



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3210 - Mecânica dos Sólidos I

Aula #12

Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.

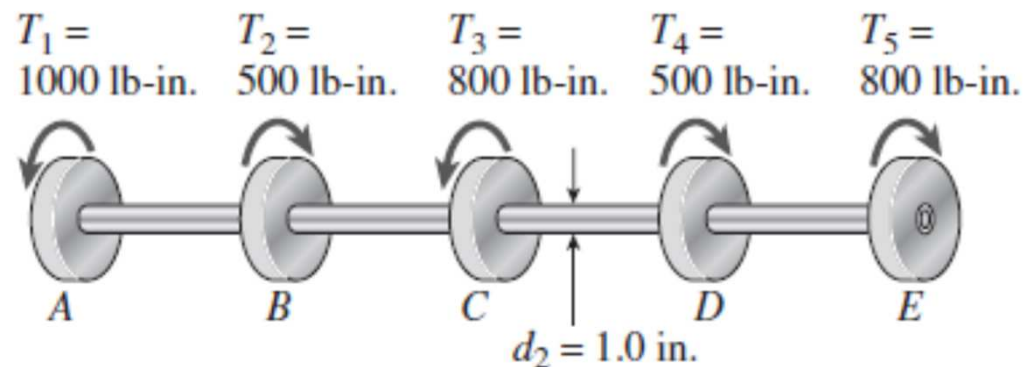
17/05/2022



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Problem 3.4-5 A hollow tube $ABCDE$ constructed of monel metal is subjected to five torques acting in the directions shown in the figure. The magnitudes of the torques are $T_1 = 1000$ lb-in., $T_2 = T_4 = 500$ lb-in., and $T_3 = T_5 = 800$ lb-in. The tube has an outside diameter $d_2 = 1.0$ in. The allowable shear stress is 12,000 psi and the allowable rate of twist is $2.0^\circ/\text{ft}$.

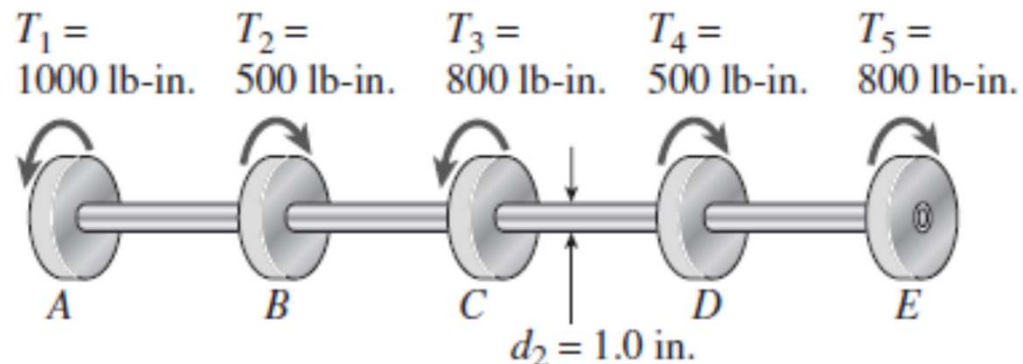
Determine the maximum permissible inside diameter d_1 of the tube.





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

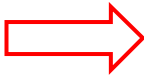
Solução:



Momentos de torção em cada segmento:

Segmento AB: $T_{AB} = -1000 \text{ lbf.in}$

Segmento BC: $T_{BC} = -500 \text{ lbf.in}$

Segmento CD: $T_{CD} = -1300 \text{ lbf.in}$  *Trecho CD é o mais solicitado!*

Segmento DE: $T_{DE} = -800 \text{ lbf.in}$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Devemos ter:

$$|\tau_{m\acute{a}x}| = \frac{|T_{m\acute{a}x}|}{I_p} \frac{d_2}{2} \leq \tau_{adm} \Leftrightarrow I_p \geq \frac{|T_{m\acute{a}x}|}{\tau_{adm}} \frac{d_2}{2} = \frac{1300}{12000} \times 0,5 = 0,054167 \text{ in}^4$$

$$|\theta_{m\acute{a}x}| = \frac{|T_{m\acute{a}x}|}{GI_p} \leq \theta_{adm} \Leftrightarrow I_p \geq \frac{|T_{m\acute{a}x}|}{G\theta_{adm}} = \frac{1300 \times 12}{9,5 \times 10^6 \times (2\pi/180)} = 0,04704 \text{ in}^4$$

O requisito de resistência é o que rege o dimensionamento. Assim, para que o diâmetro interno seja o maior possível, devemos ter o menor momento de inércia:

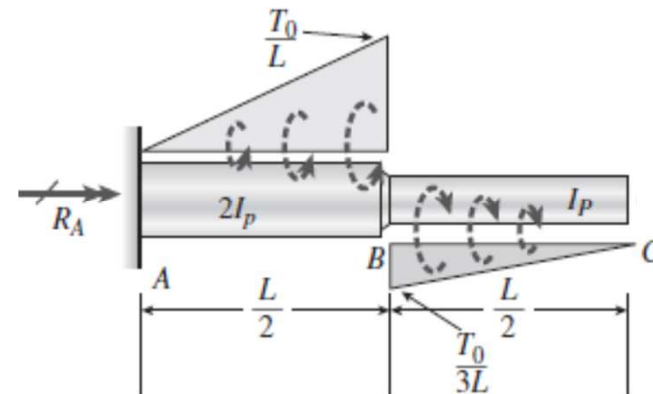
$$I_p = \frac{\pi}{32} (d_2^4 - d_1^4) = 0,054167 \text{ in}^4 \Rightarrow d_{1,m\acute{a}x} = 0,818 \text{ in}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Problem 3.4-18 A nonprismatic bar ABC of solid circular cross section is loaded by distributed torques (see figure). The intensity of the torques, that is, the torque per unit distance, is denoted $t(x)$ and varies linearly from zero at A to a maximum value T_0/L at B . Segment BC has linearly distributed torque of intensity $t(x) = T_0/3L$ of opposite sign to that applied along AB . Also, the polar moment of inertia of AB is twice that of BC , and the shear modulus of elasticity of the material is G .

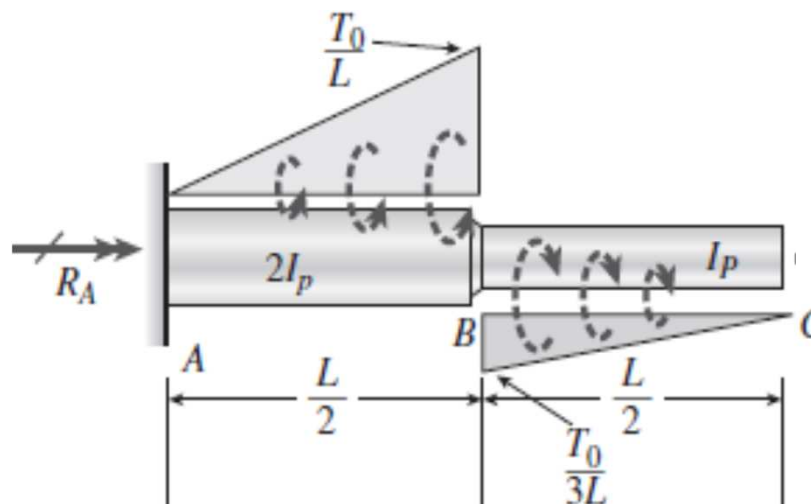
- (a) Find reaction torque R_A .
- (b) Find internal torsional moments $T(x)$ in segments AB and BC .
- (c) Find rotation ϕ_C .
- (d) Find the maximum shear stress $\tau_{\max}$ and its location along the bar.
- (e) Draw the torsional moment diagram (TMD: $T(x)$, $0 \leq x \leq L$).





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Solução:



$$a) \quad T_A = \frac{1}{2} \left(\frac{T_0}{3L} \times \frac{L}{2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{T_0}{L} \times \frac{L}{2} \right) = \frac{T_0}{12} - \frac{T_0}{4} = -\frac{T_0}{6}$$

b) Os torques distribuídos em cada trecho são (em valores absolutos):

No trecho AB ($0 \leq x < L/2$):

$$t_1(x) = \frac{T_0}{L} \frac{2x}{L} = \frac{2T_0 x}{L^2}$$

No trecho BC ($L/2 < x \leq L$):

$$t_2(x) = \frac{T_0}{3L} \frac{(L-x)}{L/2} = \frac{2T_0(L-x)}{3L^2}$$



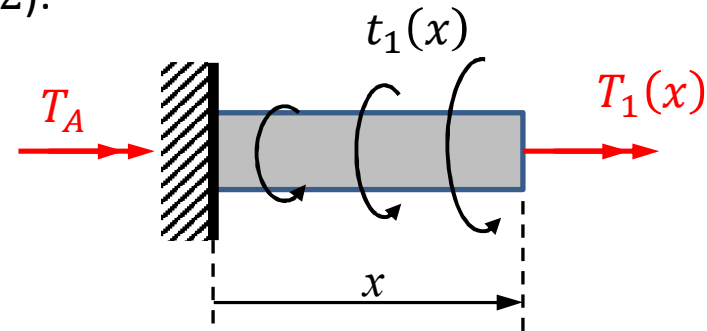
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Logo, para o trecho AB ($0 \leq x < L/2$):

$$T_1(x) + T_A + \int_0^x t_1(\xi) d\xi = 0$$

$$T_1(x) = -T_A - \int_0^x \frac{2T_0\xi}{L^2} d\xi$$

$$T_1(x) = -T_A - \int_0^x \frac{2T_0\xi}{L^2} d\xi = \frac{T_0}{6} - \frac{T_0x^2}{L^2} = T_0 \left(\frac{1}{6} - \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right) \quad (0 \leq x \leq L/2)$$



Valores extremos no trecho:

$$T_1(0) = T_0/6 \qquad T_1(L/2) = -T_0/12$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

E para o trecho BC ($L/2 < x \leq L$):

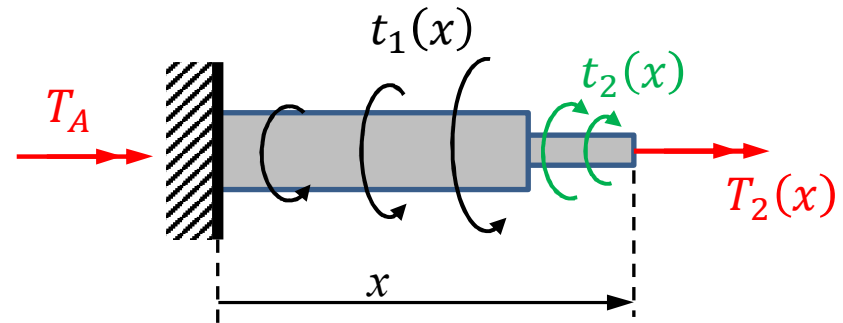
$$T_2(x) + T_A + \int_0^{L/2} t_1(\xi) d\xi = \int_{L/2}^x t_2(\xi) d\xi$$

$$T_2(x) = -T_A - \int_0^{L/2} \frac{2T_0\xi}{L^2} d\xi + \int_{L/2}^x \frac{2T_0(L-\xi)}{3L^2} d\xi$$

$$T_2(x) = \frac{T_0}{6} - \frac{T_0}{4} + \frac{2T_0}{3L^2} \left(L\xi - \frac{\xi^2}{2} \right) \Big|_{L/2}^x = -\frac{T_0}{3} \left(\frac{x}{L} - 1 \right)^2 \quad (L/2 \leq x \leq L)$$

Valores extremos no trecho:

$$T_2(L/2) = -T_0/12 \quad T_2(L) = 0$$





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

c) A rotação de C em relação a A é: $\phi_{C,A} = \phi_{C,B} + \phi_{B,A}$

$$\phi_{C,B} = \int_{L/2}^L \frac{T_2(x)}{GI_p} dx = -\frac{T_0}{3GI_p} \int_{L/2}^L \left(\frac{x}{L} - 1\right)^2 dx = -\frac{1}{72} \frac{T_0 L}{GI_p}$$

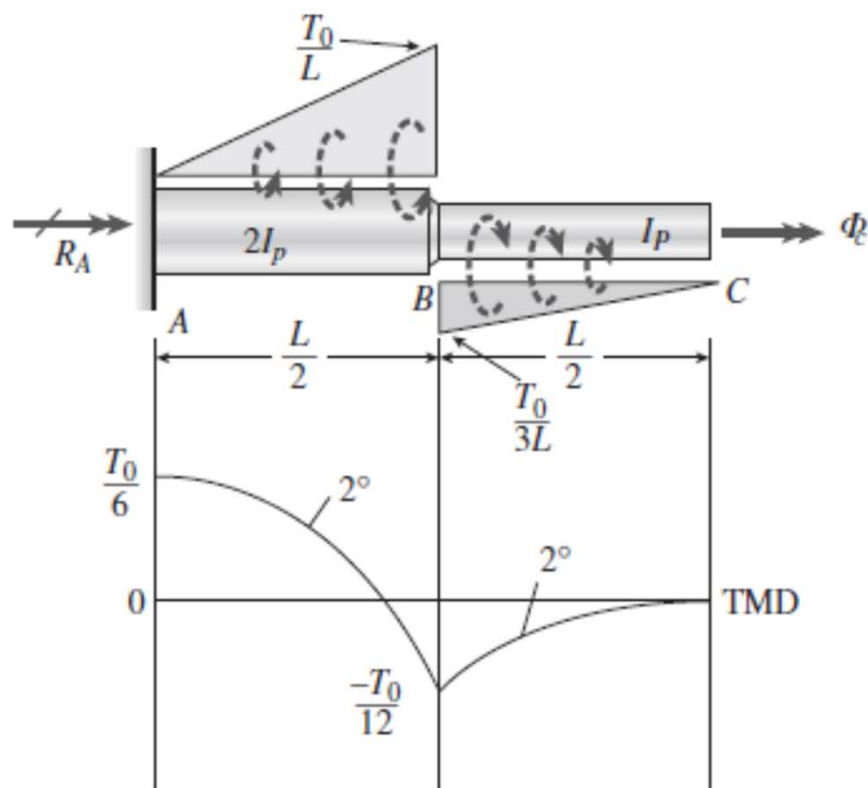
$$\phi_{B,A} = \int_0^{L/2} \frac{T_1(x)}{2GI_p} dx = \frac{T_0}{2GI_p} \int_0^{L/2} \left(\frac{1}{6} - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right) dx = \frac{1}{48} \frac{T_0 L}{GI_p}$$

$$\phi_{C,A} = \frac{1}{144} \frac{T_0 L}{GI_p} \quad (\text{giro no sentido anti-horário})$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

e) Antes de resolver o item (d) (determinação da máxima tensão cisalhante), é melhor resolver o item (e) (obtenção do D.M.T.):



Trecho AB:

$$T_1(x) = T_0 \left(\frac{1}{6} - \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right)$$

Trecho BC:

$$T_2(x) = -\frac{T_0}{3} \left(\frac{x}{L} - 1 \right)^2$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

d) Do item anterior, vemos que as seções transversais mais solicitadas são:

- A seção B (do trecho BC), onde $|T_{máx,2}| = T_0/12$;
- A seção A (do trecho AB), onde $|T_{máx,1}| = T_0/6$.

Se denotarmos por $d_2 = d$ o diâmetro do segmento BC, o diâmetro d_1 do trecho AB será tal que:

$$I_{p1} = 2I_{p2} \Leftrightarrow \frac{\pi d_1^4}{32} = 2 \frac{\pi d^4}{32} \Leftrightarrow d_1 = \sqrt[4]{2}d$$

Assim, a tensão cisalhante máxima no trecho AB será (em valor absoluto):

$$\tau_{máx,1} = \frac{16|T_{máx,1}|}{\pi d_1^3} = \frac{16T_0}{6} \frac{1}{\pi \sqrt[4]{8}d^3} \cong 0,5047 \frac{T_0}{d^3} \quad \text{(maior tensão!!)}$$

E a tensão cisalhante máxima no trecho BC será (em valor absoluto):

$$\tau_{máx,2} = \frac{16|T_{máx,2}|}{\pi d^3} = \frac{16T_0}{12} \frac{1}{\pi d^3} \cong 0,4244 \frac{T_0}{d^3}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Problem 3.5-2 A hollow steel bar ($G = 80 \text{ GPa}$) is twisted by torques T (see figure). The twisting of the bar produces a maximum shear strain $\gamma_{\max} = 640 \times 10^{-6} \text{ rad}$. The bar has outside and inside diameters of 150 mm and 120 mm, respectively.

- (a) Determine the maximum tensile strain in the bar.
- (b) Determine the maximum tensile stress in the bar.
- (c) What is the magnitude of the applied torques T ?



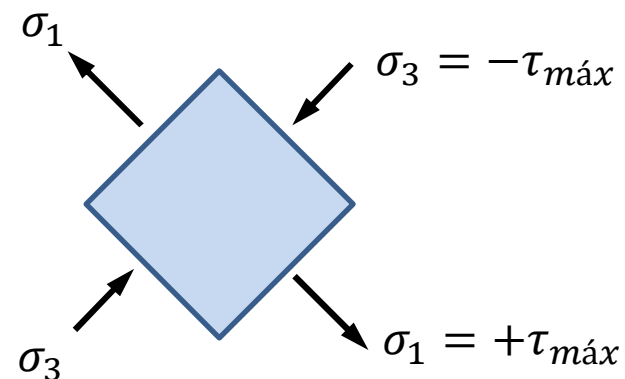
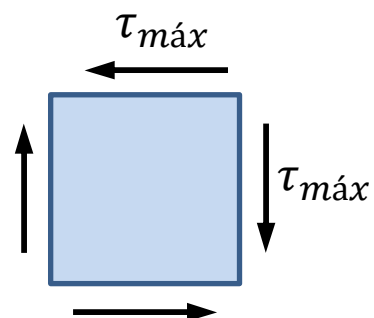
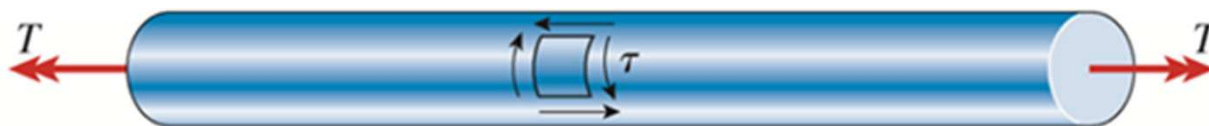


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Solução:

A máxima tensão de cisalhamento no eixo será:

$$\tau_{m\acute{a}x} = G\gamma_{m\acute{a}x} = 80000 \times 640 \times 10^{-6} MPa = 51,2 MPa$$





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

a) O máximo alongamento ocorrerá na mesma direção da tensão σ_1 e vale:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_3}{E} = \frac{\tau_{máx}}{E} - \nu \frac{(-\tau_{máx})}{E} = \frac{(1 + \nu)}{E} \tau_{máx} = \frac{\tau_{máx}}{2G} = \frac{\gamma_{máx}}{2}$$

Logo:
$$\varepsilon_1 = \frac{640 \times 10^{-6}}{2} = 320 \mu$$

b) A máxima tensão normal é $\sigma_1 = +\tau_{máx} = 51,2 \text{ MPa}$.

c) O torque aplicado pode ser determinado pela relação:

$$\tau_{máx} = \frac{T d_o}{I_p 2} \Leftrightarrow T = \frac{2I_p \tau_{máx}}{d_o} = \frac{\pi(d_o^4 - d_i^4) \tau_{máx}}{16d_o} = \frac{\pi(150^4 - 120^4) 51,2}{16 \times 150} \text{ Nmm}$$

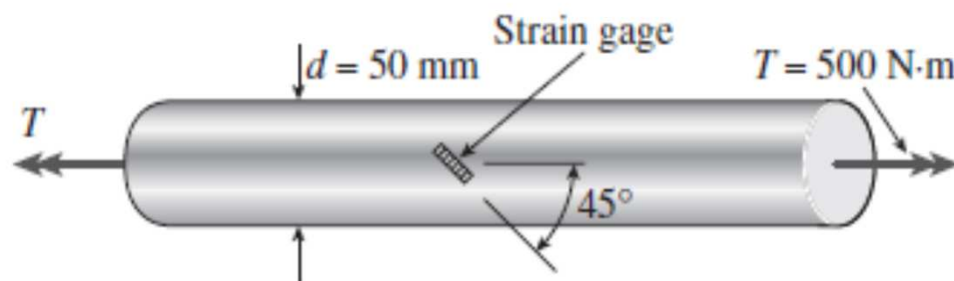
$$T = 20,03 \text{ kNm}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Problem 3.5-4 A solid circular bar of diameter $d = 50$ mm (see figure) is twisted in a testing machine until the applied torque reaches the value $T = 500$ N · m. At this value of torque, a strain gage oriented at 45° to the axis of the bar gives a reading $\epsilon = 339 \times 10^{-6}$.

What is the shear modulus G of the material?





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Solução:

Aproveitando os resultados do exercício anterior, temos as seguintes relações:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_3}{E} = \frac{\tau_{máx}}{E} - \nu \frac{(-\tau_{máx})}{E} = \frac{(1 + \nu)}{E} \tau_{máx} = \frac{\tau_{máx}}{2G} = \frac{8T}{G\pi d^3}$$

Logo:
$$G = \frac{8T}{\varepsilon_1 \pi d^3} = \frac{8 \times 5 \times 10^5 \text{ Nmm}}{339 \times 10^{-6} \times \pi \times 50^3 \text{ mm}^3} = 30047 \text{ MPa}$$

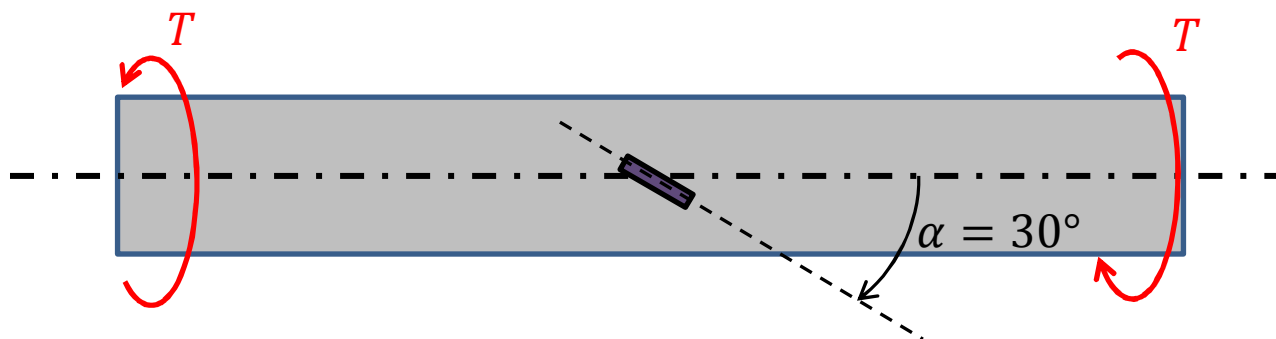
Resp.: $G \cong 30 \text{ GPa}$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Complemento ao exercício 3.5-4:

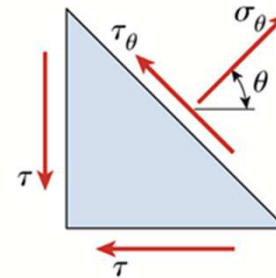
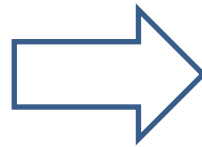
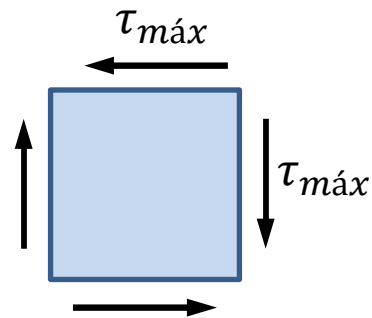
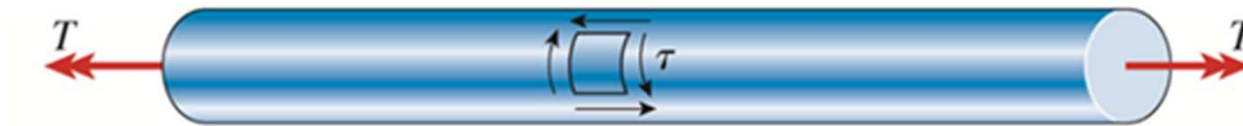
Para os mesmos dados do problema anterior (mesmo diâmetro, mesmo material e mesmo torque aplicado), determine qual seria a deformação registrada pelo extensômetro se o mesmo fosse colado de modo a formar um ângulo de -30° com o eixo longitudinal, como indicado na figura abaixo:





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Solução:



(b)

$$|\tau_{\max}| = \frac{16T}{\pi d^3}$$

$$\tau = -|\tau_{\max}| = -20,37 \text{ MPa}$$

Como demonstrado na aula 11, impondo o equilíbrio de forças no elemento dado acima (à direita), encontramos:

$$\sigma_{\theta} = \tau \sin(2\theta)$$

$$\tau_{\theta} = \tau \cos(2\theta)$$



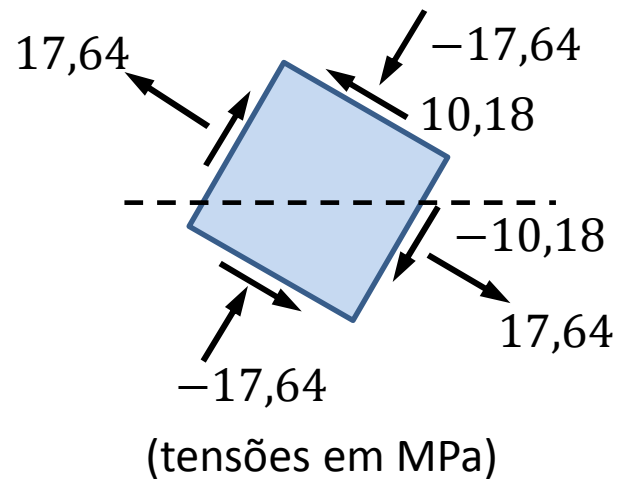
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Em particular, para $\theta_1 = 60^\circ$:

$$\left[\begin{array}{l} \sigma_{\theta_1} = -20,37 \operatorname{sen}(120^\circ) = -17,64 \text{ MPa} \\ \tau_{\theta_1} = -20,37 \cos(120^\circ) = +10,18 \text{ MPa} \end{array} \right.$$

E para $\theta_2 = -30^\circ$:

$$\left[\begin{array}{l} \sigma_{\theta_2} = -20,37 \operatorname{sen}(-60^\circ) = +17,64 \text{ MPa} \\ \tau_{\theta_2} = -20,37 \cos(-60^\circ) = -10,18 \text{ MPa} \end{array} \right.$$



$$\varepsilon_{\theta_2} = \frac{\sigma_{\theta_2}}{E} - \nu \frac{\sigma_{\theta_1}}{E} = \frac{17,64 \text{ MPa} (1 + \nu)}{E}$$

$$\varepsilon_{\theta_2} = \frac{17,64 \text{ MPa}}{2G} \cong \frac{17,64 \text{ MPa}}{2 \times 30047 \text{ MPa}} \cong 294 \mu$$