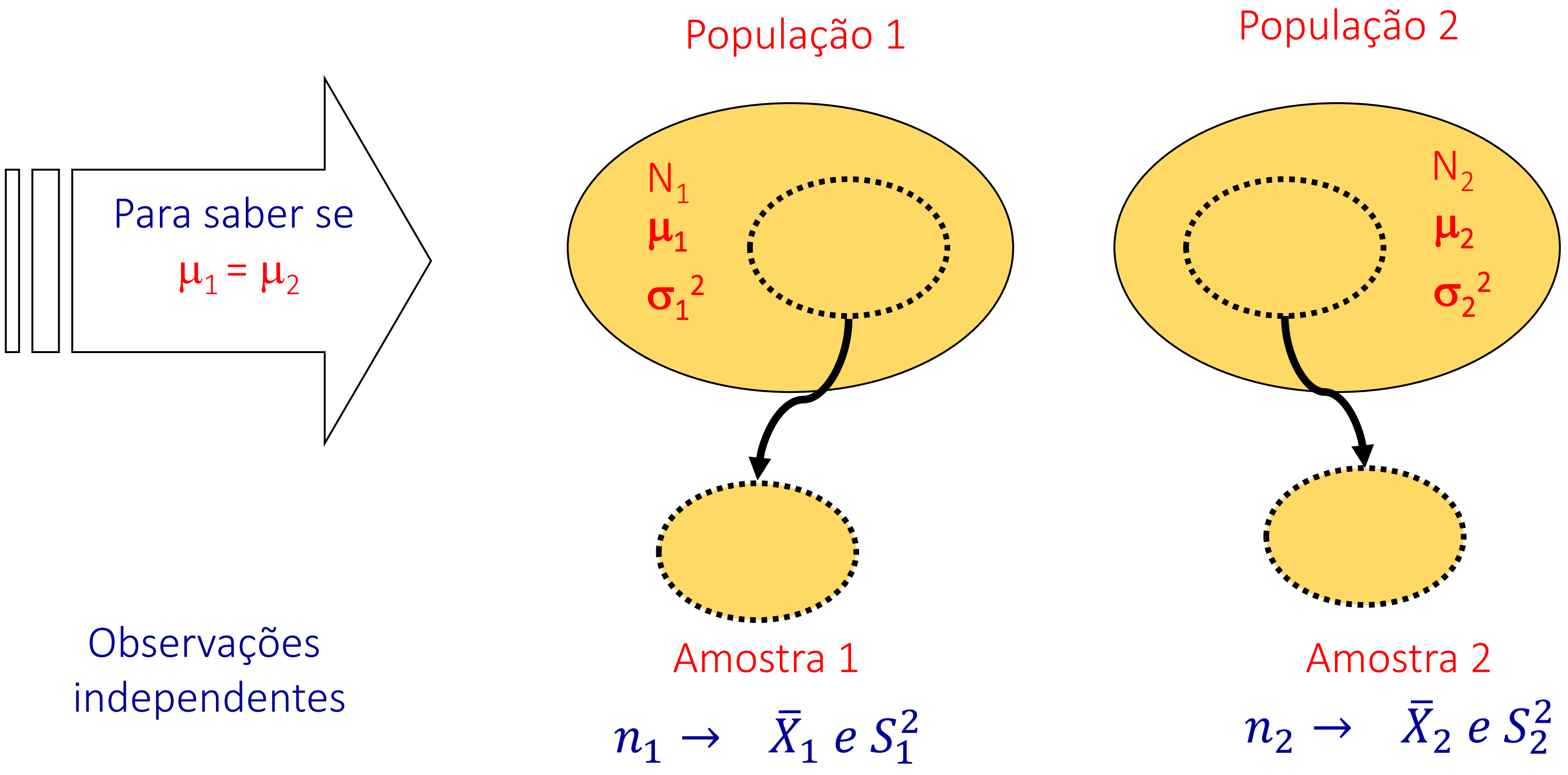
Teste de hipóteses para comparação das médias de duas populações com observações independentes

GLEICE M S CONCEIÇÃO
FSP USP

Comparando dois grupos

X_1 : v.a. de interesse na população 1, com $E(X_1) = \mu_1$ e $Var(X_1) = \sigma_1^2$

X_2 : v.a. de interesse na população 2, com $E(X_2) = \mu_2$ e $Var(X_2) = \sigma_2^2$



Testes t-Student para a comparação das médias de duas populações

(observações independentes)

BIOESTATÍSTICA

1. Definir a(s) variável(eis) de interesse e o(s) parâmetro(s) que a(s) caracteriza(m).

X_1 : v.a. de interesse na população 1, com $E(X_1) = \mu_1$ e $Var(X_1) = \sigma_1^2$

X_2 : v.a. de interesse na população 2, com $E(X_2) = \mu_2$ e $Var(X_2) = \sigma_2^2$

2. Estabelecer as hipóteses nula e alternativa e interpretá-las.

$$\begin{array}{l} H_0\colon \mu_1 = \mu_2 \\ H_a\colon \mu_1 \begin{array}{c} > \\ < \\ \neq \end{array} \mu_2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} H_0\colon \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_a\colon \mu_1 - \mu_2 \begin{array}{c} > \\ < \\ \neq \end{array} 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} H_0\colon \mu_D = 0 \\ H_a\colon \mu_D \begin{array}{c} > \\ < \\ \neq \end{array} 0 \end{array}$$

onde $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$

Testes t-Student para a comparação das médias de duas populações

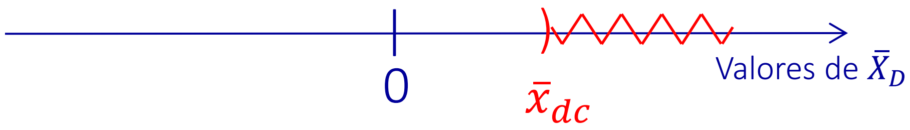
(observações independentes)

3. Definir a forma da região crítica, com base na hipótese alternativa

Parâmetro: $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$

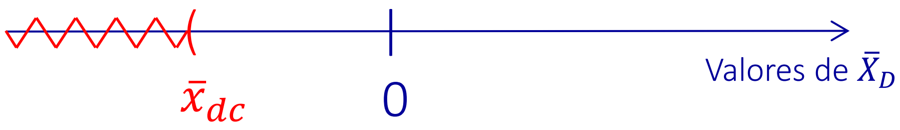
Estimador: $\bar{X}_D = \bar{X}_1 - \bar{X}_2$

✓ $H_a\!: \mu_1 > \mu_2$



$RC = \{\bar{X}_D \in R \mid \bar{X}_D \geq \bar{x}_{dc}\}$

✓ $H_a\!: \mu_1 < \mu_2$



$RC = \{\bar{X}_D \in R \mid \bar{X}_D \leq \bar{x}_{dc}\}$

✓ $H_a\!: \mu_1 \neq \mu_2$

$RC = \{\bar{X}_D \in R \mid \bar{X}_D \leq \bar{x}_{dc1} \; ou \; \bar{X}_D \geq \bar{x}_{dc2}\}$

Testes t-Student para a comparação das médias de duas populações

observações independentes

BIOESTATÍSTICA

Antes de definir a estatística do testes, alguns resultados ...

Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias. Então:

- ✓ $E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$
- ✓ $E(X_1 - X_2) = E(X_1) - E(X_2)$

Além disso, se X_1 e X_2 forem **independentes**:

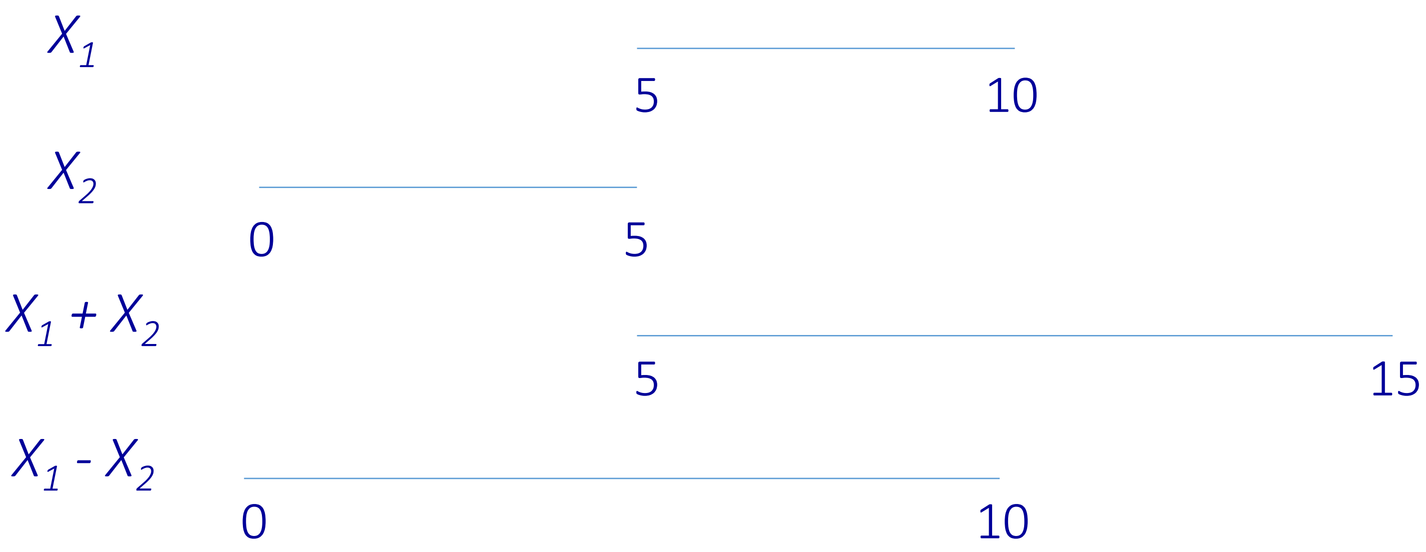
- ✓ $VAR(X_1 + X_2) = VAR(X_1) + VAR(X_2)$
- ✓ $VAR(X_1 - X_2) = VAR(X_1) + VAR(X_2)$

Testes t-Student para a comparação das médias de duas populações

(observações independentes)

BIOESTATÍSTICA

Vamos pensar em amplitudes!



Testes t-Student para a comparação das médias de duas populações

observações independentes

BIOESTATÍSTICA

4. Identificar o parâmetro, o seu estimador e a distribuição do estimador; definir a estatística do teste e sua distribuição; especificar as suposições assumidas.

Parâmetro: $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$

Estimador e distribuição do estimador: $\bar{X}_D = \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N(\quad ? \quad , \quad ? \quad)$

Estatística do teste e sua distribuição:

Testes t-Student para a comparação das médias de duas populações

(observações independentes)

BIOESTATÍSTICA

4. Identificar o parâmetro, o seu estimador e a distribuição do estimador; definir a estatística do teste e sua distribuição; especificar as suposições assumidas.

Parâmetro: $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$

Estimador e distribuição do estimador: $\bar{X}_D = \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2\,, \dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$

Estatística do teste e sua distribuição:

✓ Se as variâncias populacionais (σ_1^2 e σ_2^2) fossem conhecidas (pouco provável!!):

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{\bar{X}_D - \mu_D}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

Testes t-Student para a comparação das médias de duas populações

observações independentes

BIOESTATÍSTICA

4...

Estatística do teste e sua distribuição:

✓ Se as variâncias populacionais (σ_1^2 e σ_2^2) forem desconhecidas, precisamos substituí-las por seus estimadores (S_1^2 e S_2^2) na expressão abaixo, chegando a uma distribuição t-Student.

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{\bar{X}_D - \mu_D}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

Mas temos que considerar duas situações possíveis para as variâncias populacionais:

a) as variâncias populacionais são diferentes, isto é, $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

b) as variâncias populacionais são iguais, isto é, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

GLEICE M S CONCEIÇÃO
FSP - USP

Testes t-Student para a comparação das médias de duas populações

(observações independentes)

BIOESTATÍSTICA

4...

Estatística do teste e sua distribuição:

a) as variâncias populacionais são diferentes, isto é, $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Fácil! Substituímos cada variância pelo seu respectivo estimador:

$$Z = \frac{\bar{X}_D - \mu_D}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1) \qquad \Rightarrow T = \frac{\bar{X}_D - \mu_D}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \sim t_\vartheta$$

$$\text{onde } \vartheta = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$$

GLEICE M S CONCEIÇÃO
FSP - USP

Testes t-Student para a comparação das médias de duas populações

(observações independentes)

BIOESTATÍSTICA

4...

Estatística do teste e sua distribuição:

b) as variâncias populacionais são iguais, isto é, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

Para estimar a variância única σ^2, utilizamos uma média ponderada de S_1^2 e S_2^2 :

$$S_{comb}^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

E substituímos cada variância por S_{comb}^2:

$$Z = \frac{\bar{X}_D - \mu_D}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1) \quad \Rightarrow T = \frac{\bar{X}_D - \mu_D}{\sqrt{\frac{S_{comb}^2}{n_1} + \frac{S_{comb}^2}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}$$

IV. Teste t-Student para comparação de médias, quando as variâncias são diferentes ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$)

Estatística do teste IV

$$T = \frac{\bar{X}_D - \mu_D}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \sim t_{\vartheta}$$

onde $\vartheta = \dfrac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1}+\frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}}$

V. Teste t-Student para comparação de médias, quando as variâncias são iguais ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)

(observações independentes)

Estatística do teste V

$$T = \frac{\bar{X}_D - \mu_D}{\sqrt{\frac{S_{comb}^2}{n_1} + \frac{S_{comb}^2}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}$$

onde $S_{comb}^2 = \dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$

Testes t-Student para a comparação das médias de duas populações

observações independentes

Para decidir se as variâncias populacionais são iguais ou diferentes, é necessário um teste de hipóteses do tipo

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$
$$H_a : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

Por ora, em lugar de testar se as variâncias são iguais ou não (Teste VI), usaremos o seguinte recurso:

Obtemos o quociente entre a maior e a menor variância amostral. Se este quociente for menor do que 3, assumimos que as variâncias populacionais são iguais. Caso contrário, assumimos que as variâncias populacionais são diferentes.

Testes t-Student para a comparação das médias de duas populações

(observações independentes)

BIOESTATÍSTICA

4...

Especifique as suposições assumidas.

✓ X_1 e X_2 têm distribuição *Normal.*

Isto garante que $\bar{X}_1$ e $\bar{X}_2$ terão distribuição *Normal* e,

consequentemente, $\bar{X}_D$ terá distribuição *Normal*.

✓ Se o tamanho da amostra for grande, podemos usar o TLC.

Para avaliar se X_1 e X_2 têm distribuição *Normal:*

- *Histogramas*
- *Testes de Normalidade*

Testes t-Student para a comparação das médias de duas populações

observações independentes

BIOESTATÍSTICA

5. Fixar α

6. Obter a região crítica com base no valor de $\bar{x}_c$

7. Tomar a decisão, comparando o valor de $\bar{X}_{obs}$ com a região crítica

ou

6. Obter a região crítica com base no valor de t_c

7. Tomar a decisão, comparando o valor de t_{obs} com a região crítica

ou

6. Obter o nível descritivo (p-valor)

7. Tomar a decisão, comparando o p-valor com o valor de α

Exemplo

Para avaliar a ação antidepressiva da tianeptina, foi realizado um ensaio clínico aleatorizado e duplo cego. Durante 42 dias, um grupo de pacientes recebeu a droga enquanto outro grupo recebeu placebo. A depressão foi medida através da escala de Montgomery-Asberg (MADRS). Os resultados estão apresentados abaixo.

Teste as hipóteses correspondentes.

Placebo	Tianeptina
$n_1 = 21$	$n_2 = 31$
$\bar{X}_1 = 21{,}06$	$\bar{X}_2 = 10{,}63$
$S_1^2 = 90{,}72$	$S_2^2 = 52{,}65$

Exemplo

Análise descritiva

Intervalos de confiança para os escores médios de depressão nos dois grupos de pacientes.

$$IC(\mu_1; 0{,}95) = (16{,}72 : 25{,}40)$$

$$IC(\mu_2; 0{,}95) = (\ 7{,}97 : 13{,}29)$$

Conclusões iniciais:

É possível que a droga funcione pois, como os intervalos de confiança não se interceptam, as médias devem ser diferentes. Isto sugere que o escore médio populacional no grupo tianeptina é menor do que no grupo placebo .

Exemplo

Teste de hipóteses

1. Definir a(s) variável(eis) de interesse e o(s) parâmetro(s) que a(s) caracteriza(m).

X_1 – escore de depressão no grupo placebo, com $E(X_1) = \mu_1$ e $Var(X_1) = \sigma_1^2$

X_2 – escore de depressão no grupo tianeptina, com $E(X_2) = \mu_2$ e $Var(X_2) = \sigma_2^2$

2. Estabelecer as hipóteses nula e alternativa e interpretá-las.

$$\begin{array}{l} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_a: \mu_1 > \mu_2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_a: \mu_1 - \mu_2 > 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} H_0: \mu_D = 0 \\ H_a: \mu_D > 0 \end{array}$$

onde $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$

$H_0: \mu_D = 0$ A droga não funciona

$H_a: \mu_D > 0$ A droga funciona

Exemplo

BIOESTATÍSTICA

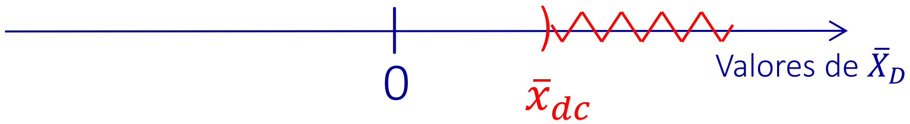
Teste de hipóteses

3. Definir a forma da região crítica, com base na hipótese alternativa

Parâmetro: $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$

Estimador: $\bar{X}_D = \bar{X}_1 - \bar{X}_2$

$H_a: \mu_1 > \mu_2$



$RC = \{\bar{X}_D \in R \mid \bar{X}_D \geq \bar{x}_{dc}\}$

Exemplo

BIOESTATÍSTICA

Teste de hipóteses

4. Identificar o parâmetro, o seu estimador e a distribuição do estimador; definir a estatística do teste e sua distribuição especificar as suposições assumidas.

Parâmetro: $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$

Estimador e distribuição do estimador: $\bar{X}_D = \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2\,, \dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$

Estatística do teste e sua distribuição:

Primeiro, precisamos decidir se as variâncias populacionais são iguais ou diferentes.

$$Q = \frac{90{,}72}{52{,}65} = 1{,}723$$

Como, Q < 3, decidimos que as variâncias populacionais são iguais, isto, é $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

Exemplo

Teste de hipóteses

4. Identificar o parâmetro, o seu estimador e a distribuição do estimador; definir a estatística do teste e sua distribuição especificar as suposições assumidas.

Estatística do teste e sua distribuição:

variâncias iguais $(\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2)$ $\Rightarrow T = \dfrac{\bar{X}_D - \mu_D}{\sqrt{\dfrac{S_{comb}^2}{n_1} + \dfrac{S_{comb}^2}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}$

$$S_{comb}^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{(21-1) * 90{,}72 + (31-1) * 52{,}65}{21 + 31 - 2} = 67{,}878$$

$$S_{comb} = 8{,}239$$

Exemplo

Teste de hipóteses

4. Identificar o parâmetro, o seu estimador e a distribuição do estimador; definir a estatística do teste e sua distribuição especificar as suposições assumidas.

Suposições assumidas:

✓ X_1 e X_2 têm distribuição *Normal.*

Isto garante que $\bar{X}_1$ e $\bar{X}_2$ terão distribuição *Normal* e,

consequentemente, $\bar{X}_D$ terá distribuição *Normal*.

5. Fixar α

$\alpha=0,05$ e $\alpha=0,01$

Exemplo

Teste de hipóteses

6. ii) Obter a região crítica com base no valor de t_c

Da tabela da t_{50}:

Para α=0,05 $\Rightarrow$ RC=$\{t \in \mathcal{R} \mid t \geq 1{,}6775\}$

Para α=0,01 $\Rightarrow$ RC=$\{t \in \mathcal{R} \mid t \geq 2{,}4065\}$

Da amostra:

$$\bar{X}_{Dobs} = \bar{X}_{1\,obs} - \bar{X}_{2\,obs} = 21{,}06 - 10{,}63 = 10{,}43$$

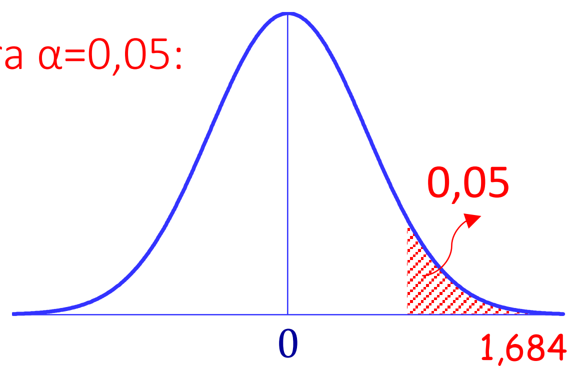
Sob H_0, o valor de t observado é:

$$t_{obs} = \frac{\bar{X}_{Dobs} - \mu_D}{\sqrt{\frac{S^2_{comb}}{n_1} + \frac{S^2_{comb}}{n_2}}} = \frac{10{,}43 - 0}{\sqrt{\frac{67{,}878}{21} + \frac{67{,}878}{31}}} = 4{,}4793$$

Sob H_0

t_{50}

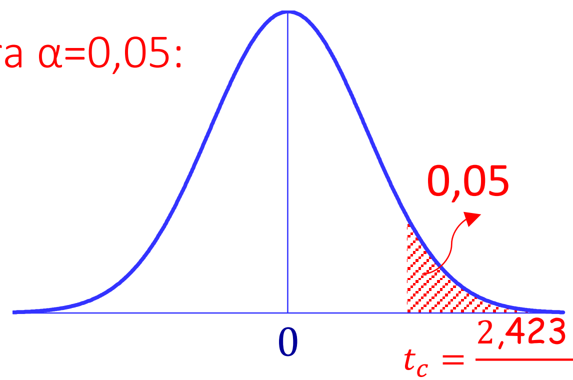
Para α=0,05:



$$t_c = \frac{1{,}684 + 1{,}671}{2} = 1{,}6775$$

t_{50}

Para α=0,05:



$$t_c = \frac{2{,}423 + 2{,}390}{2} = 2{,}4065$$

BIOESTATÍSTICA

GLEICE M S CONCEIÇÃO
FSP - USP

Exemplo

Teste de hipóteses

7. ii) Tomar a decisão, comparando o valor de t_{obs} com a região crítica

Para α=0,05 $\Rightarrow$ RC={t $\in \mathcal{R}$ $|t \geq$1,6775}

Como $t_{obs} = 4{,}4793$, $t_{obs} \in RC$, então rejeito H_0 e decido que **a droga funciona,** isto é, $\mu_1 > \mu_2$.

Para α=0,01 $\Rightarrow$ RC={t $\in \mathcal{R}$ $|t \geq$2,4065}

Como $t_{obs} = 4{,}4793$, $t_{obs} \in RC$, então rejeito H_0 e decido que **a droga funciona,** isto é, $\mu_1 > \mu_2$.

Exemplo

Teste de hipóteses

6. iii) Obter o nível descritivo (p-valor)

Da amostra: $\bar{X}_{Dobs} = \bar{X}_{1\,obs} - \bar{X}_{2\,obs} = 21{,}06 - 10{,}63 = 10{,}43$

$$p - valor = P(\bar{X}_D \geq \bar{X}_{Dobs} | H_0 \text{ é } verdadeira) =$$

$$= P(\bar{X}_D \geq 10{,}43\ |\mu_D = 0)$$

$$= P\left(\frac{\bar{X}_D - 0}{\sqrt{\frac{67{,}878}{21} + \frac{67{,}878}{31}}} \geq \frac{10{,}43 - 0}{\sqrt{\frac{67{,}878}{21} + \frac{67{,}878}{31}}}\right) = P(t_{50} \geq 4{,}4793) \cong 0{,}00$$

t_{obs}

Exemplo

Teste de hipóteses

7. iii) Tomar a decisão, comparando o p-valor com o valor de α

$$p - valor \cong 0{,}00$$

Como $p - valor < \alpha$, rejeito H_0 e decido que a droga funciona.

Exemplo

Teste de hipóteses

O que significa o p-valor, neste caso?

$$p - valor \cong 0{,}00$$

Se, de fato, droga não funciona, a probabilidade de que a diferença entre os escores médios de depressão nos dois grupos seja tão grande ou maior que a observada é aproximadamente zero.

Comparando as médias de duas populações

Em resumo...

Amostras Dependentes ?

- **sim** → Teste t-pareado **(Teste III)**
- **não** → Variâncias desconhecidas → Teste para variâncias
  - Variâncias diferentes → Teste t-Student com variâncias diferentes **(Teste IV)**
  - Variâncias iguais → Teste t-Student com variâncias Iguais **(Teste V)**

Comparando as médias de duas populações

Em resumo...

Observações dependentes	Observações independentes

Observações dependentes

- ✓ Calcular $D = X_1 - X_2$ ou $D = X_2 - X_1$
- ✓ A partir de D, calcular $\bar{D}$ e S_D
- ✓ Estatística do teste

$$T = \frac{\bar{D} - \mu_D}{S_D / \sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

Observações independentes

- ✓ Obter $\bar{X}_D$, a partir de $\bar{X}_1$ e $\bar{X}_2$
- ✓ Decidir se as variâncias populacionais são iguais ou diferentes
- ✓ Escolher a estatística do teste:

Se as variâncias são diferentes ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$)	Se as variâncias são iguais ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)
$T = \frac{\bar{X}_D - \mu_D}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \sim t_{\vartheta}$	$T = \frac{\bar{X}_D - \mu_D}{\sqrt{\frac{S_{comb}^2}{n_1} + \frac{S_{comb}^2}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}$
onde $\vartheta = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}}$	onde $S_{comb}^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$

GLEICE M S CONCEIÇÃO
FSP - USP

Exercício 2

Considere um estudo para comparar dois métodos para realização de uma tarefa, em segundos. Sessenta indivíduos foram distribuídos em dois grupos, o primeiro, com 30 indivíduos, utilizando o método 1 e, o segundo, com 30 indivíduos, utilizando o método 2. Para cada indivíduo, foi medido o tempo de realização da tarefa. O objetivo é saber se o tempo médio gasto para a realização da tarefa é o mesmo para os dois métodos.

O tempo médio para os indivíduos que utilizaram o método 1 foi 179,73 segundos, com desvio padrão igual a 12,84 segundos. Para o método 2, foi 185,86 segundos , com desvio padrão igual a 15,37 segundos.

a) Construa intervalos de confiança para o tempo médio de realização da tarefa em cada método e tire conclusões iniciais.

b) Teste as hipóteses correspondentes, a um nível de significância de 0,05 e de 0,01.

c) Explique o que é o p-valor, neste caso.

Exercício 2 a)

$$IC(\mu, \gamma) = \bar{X} \mp t_{\gamma}\, S/\sqrt{n}$$

$IC(\mu_1, 0{,}95) = 179{,}73 \mp 2{,}045 * 12{,}84/\sqrt{30}$

$= 179{,}73 \mp 4{,}795$

= [174,935 : 184,525]

$IC(\mu_2, 0{,}95) = 185{,}86 \mp 2{,}045 * 15{,}37/\sqrt{30}$

$= 185{,}86 \mp 5{,}739$

= [180,121 : 191,599]

Exercício 2 b)

BIOESTATÍSTICA

Teste de hipóteses

1. Definir a(s) variável(eis) de interesse e o(s) parâmetro(s) que a(s) caracteriza(m).

X_1 – tempo de realização da tarefa (seg) com o Método 1, com $E(X_1) = \mu_1$ e $Var(X_1) = \sigma_1^2$

X_2 – tempo de realização da tarefa (seg) com o Método 2, com $E(X_2) = \mu_2$ e $Var(X_2) = \sigma_2^2$

2. Estabelecer as hipóteses nula e alternativa e interpretá-las.

$$\begin{array}{l} H_0\colon \mu_1 = \mu_2 \\ H_a\colon \mu_1 \neq \mu_2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} H_0\colon \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_a\colon \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} H_0\colon \mu_D = 0 \\ H_a\colon \mu_D \neq 0 \end{array}$$

onde $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$

$H_0\colon \mu_D = 0$ O tempo médio é o mesmo para os dois métodos

$H_a\colon \mu_D \neq 0$ O tempo médio não é o mesmo para os dois métodos

Exercício 2 b)

Teste de hipóteses

3. Definir a forma da região crítica, com base na hipótese alternativa

Parâmetro: $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$

Estimador: $\bar{X}_D = \bar{X}_1 - \bar{X}_2$

$H_a: \mu_1 \neq \mu_2$

$RC = \{\bar{X}_D \in R |\ \bar{X}_D \leq \bar{x}_{dc1}\ ou\ \bar{X}_D \geq \bar{x}_{dc2}\}$

Exercício 2 b)

Teste de hipóteses

4. Identificar o parâmetro, o seu estimador e a distribuição do estimador; definir a estatística do teste e sua distribuição especificar as suposições assumidas.

Parâmetro: $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$

Estimador e distribuição do estimador: $\bar{X}_D = \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2 , \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$

Estatística do teste e sua distribuição:

Primeiro, precisamos decidir se as variâncias populacionais são iguais ou diferentes.

$$Q = \frac{15{,}37^2}{12{,}84^2} = \frac{236{,}237}{164{,}866} = 1{,}433$$

Como, Q < 3, decidimos que as variâncias populacionais são iguais, isto, é $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

GLEICE M S CONCEIÇÃO
FSP - USP

Exercício 2 b)

Teste de hipóteses

4. Identificar o parâmetro, o seu estimador e a distribuição do estimador; definir a estatística do teste e sua distribuição especificar as suposições assumidas.

Estatística do teste e sua distribuição:

variâncias iguais

$(\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2)$

$$\Rightarrow T = \frac{\bar{X}_D - \mu_D}{\sqrt{\frac{S_{comb}^2}{n_1} + \frac{S_{comb}^2}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}$$

$$S_{comb}^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{(30-1)*164{,}866 + (30-1)*236{,}237}{30+30-2} = 200{,}551$$

$$S_{comb} = 14{,}162$$

Exercício 2 b)

Teste de hipóteses

4. Identificar o parâmetro, o seu estimador e a distribuição do estimador; definir a estatística do teste e sua distribuição especificar as suposições assumidas.

Suposições assumidas:

✓ X_1 e X_2 têm distribuição *Normal.*

Isto garante que $\bar{X}_1$ e $\bar{X}_2$ terão distribuição *Normal* e,

consequentemente, $\bar{X}_D$ terá distribuição *Normal*.

5. Fixar α

α=0,05 e α=0,01

Exercício 2 b)

Teste de hipóteses

6. ii) Obter a região crítica com base no valor de t_c

Como não temos t_{58} na tabela, vamos aproximar por uma t_{60}:

Para α=0,05 ⇒ RC = $\{t \leq -2{,}000 \text{ ou } t \geq 2{,}000\}$

Para α=0,01 ⇒RC = $\{t \leq -2{,}660 \text{ ou } t \geq 2{,}660\}$

Da amostra:

$$\bar{X}_{Dobs} = \bar{X}_{1\,obs} - \bar{X}_{2\,obs} = 179{,}73 - 185{,}86 = -6{,}13$$

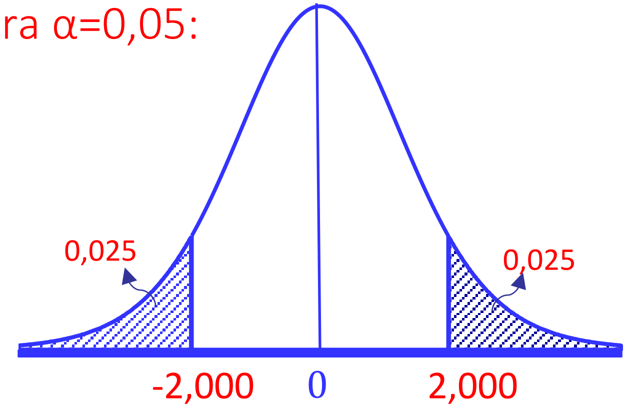
Sob H_0, o valor de t observado é:

$$t_{obs} = \frac{\bar{X}_{Dobs} - \mu_D}{\sqrt{\frac{S^2_{comb}}{n_1} + \frac{S^2_{comb}}{n_2}}} = \frac{-6{,}13 - 0}{\sqrt{\frac{200{,}551}{30} + \frac{200{,}551}{30}}} = \frac{-6{,}13}{3{,}657} = -1{,}6765$$

Sob H_0

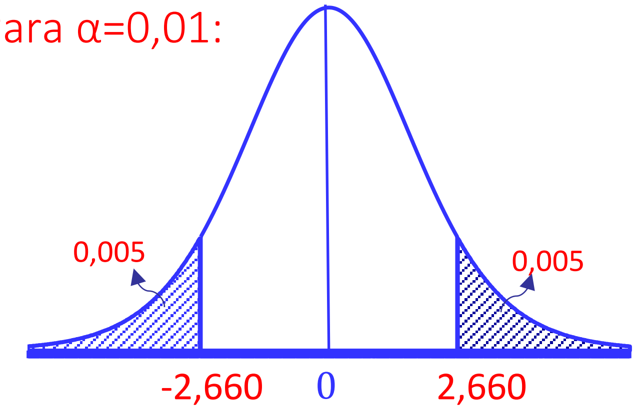
t_{60}

Para α=0,05:



t_{60}

Para α=0,01:



Exercício 2 b)

Teste de hipóteses

7. ii) Tomar a decisão, comparando o valor de t_{obs} com a região crítica

Para α=0,05 ⇒ RC = $\{t \leq -2{,}000 \text{ ou } t \geq 2{,}000\}$

Como $t_{obs} = -1{,}6765$, $t_{obs} \notin RC$, não rejeito H_0 e decido que o tempo médio é o mesmo para os dois métodos, isto é, $\mu_1 = \mu_2$.

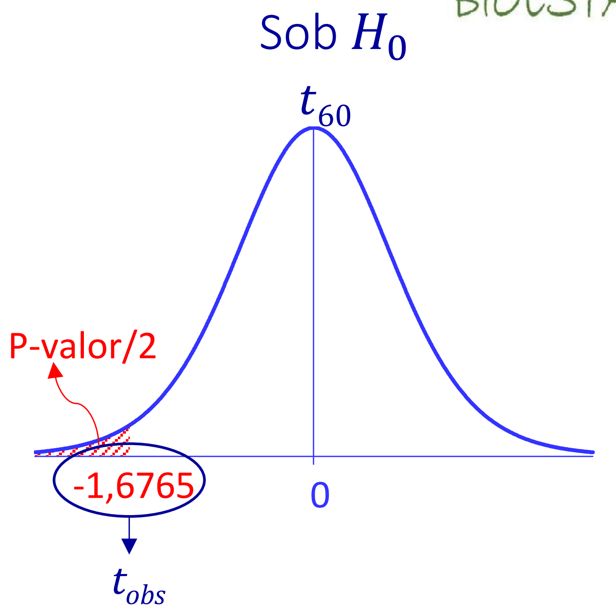
Para α=0,01 ⇒RC = $\{t \leq -2{,}660 \text{ ou } t \geq 2{,}660\}$

Como $t_{obs} = -1{,}6765$, $t_{obs} \notin RC$, não rejeito H_0 e decido que o tempo médio é o mesmo para os dois métodos, isto é, $\mu_1 = \mu_2$.

Exercício 2 b)

Teste de hipóteses

6. iii) Obter o nível descritivo (p-valor)



Da amostra: $\bar{X}_{Dobs} = \bar{X}_{1\,obs} - \bar{X}_{2\,obs} = 179{,}73 - 185{,}86 = -6{,}13$

$$p - valor = 2P(\bar{X}_D \leq \bar{X}_{Dobs} | H_0 \text{ é } verdadeira) =$$

$$= 2P(\bar{X}_D \leq -6{,}13 | \mu_D = 0)$$

$$= 2P\left(\frac{\bar{X}_D - 0}{\sqrt{\frac{S^2_{comb}}{n_1} + \frac{S^2_{comb}}{n_2}}} \leq \frac{-6{,}13}{\sqrt{\frac{S^2_{comb}}{n_1} + \frac{S^2_{comb}}{n_2}}}\right) = 2P\left(t_{58} \leq \frac{-6{,}13}{\sqrt{\frac{200{,}551}{30} + \frac{200{,}551}{30}}}\right)$$

$$= 2P(t_{58} \leq \underbrace{-1{,}6765}_{t_{obs}}) \cong 2\frac{0{,}10}{2} = 0{,}10$$

GLEICE M S CONCEIÇÃO
FSP - USP

Exercício 2 b)

Teste de hipóteses

7. iii) Tomar a decisão, comparando o p-valor com o valor de α

$$p - valor \cong 0{,}10$$

Como $p - valor > \alpha$ (quando α=0,05 ou α=0,01), não rejeito H_0 e decido que o tempo médio é o mesmo para os dois métodos, isto é, $\mu_1 = \mu_2$.

Exercício 2 c)

Teste de hipóteses

O que significa o p-valor, neste caso?

$$p - valor \cong 0{,}10$$

Se o tempo médio é o mesmo para os dois métodos, isto é, os dois métodos proporcionam o mesmo desempenho, a probabilidade de que a diferença entre os tempos médios dos dois métodos seja tão grande ou maior que a observada é maior do 5%.

GLEICE M S CONCEIÇÃO
FSP - USP

Exercício 3

BIOESTATÍSTICA

Um experimento é conduzido para comparar a eficiência de dois regimes alimentares no que diz respeito ao aumento de peso em animais. Ao primeiro grupo foi dada a dieta A e, ao segundo, a dieta B. A média e o desvio padrão para o ganho de peso após certo período, em Kg, para os animais do estudo foram os seguintes:

$$n_A = 31, \ \bar{X}_A = 18{,}70, \ S_A = 12{,}52$$

$$n_B = 41, \ \bar{X}_B = 25{,}91, \ S_B = 22{,}19$$

a) Construa intervalos de confiança para o ganho de peso médio em cada dieta e tire conclusões iniciais.
b) Teste as hipóteses correspondentes, a um nível de significância de 0,05 e de 0,01.
c) Explique o que é o p-valor, neste caso.

GLEICE M S CONCEIÇÃO
FSP - USP

Exercício 3 a)

BIOESTATÍSTICA

$$IC(\mu, \gamma) = \bar{X} \mp t_\gamma \, S/\sqrt{n}$$

$$IC(\mu_1, 0{,}95) = 18{,}70 \mp 2{,}042 * 12{,}52/\sqrt{31}$$

$$= 18{,}70 \mp 4{,}592$$

$$= [14{,}108 : 23{,}292]$$

$$IC(\mu_2, 0{,}95) = 25{,}91 \mp 2{,}021 * 22{,}19/\sqrt{41}$$

$$= 25{,}91 \mp 7{,}004$$

$$= [18{,}906 : 32{,}914]$$

Exercício 3 b)

Teste de hipóteses

1. Definir a(s) variável(eis) de interesse e o(s) parâmetro(s) que a(s) caracteriza(m).

X_1 – ganho de peso em animais com a dieta A, com $E(X_1) = \mu_1$ e $Var(X_1) = \sigma_1^2$

X_2 – ganho de peso em animais com a dieta B, com $E(X_2) = \mu_2$ e $Var(X_2) = \sigma_2^2$

2. Estabelecer as hipóteses nula e alternativa e interpretá-las.

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \quad \Rightarrow \quad H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad H_0: \mu_D = 0$$

$$H_a: \mu_1 \neq \mu_2 \qquad H_a: \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \qquad H_a: \mu_D \neq 0$$

onde $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$

$H_0: \mu_D = 0$ O ganho de peso médio é o mesmo nas duas dietas

$H_a: \mu_D \neq 0$ O ganho de peso médio não é o mesmo nas duas dietas

Exercício 3 b)

Teste de hipóteses

3. Definir a forma da região crítica, com base na hipótese alternativa

Parâmetro: $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$

Estimador: $\bar{X}_D = \bar{X}_1 - \bar{X}_2$

$H_a: \mu_1 \neq \mu_2$

$RC = \{\bar{X}_D \in R \mid \bar{X}_D \leq \bar{x}_{dc1}\ ou\ \bar{X}_D \geq \bar{x}_{dc2}\}$

Exercício 3 b)

Teste de hipóteses

4. Identificar o parâmetro, o seu estimador e a distribuição do estimador; definir a estatística do teste e sua distribuição especificar as suposições assumidas.

Parâmetro: $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$

Estimador e distribuição do estimador: $\bar{X}_D = \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2\,, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$

Estatística do teste e sua distribuição:

Primeiro, precisamos decidir se as variâncias populacionais são iguais ou diferentes.

$$Q = \frac{22{,}19^2}{12{,}52^2} = \frac{492{,}396}{156{,}750} = 3{,}141$$

Como, Q > 3, decidimos que as variâncias populacionais são diferentes, isto, é $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Exercício 3 b)

Teste de hipóteses

4. Identificar o parâmetro, o seu estimador e a distribuição do estimador; definir a estatística do teste e sua distribuição especificar as suposições assumidas.

Estatística do teste e sua distribuição:

Variâncias diferentes $(\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2)$

$$\Rightarrow T = \frac{\bar{X}_D - \mu_D}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \sim t_\vartheta$$

$$\frac{S_1^2}{n_1} = \frac{156{,}750}{31} = 5{,}056$$

$$\frac{S_2^2}{n_2} = \frac{492{,}396}{41} = 12{,}010$$

$$\vartheta = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}} = \frac{(5{,}056 + 12{,}010)^2}{\frac{(5{,}056^2)}{30} + \frac{(12{,}010^2)}{40}} = \frac{17{,}066^2}{4{,}458} = \frac{291{,}253}{4{,}458} = 65{,}332 \cong 65$$

Como não temos este valor na tabela da t, vamos aproximar por uma t_{60}.

Exercício 3 b)

Teste de hipóteses

4. Identificar o parâmetro, o seu estimador e a distribuição do estimador; definir a estatística do teste e sua distribuição especificar as suposições assumidas.

Suposições assumidas:

- ✓ X_1 e X_2 têm distribuição *Normal.*

  Isto garante que $\bar{X}_1$ e $\bar{X}_2$ terão distribuição *Normal* e,

  consequentemente, $\bar{X}_D$ terá distribuição *Normal*.

5. Fixar α

α=0,05 e α=0,01

Exercício 3 b)

Sob H_0

Teste de hipóteses

6. ii) Obter a região crítica com base no valor de t_c

Da tabela da t_{60}:

Para α=0,05 ⇒ RC = $\{t \leq -2{,}000 \text{ ou } t \geq 2{,}000\}$

Para α=0,01 ⇒ RC = $\{t \leq -2{,}660 \text{ ou } t \geq 2{,}660\}$

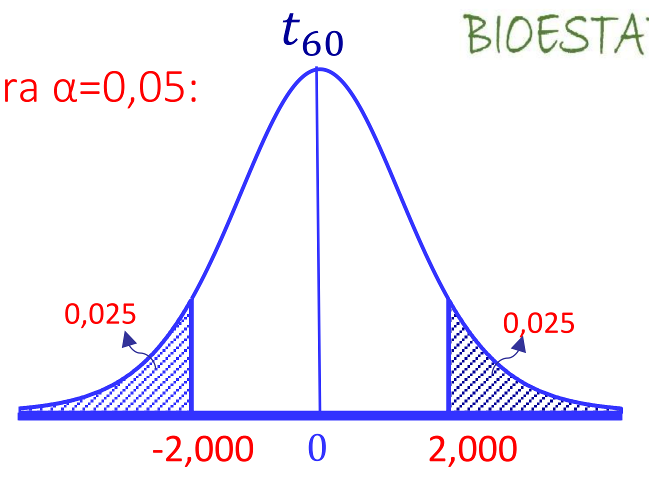
Da amostra:

$$\bar{X}_{Dobs} = \bar{X}_{1\,obs} - \bar{X}_{2\,obs} = 18{,}70 - 25{,}91 = -7{,}21$$

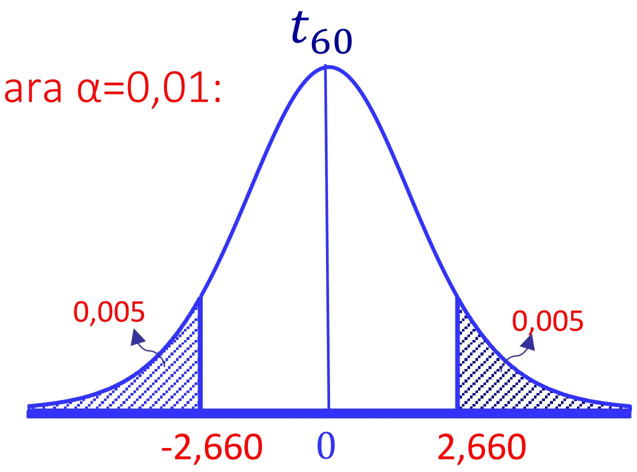
Sob H_0, o valor de t observado é:

$$t_{obs} = \frac{\bar{X}_{Dobs} - \mu_D}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} = \frac{-7{,}21 - 0}{\sqrt{7{,}066}} = \frac{-7{,}21 - 0}{4{,}131} = -1{,}745$$

Para α=0,05:



Para α=0,01:



Exercício 3 b)

Teste de hipóteses

7. ii) Tomar a decisão, comparando o valor de t_{obs} com a região crítica

Para α=0,05 $\Rightarrow$ RC = $\{t \leq -2{,}000 \text{ ou } t \geq 2{,}000\}$

Como $t_{obs} = -1{,}745$, $t_{obs} \notin RC$, então não rejeito H_0 e decido que o ganho de peso médio é o mesmo nas duas dietas, isto é, $\mu_1 = \mu_2$.

Para α=0,01 $\Rightarrow$RC = $\{t \leq -2{,}660 \text{ ou } t \geq 2{,}660\}$

Como $t_{obs} = -1{,}745$, $t_{obs} \notin RC$, então não rejeito H_0 e decido que o ganho de peso médio é o mesmo nas duas dietas, isto é, $\mu_1 = \mu_2$.

Exercício 3 b)

Teste de hipóteses

6. iii) Obter o nível descritivo (p-valor)

Da amostra: $\bar{X}_{Dobs} = \bar{X}_{1\,obs} - \bar{X}_{2\,obs} = 18{,}70 - 25{,}91 = -7{,}21$

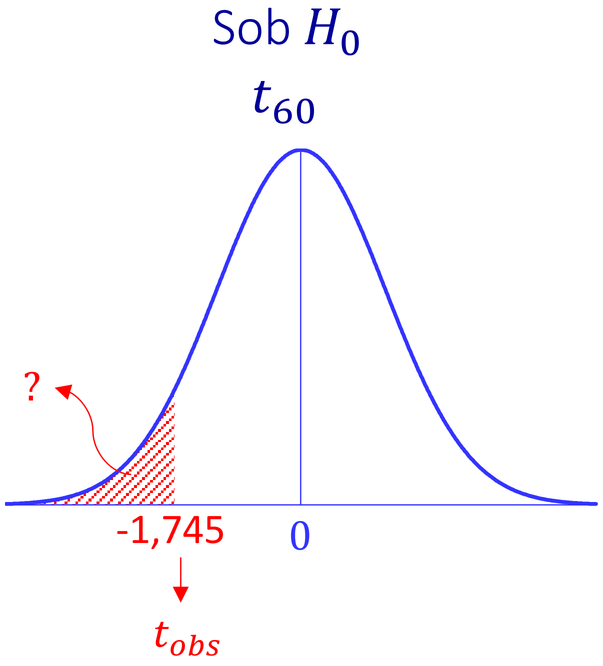
$$p - valor = 2P(\bar{X}_D \leq \bar{X}_{Dobs}\ |H_0 \text{ é } verdadeira) =$$

$$= 2P(\bar{X}_D \leq -7{,}21\ |\mu_D = 0)$$

$$= 2P\left(\frac{\bar{X}_D - 0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \leq \frac{-7{,}21 - 0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}\right) = 2P\left(t_{65} \leq \frac{-7{,}21}{\sqrt{7{,}066}}\right)$$

$$= 2P(t_{65} \leq -1{,}745) \cong 2\,\frac{0{,}075}{2} = 0{,}075$$

t_{obs}



GLEICE M S CONCEIÇÃO
FSP - USP

Exercício 3 b)

Teste de hipóteses

7. iii) Tomar a decisão, comparando o p-valor com o valor de α

$p - valor \cong 0{,}075$

Como $p - valor > \alpha$ (quando α=0,05 ou α=0,01), não rejeito H_0 e decido que o ganho de peso médio é o mesmo nas duas dietas, isto é, $\mu_1 = \mu_2$.

Exercício 3 c)

Teste de hipóteses

O que significa o p-valor, neste caso?

$$p - valor \cong 0{,}075$$

Se as dietas proporcionam o mesmo ganho de peso, a probabilidade de que a diferença entre os ganhos de peso médios nas duas dietas seja tão grande ou maior que a observada é maior do que 5%.

Exemplo

					Teste para médias		
	Placebo	Tianeptina					
média	21,060	10,630			cáculo de Scomb		
desvio padrão	9,52	7,26					
	21	31	52			Com filtro	Sem filtro
					S	9,52470472	7,25603197
					S2	90,720	52,650
Teste para variâncias					(n-1)*S2	1814,400	1579,500
					numerador	3393,900	
	A	B			denominador	50	
S2 =	90,720	52,650			Scomb2	67,878	
					Scomb	8,239	
Wobs 1 =	1,723						
f1 =	0,490	1,665	0,601		1/n1 =	0,048	
f2 =	1,932				1/n2 =	0,032	
					raiz(1/n1+1/n2) =	0,283	
					Sd =	2,328	
	A	B					
S2 =	52,650	90,720			tc =	1,990	
					dbc1 =	-4,634	
Wobs 1 =	0,580				dbc2 =	4,634	
f1 =	0,518	1,932	0,518		dif =	10,43	
f2 =	2,039						
					t obs =	4,4793	
					p-valor =	0,000	

GLEICE M S CONCEIÇÃO
FSP - USP

IC(95%)		
média	179,73	185,86
tg(n-1)	2,045	2,045
desvpad	12,84	15,37
raiz(n)	5,477	5,477
desvpad/raiz(n)	2,344	2,806
teco	4,795	5,739
inf	174,935	180,121
sup	184,525	191,599

GLEICE M S CONCEIÇÃO
FSP - USP

Exercício 2

					Teste para médias		
	A	B					
média	179,73	185,86			cáculo de Scomb:		
desvio padrão	12,84	15,37				A	B
	30	30	60		S	12,840	15,370
					S2	164,866	236,237
					(n-1)*S2	4781,102	6850,870
Teste para variâncias					numerador	11631,973	
					denominador	58	
	A	B			Scomb2	200,551	
S2 =	164,866	236,237			Scomb	14,162	
Wobs 1 =	0,698						
					1/n1 =	0,033	
f1 =	0,486	2,059			1/n2 =	0,033	
f2 =	1,861				raiz(1/n1+1/n2) =	0,258	
					Sd =	3,657	
	A	B			tc =	1,678	
S2 =	236,237	164,866			dbc=	6,134	
Wobs 1 =	1,433						
					dif =	-6,13	
f1 =	0,537	1,861					
f2 =	1,861				t obs =	-1,6765	
					p-valor =		

Exercício 3

BIOESTATÍSTICA

					Teste para médias		
	A	B					
média	18,7	25,91			cáculo de ni:		
desvio padrão	12,52	22,19					
	31	41	72		S	12,52	22,19
					S2	156,750	492,396
					S2/n	5,056	12,010
Teste para variâncias					soma	17,066	
					numerador	291,253	
	A	B					
S2 =	156,750	492,396			(S2/n) ^2	25,568	144,232
					(S2/n) ^2 / n-1	0,852	3,606
Wobs 1 =	0,318				denominador	4,458	
f1 =	0,558	1,792	0,558		ni	65,332	
f2 =	1,766						
					S	4,131	
					tc =	1,980	
	A	B			dbc1 =	-8,180	
S2 =	492,396	156,750			dbc2 =	8,180	
Wobs 1 =	3,141				dif =	-7,21	
f1 =	0,573	1,744	0,573		t obs =	-1,7453	
f2 =	1,792				p-valor =		

GLEICE M S CONCEIÇÃO
FSP - USP

Em resumo...

$H_0: \mu_1 = \mu_2$ $\Rightarrow$ $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ $\Rightarrow$ $H_0: \mu_D = 0$ onde $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$

$H_a: \mu_1 > \mu_2$ ($<$, $\neq$) $\Rightarrow$ $H_a: \mu_1 - \mu_2 > 0$ ($<$, $\neq$) $\Rightarrow$ $H_a: \mu_D > 0$ ($<$, $\neq$)

BIOESTATÍSTICA

Observações dependentes

- ✓ Calcular $D = X_1 - X_2$ ou $D = X_2 - X_1$
- ✓ A partir de D, calcular $\bar{D}$ e S_D
- ✓ Estatística do teste

$$T = \frac{\bar{D} - \mu_D}{S_D / \sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

Observações independentes

- ✓ Obter $\bar{X}_D$, a partir de $\bar{X}_1$ e $\bar{X}_2$
- ✓ Decidir se as variâncias populacionais são iguais ou diferentes
- ✓ Escolher a estatística do teste:

Se as variâncias são diferentes ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$)

$$T = \frac{\bar{X}_D - \mu_D}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \sim t_\vartheta$$

onde $t_\vartheta = \dfrac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$

Se as variâncias são iguais ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)

$$T = \frac{\bar{X}_D - \mu_D}{\sqrt{\frac{S_{comb}^2}{n_1} + \frac{S_{comb}^2}{n_2}}} \sim t_{n_1 + n_2 - 2}$$

onde $S_{comb}^2 = \dfrac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$

GLEICE M S CONCEIÇÃO
FSP - USP