

Dinâmica de muitos corpos

terceira aula

1. Energia de um sistema de partículas
2. Colisões
3. Colisões unidimensionais

0. Recordação

- Centro de massa de um sistema

$$\vec{R} \equiv \frac{\sum_k m_k \vec{x}_k}{M}$$

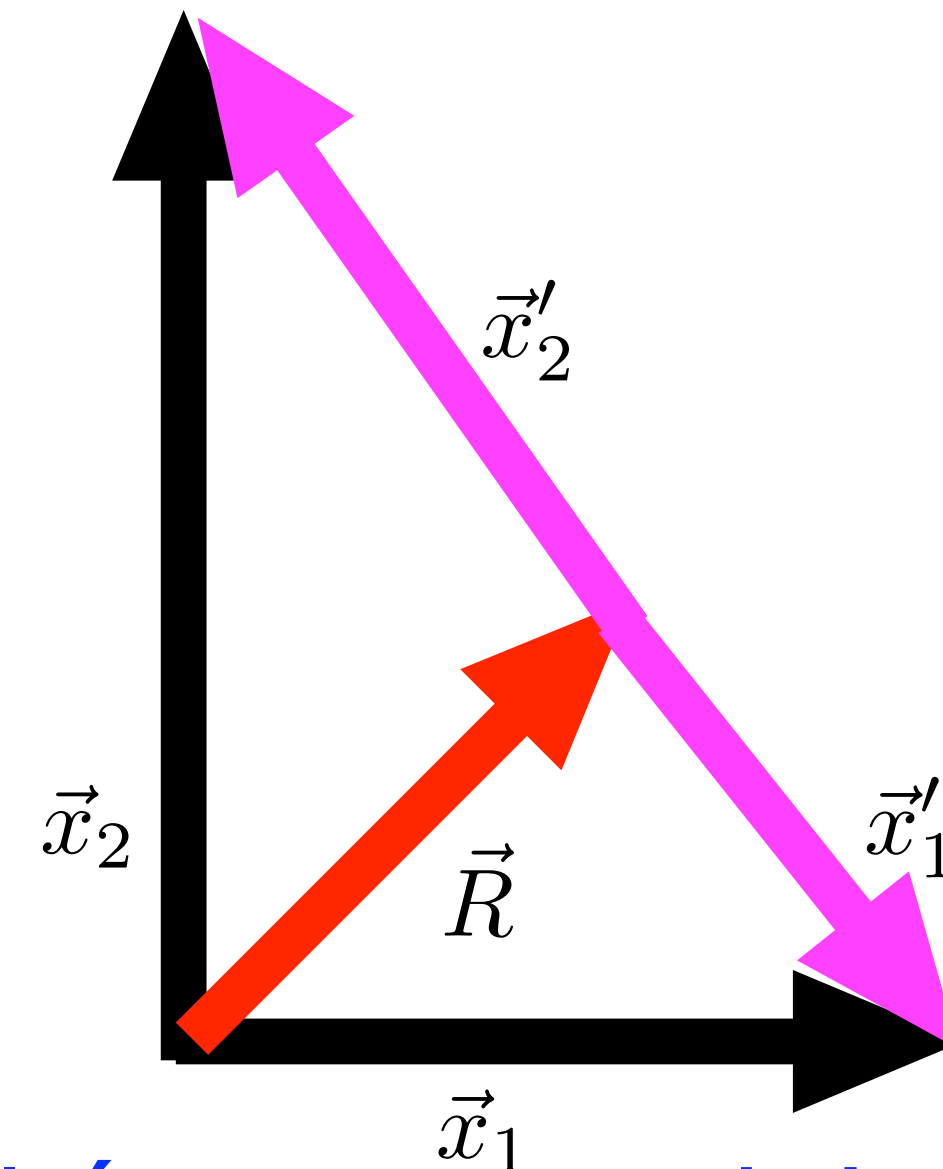
posição de cada partícula

massa total

$$M \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \sum_k \vec{F}_k^{ext} = \vec{F}_{total}^{ext}$$

- Coordenada relativas

$$\vec{x}'_j = \vec{x}_j - \vec{R}$$



- Em um sistema, cuja força externa total é nula, o momento linear total é conservado!

$$\frac{d}{dt} (M \vec{v}_{CM}) = \frac{d}{dt} (\vec{P}_{CM}) = \frac{d}{dt} \left(\sum_j \vec{p}_j \right) = 0$$

- Na ausência de forças externas todos os pontos são equivalentes
- Existe uma simetria: experimentos podem ser transladados e dão o mesmo resultado
- Teorema geral (Noether): simetrias (contínuas) implicam em leis de conservação.
 1. Translação espacial está associada à conservação de momento linear
 2. Translação temporal está associada à conservação de energia
 3. Rotação está associada à conservação de momento angular

1. Energia de um sistema de partículas

- Vimos que a energia cinética (T) de um sistema é

$$T_S = \frac{1}{2} \sum_j m_j \vec{v}_j^2 = T_{CM} + \frac{1}{2} M \vec{v}_{CM}^2$$

- Consideremos um sistema cujas interações são através de forças conservativas cujas energias potenciais são

$$U_{ext}(\vec{x}_j) \implies \vec{F}_j^{ext}(\vec{x}_j) = -\nabla_{\vec{x}_j} U_{ext}(\vec{x}_j)$$

$$U_{int}(\vec{x}_j, \vec{x}_k) \implies \vec{F}_{jk}(\vec{x}_j, \vec{x}_k) = -\nabla_{\vec{x}_j} U_{int}(\vec{x}_j, \vec{x}_k)$$

- A energia potencial total do sistema chamamos de $E_{pot}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$

- Por exemplo para montar um sistema a energia necessária é

$$N = 1 \implies E_{pot}(\vec{x}_1) = U_{ext}(\vec{x}_1)$$

$$N = 2 \implies E_{pot}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = U_{ext}(\vec{x}_1) + U_{ext}(\vec{x}_2) + U_{int}(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$$

$$N = 3 \implies E_{pot}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) = U_{ext}(\vec{x}_1) + U_{ext}(\vec{x}_2) + U_{ext}(\vec{x}_3) + U_{int}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) + U_{int}(\vec{x}_1, \vec{x}_3) + U_{int}(\vec{x}_2, \vec{x}_3)$$

- Desafio: mostre que no caso geral a expressão pode ser escrita como

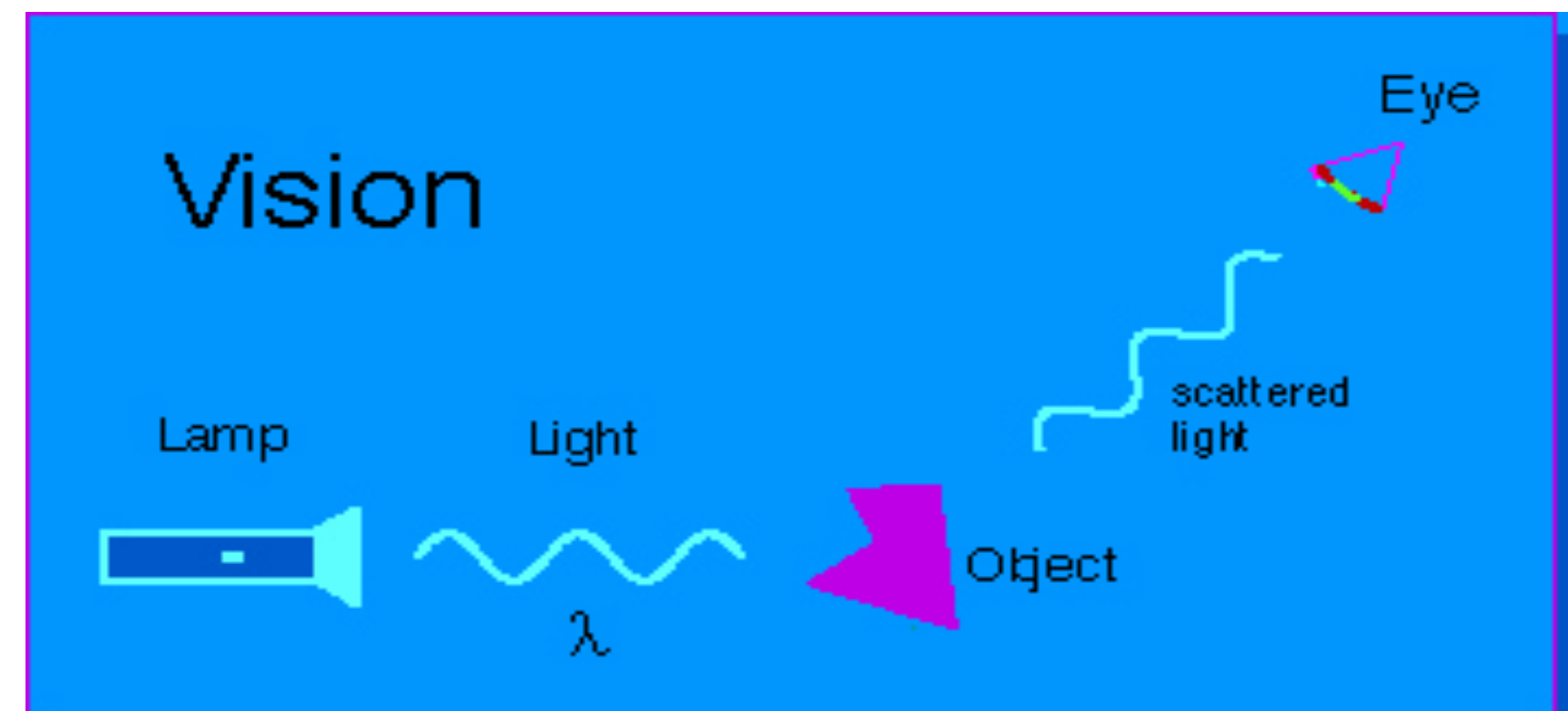
$$E_{pot}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = \sum_{j=1}^N U_{ext}(\vec{x}_j) + \sum_{j=1}^N \sum_{k>j}^N U_{int}(\vec{x}_j, \vec{x}_k)$$

- A energia total do sistema é

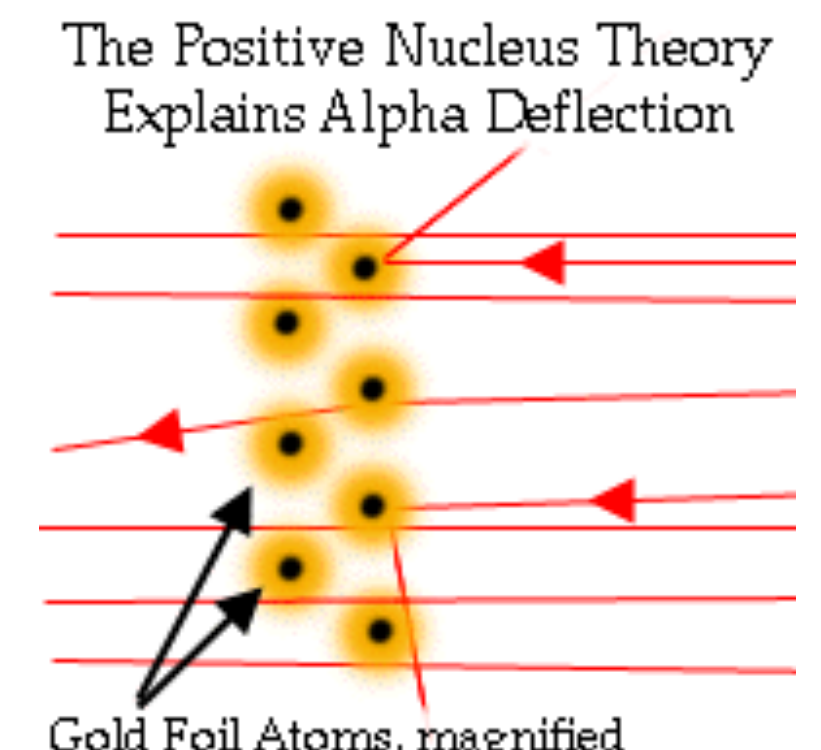
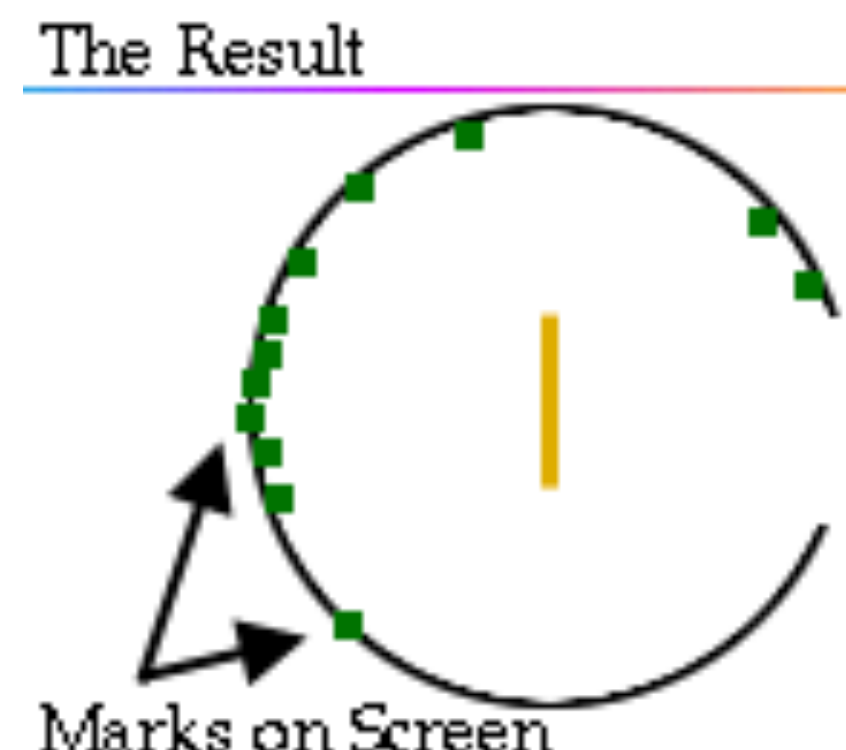
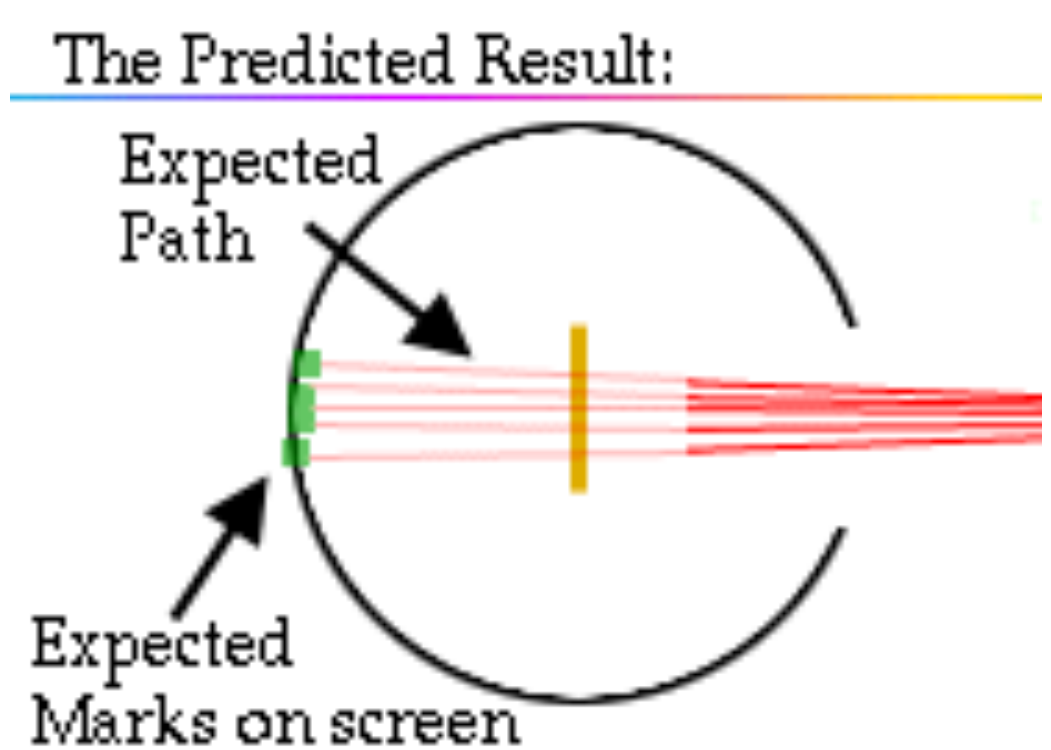
$$E_{total} = T_S + E_{pot}$$

2. Colisões

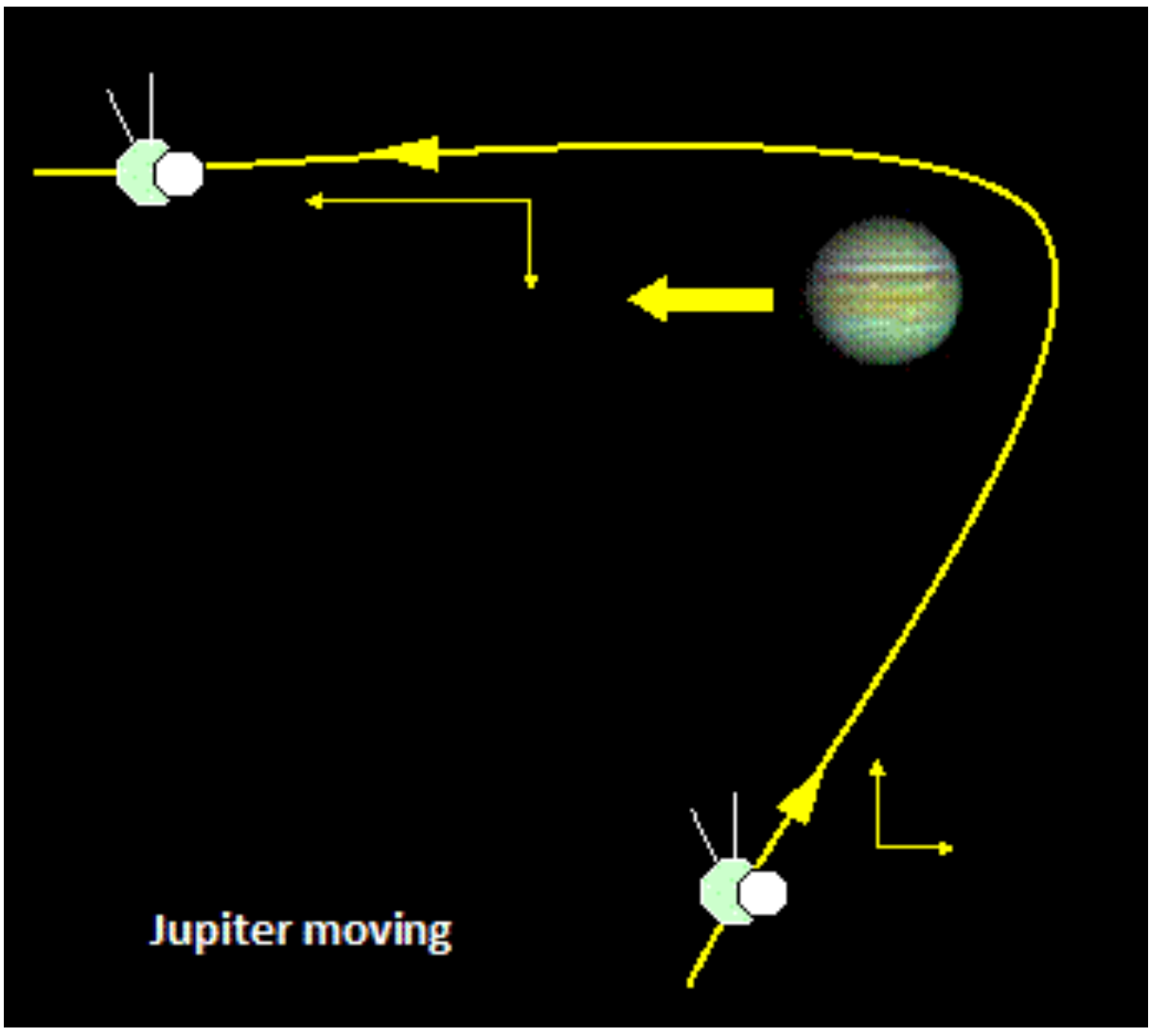
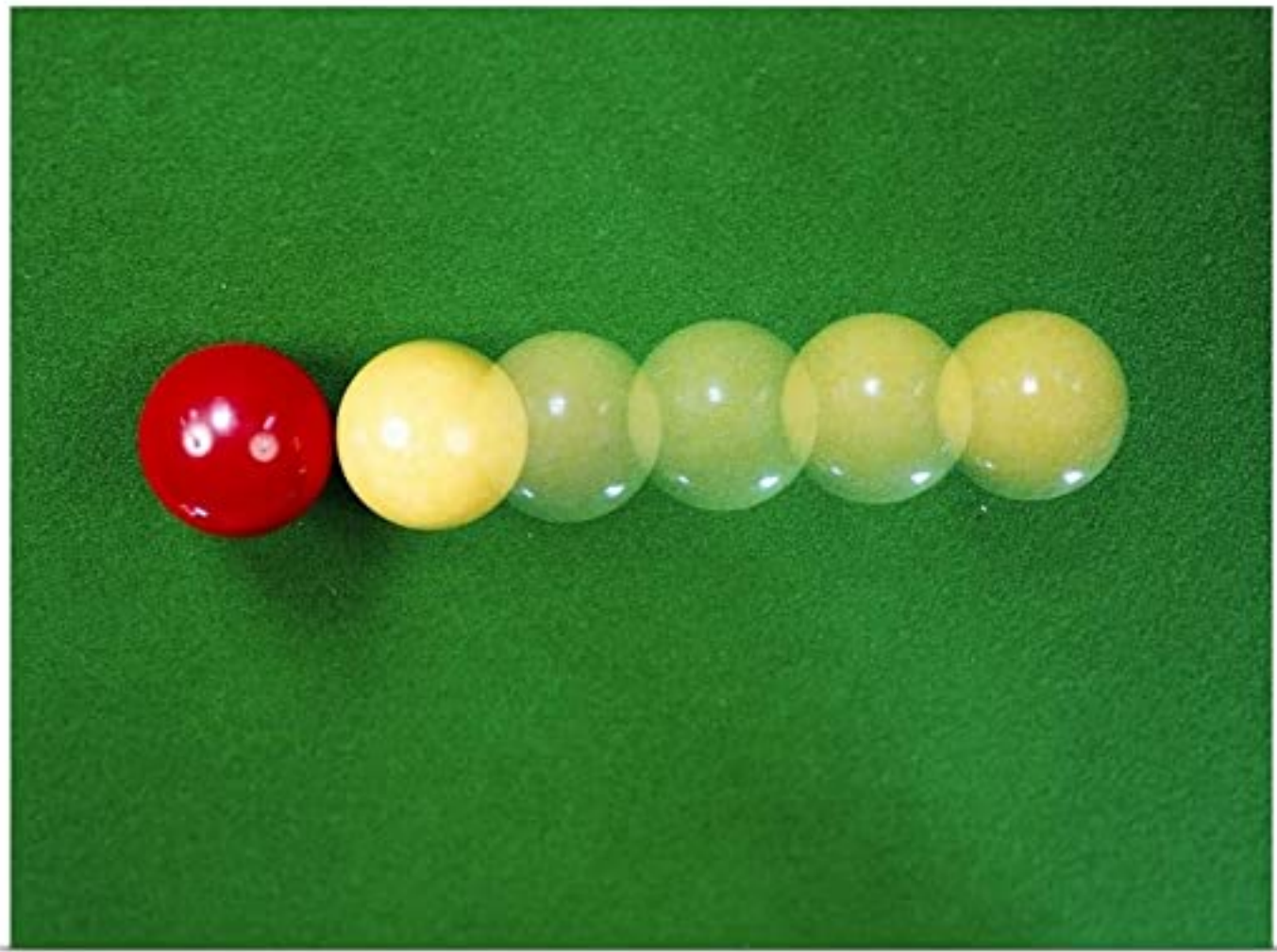
- Colisões são processos muito comuns:
 1. Vemos objetos usando a luz espalhada



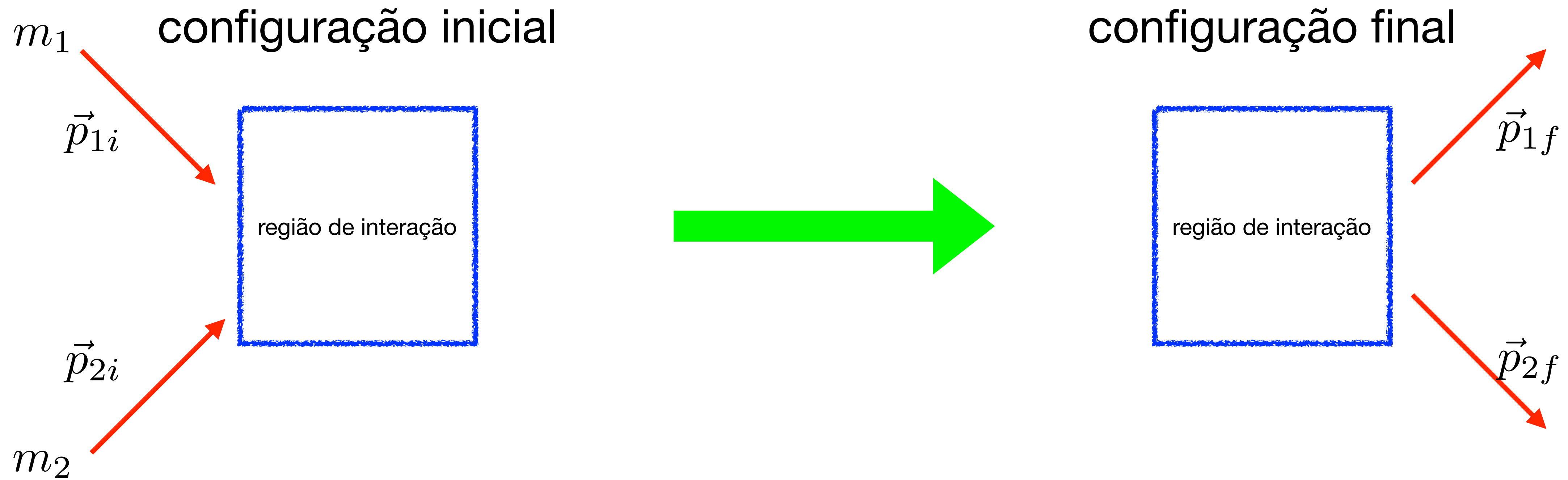
2. O estudo da estrutura da matéria, eg a descoberta do núcleo atômico



Colisões são frequentes em mecânica clássica



- Fases de uma colisão



- Tipos de colisão:

1. A colisão é dita elástica se conserva energia cinética
2. A colisão é inelástica se não conserva energia cinética

3. Impulso de uma força

- Avaliamos o efeito de uma força entre dois instante de tempo pelo IMPULSO:

$$\int_{t_i}^{t_f} dt \vec{F} = \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{p}_f - \vec{p}_i \equiv \Delta\vec{p}$$

- Durante uma colisão as forças são intensas durante o contato

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

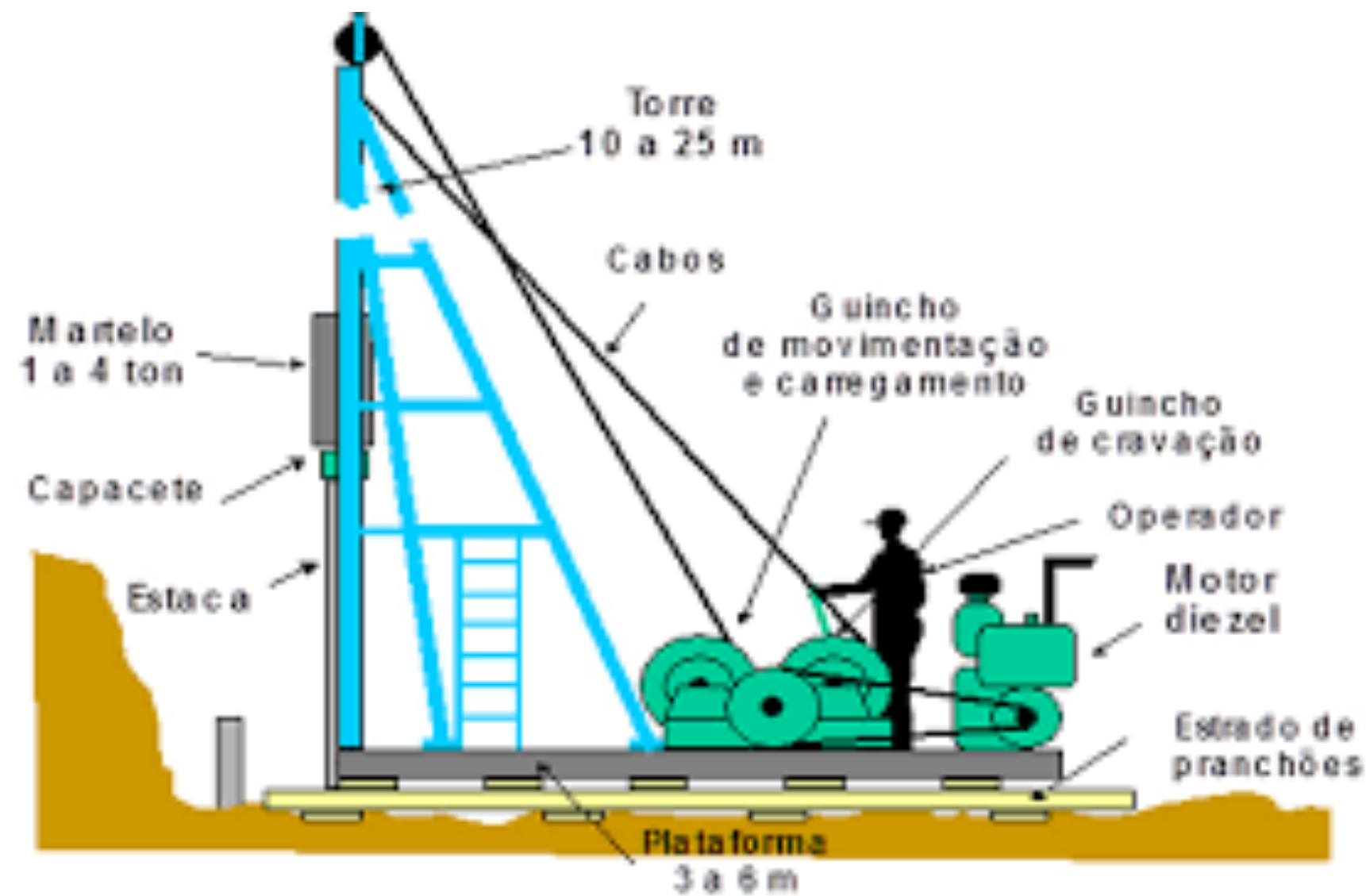
- Integrando no intervalo de tempo do contato

$$\Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2 \implies \vec{p}_{1f} - \vec{p}_{1i} = -(\vec{p}_{2f} - \vec{p}_{2i}) \implies \vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}$$

como já sabíamos para um sistema isolado!

- Mas isso é uma excelente aproximação na presença de forças externas se as forças de contato são muito maiores!

Exemplo: bate estaca



$$m_{\text{martelo}} = 10^3 \text{ kg}$$

$$h_{\text{queda}} = 10 \text{ m}$$

O impulso da força de contato para o martelo

$$\left| \int_0^{\Delta t} dt \vec{F} \right| = m \times \sqrt{2gh} = |\vec{F}| \Delta t$$

força constante

• Se $\Delta t = 0,1 \text{ s} \implies |\vec{F}| = \frac{m\sqrt{2gh}}{\Delta t} \simeq 1,4 \times 10^6 \text{ N}$

isso equivale ao peso de 140 toneladas!

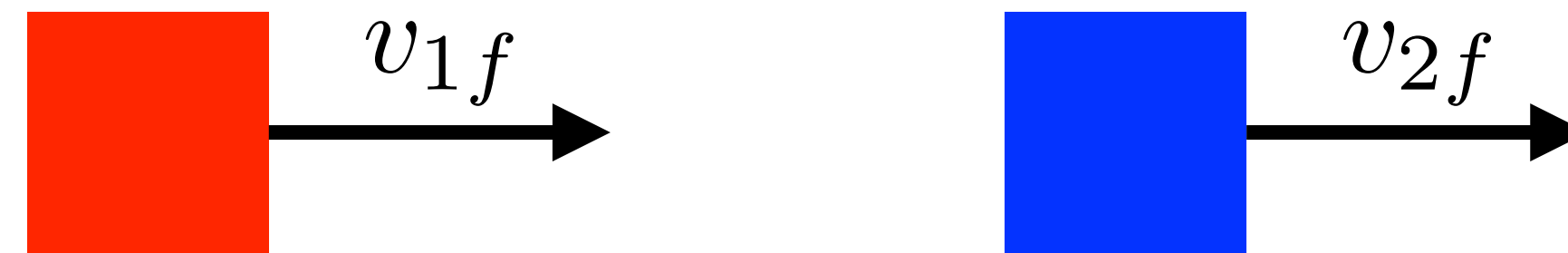
4. Colisões Unidimensionais

a situação inicial é



$$v_{1i} > v_{2i}$$

enquanto a final é



- a conservação de momento implica que

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

temos 2 incógnitas e 1 equação. Precisamos de mais informação (sobre energia cinética)

Colisões elásticas :

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \quad (1)$$

também temos

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \implies$$

$$\implies \frac{1}{m_1} [(m_1 v_{1i})^2 - (m_1 v_{1f})^2] = \frac{1}{m_2} [(m_2 v_{2f})^2 - (m_2 v_{2i})^2]$$

$$\implies \frac{1}{m_1} [m_1 v_{1i} - m_1 v_{1f}] [m_1 v_{1i} + m_1 v_{1f}] = \frac{1}{m_2} [m_2 v_{2f} - m_2 v_{2i}] [m_2 v_{2f} + m_2 v_{2i}]$$

$$\implies^{(1)} \frac{1}{m_1} [m_1 v_{1i} + m_1 v_{1f}] = \frac{1}{m_2} [m_2 v_{2f} + m_2 v_{2i}]$$

$$\implies v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f}) \quad (2)$$

a velocidade relativa entre 1 e 2 troca de sinal

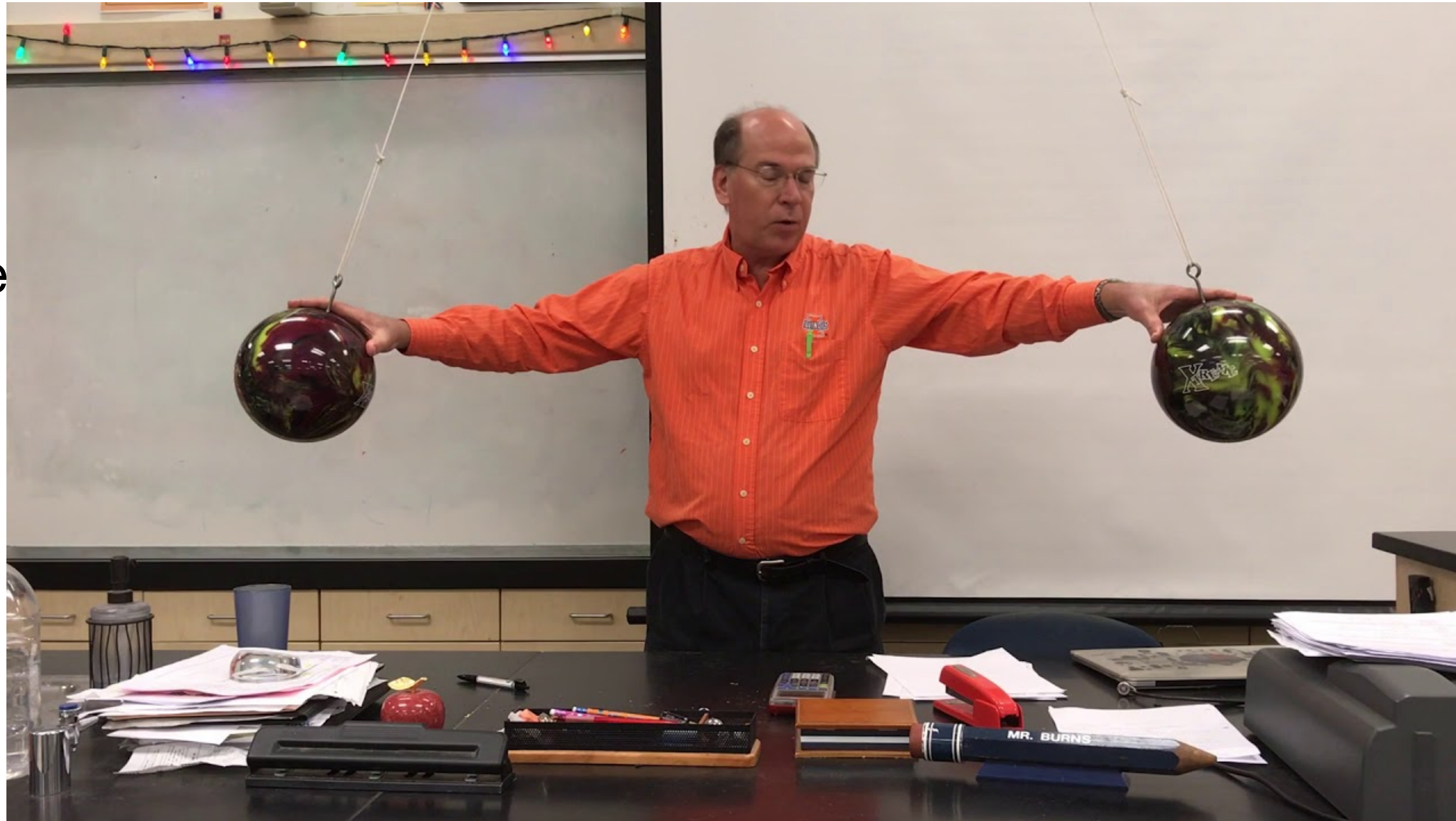
- Agora temos 2 equações e duas incógnitas. Resolvendo (1) + (2)

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

- As equações

- Casos:

1. Massas



encial do CM)

<https://www.youtube.com/watch?v=51IFubnEAsU>

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

- As equações originais eram simétricas por $1 \leftrightarrow 2$ e a solução também

- Casos:

1. Massas iguais:

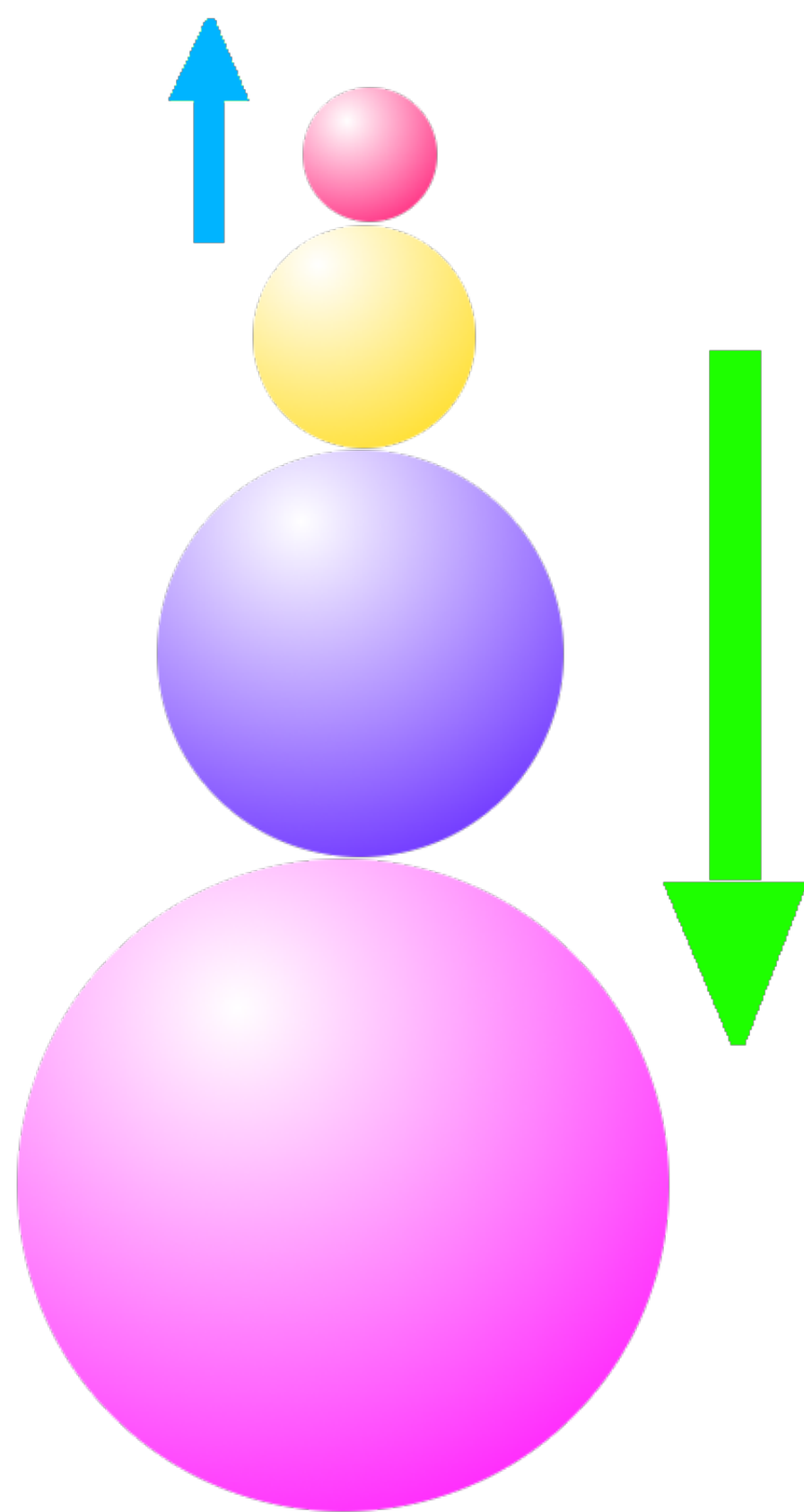
$$v_{1f} = v_{2i} \quad \text{e} \quad v_{2f} = v_{1i} \quad (\text{pense no referencial do CM})$$

2. Alvo parado: ($v_{2i} = 0$)

- 2.1 $m_2 \gg m_1 \implies v_{1f} \simeq -v_{1i}$ e $v_{2f} \simeq 2 \frac{m_1}{m_2} v_{1i}$

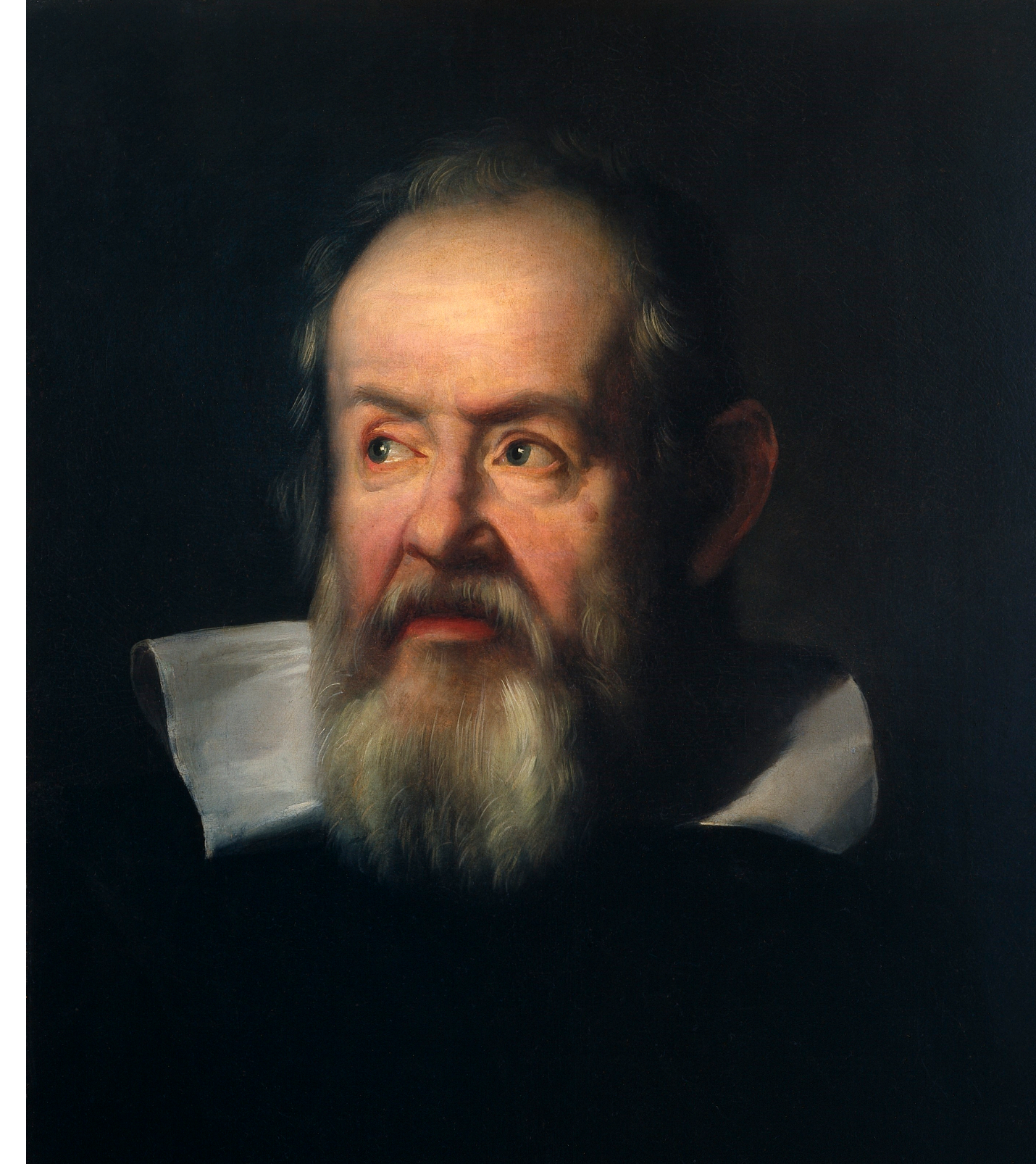
- 2.2 $m_1 \gg m_2 \implies v_{1f} \simeq v_{1i}$ e $v_{2f} \simeq 2v_{1i}$ (pense no referencial do CM)

• Exemplo 1: canhão de Galileu

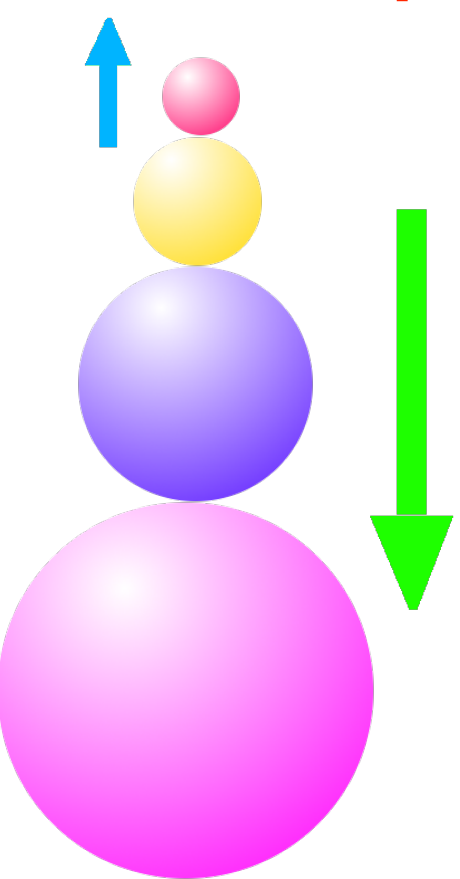


Soltamos o sistema de uma altura h

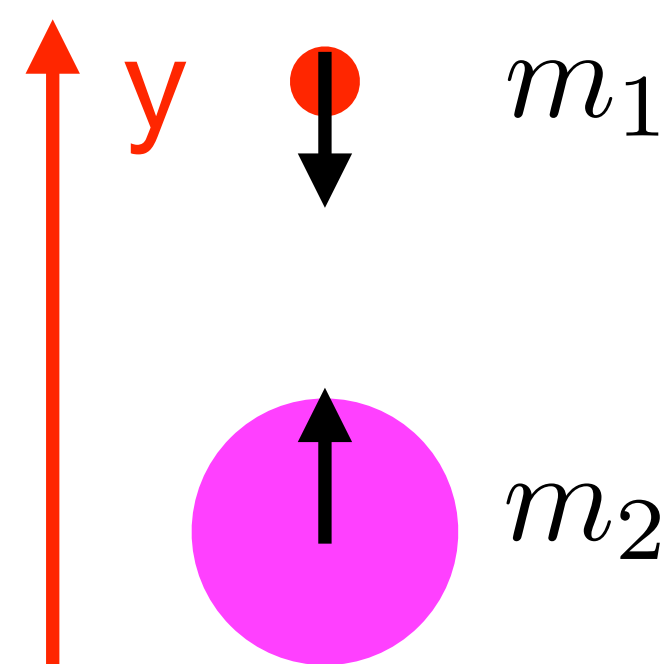
Pergunta: a bola menor subirá a uma altura igual, maior ou menor que h ?



Exemplo 1: canhão de Galileu



Simplificação: só 2 bolas e colisões elásticas



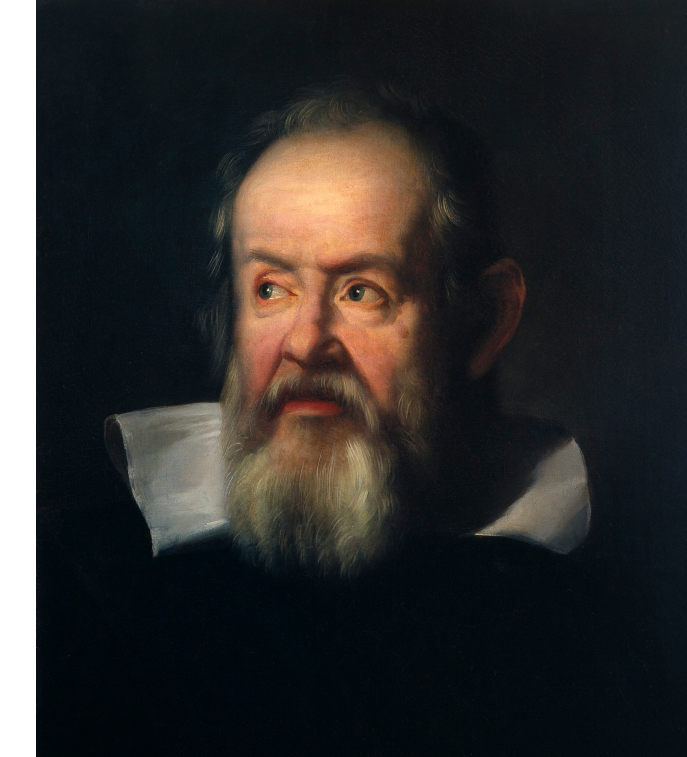
no referencial do solo

$$v_{1i} = -\sqrt{2gh} = -v_s \quad \text{e} \quad v_{2i} = v_s \quad \implies$$

$$v_{1f} \simeq -v_{1i} + 2v_{2i} = 3v_s$$

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_{2i}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v_{2i}$$



logo a bola pequena sobe a uma altura

$$h_{final} = \frac{v_{1f}^2}{2g} = 9h$$

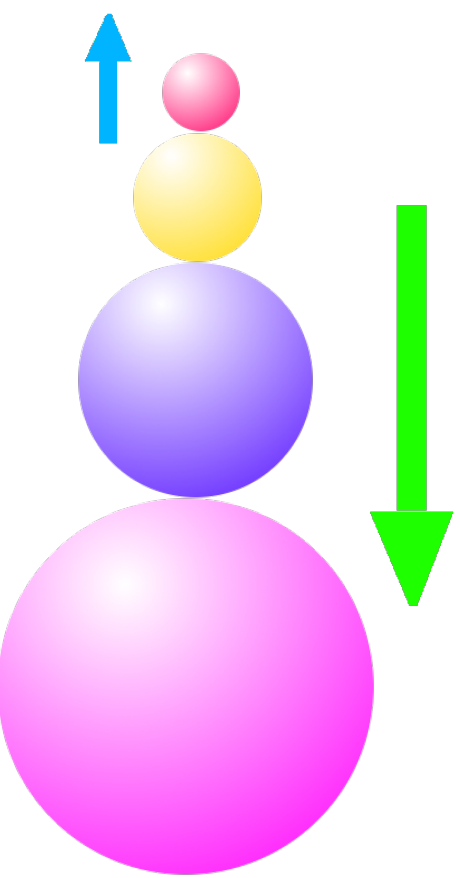
no referencial da bola maior (quase CM):

$$v'_{1i} = -2v_s \quad \implies \quad v'_{1i} \simeq 2v_s$$

de volta ao referencial do solo

$$v_{1i} = v'_{1i} + v_s \quad \implies \quad v_{1f} = 3v_s$$

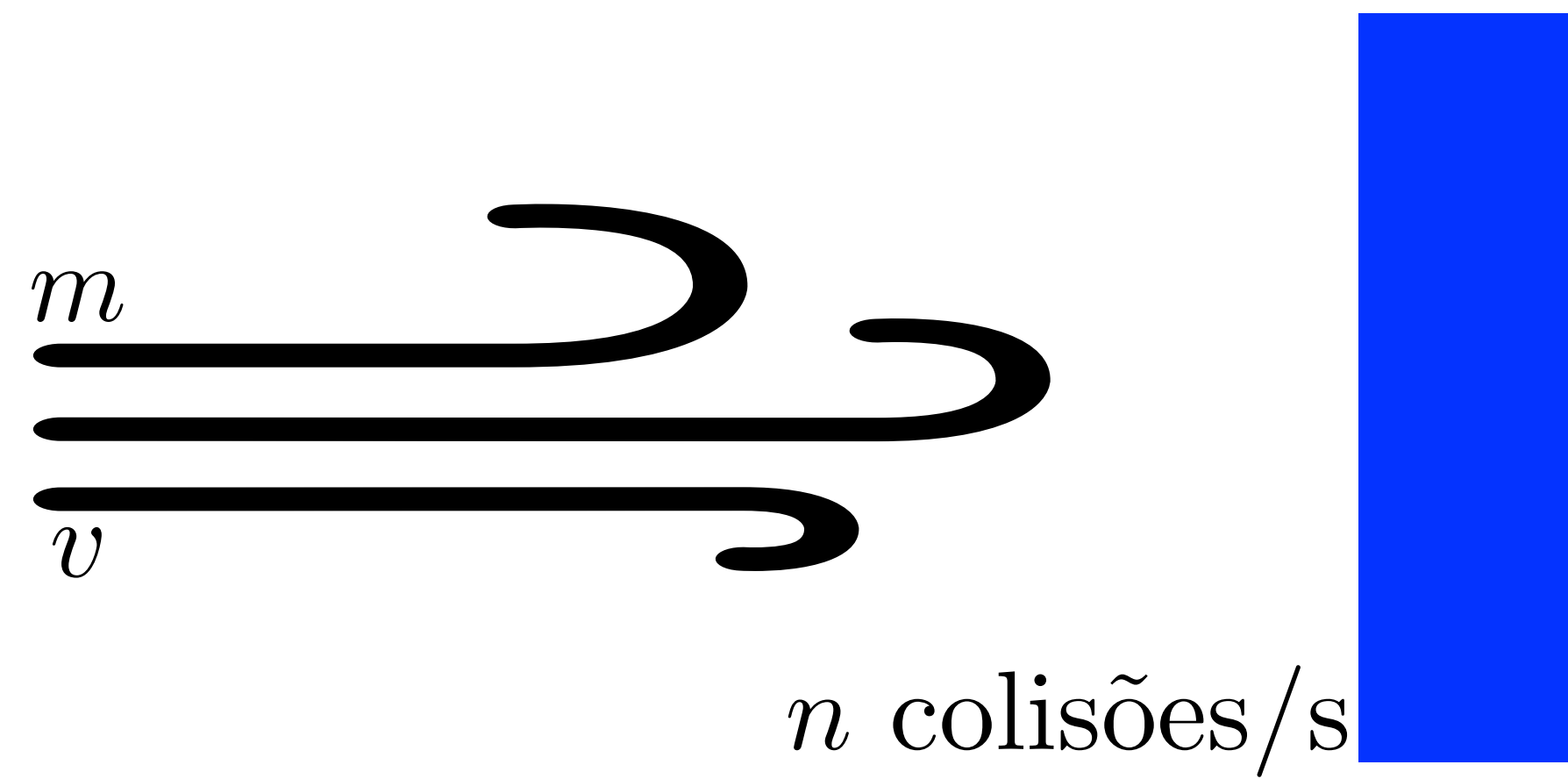
• Exemplo 1: canhão de Galileu



https://www.youtube.com/watch?v=2UHS883_P60

veja também <https://www.youtube.com/watch?v=X0y6CzopNCE>

Exemplo 2: jato de ar



- Para colisões elásticas cada partícula troca o sinal da velocidade e

$$\Delta p = 2mv$$

- A força sobre a parede é

$$\int_0^{\Delta t} dt F = 2m n v \Delta t$$
$$\bar{F} \Delta t = 2m n v \Delta t$$

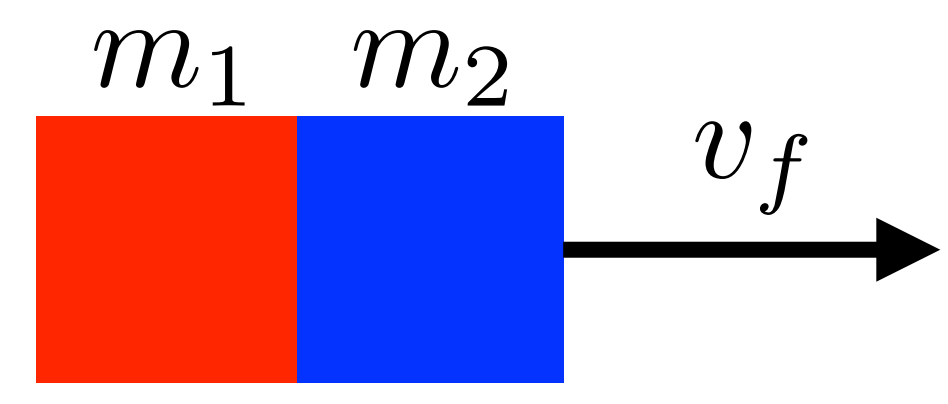


$$\bar{F} = 2m n v$$

Colisões inelásticas : $m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} = P_{CM}$



• Numa colisão totalmente inelástica os corpos movem-se juntos após o impacto



$$v_{1f} = v_{2f} = v_f$$

note que $P_{CM} = m_1 v_f + m_2 v_f = (m_1 + m_2) v_{CM} \implies v_f = v_{CM} = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}$

• No referencial do CM: $v'_{1f} = v'_{2f} = 0$

• Vimos que $T_S = \frac{1}{2} \sum_j m_j \vec{v}_j^2 = \cancel{T_{CM}} + \frac{1}{2} M \vec{v}_{CM}^2$ logo a energia cinética final é mínima

Exemplo: pêndulo balístico

- Após a colisão

$$v_f = \frac{m}{m + M} v$$

- Conservação de energia:

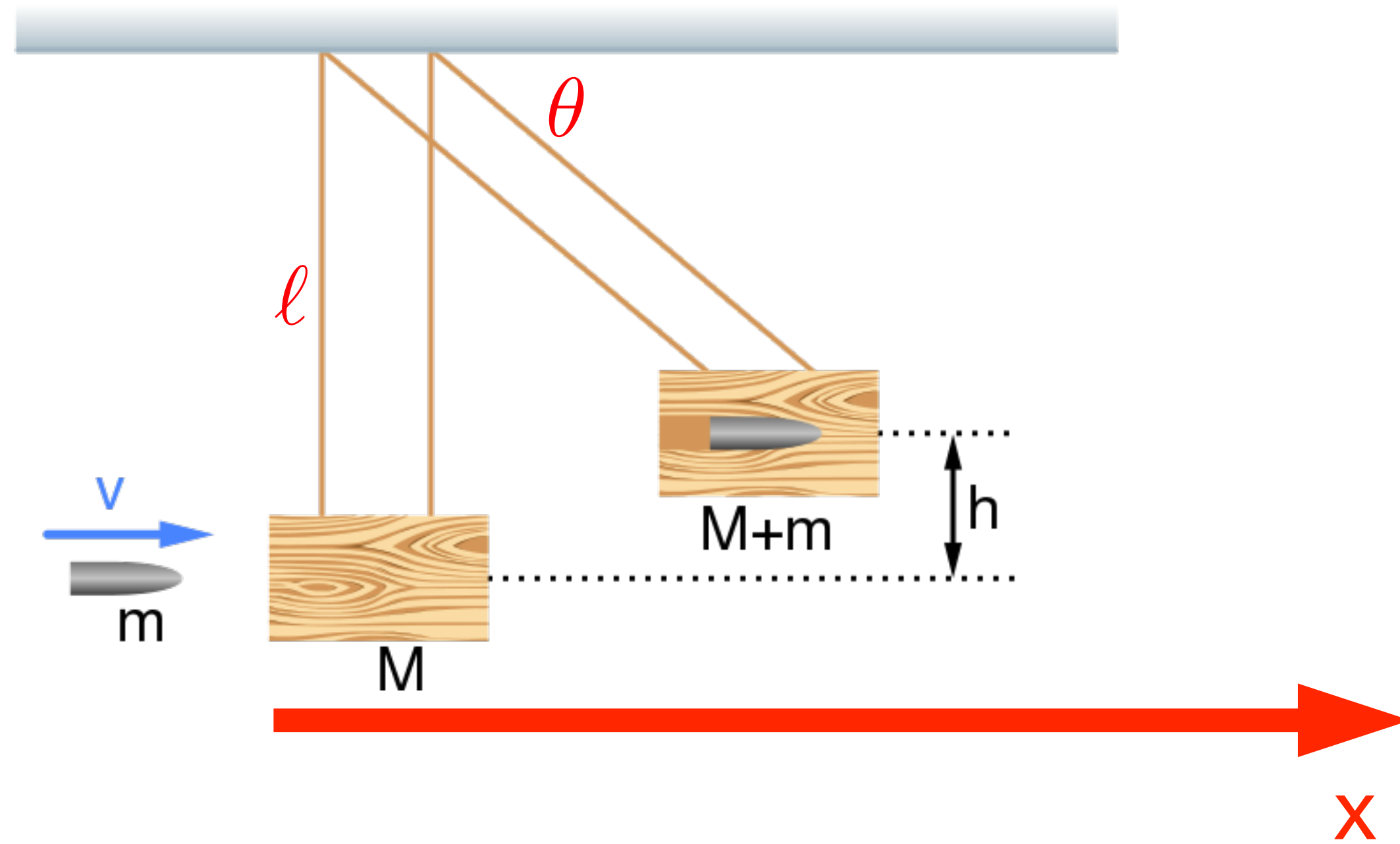
$$\frac{1}{2}(m + M)v_f^2 = (m + M)gh \implies v_f = \sqrt{2gh}$$

- Podemos determinar a velocidade de bala medindo a altura que o bloco sobe

$$v = \frac{m + M}{m} \sqrt{2gh}$$

- Para $m = 10 \text{ g}$, $M = 10 \text{ kg}$, $v = 200 \text{ m/s}$ $\implies h \simeq 2 \text{ mm}$

- Como medir a velocidade com precisão?



Referências

1. Moisés volume 1 capítulo 9