Dinâmica de muitos corpos

segunda aula

1. Coordenadas relativas
2. Conservação de momento linear
3. Sistemas de massa variável

Oscar Éboli **11 de maio de 2022**

Recapitulando:

- Centro de massa de um sistema:

posição de cada partícula

$$\vec{R} \equiv \frac{\sum_k m_k \vec{x}_k}{M}$$

massa total

$$M \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \sum_k \vec{F}_k^{ext} = \vec{F}_{total}^{ext}$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{1}{M} \left(\sum_k m_k \vec{v}_k \right) = \frac{1}{M} \sum_k \vec{p}_k$$

$$\vec{P}_{CM} \equiv M \vec{v}_{CM} = \sum_k \vec{p}_k$$

Referências:

Moyses cap. 8

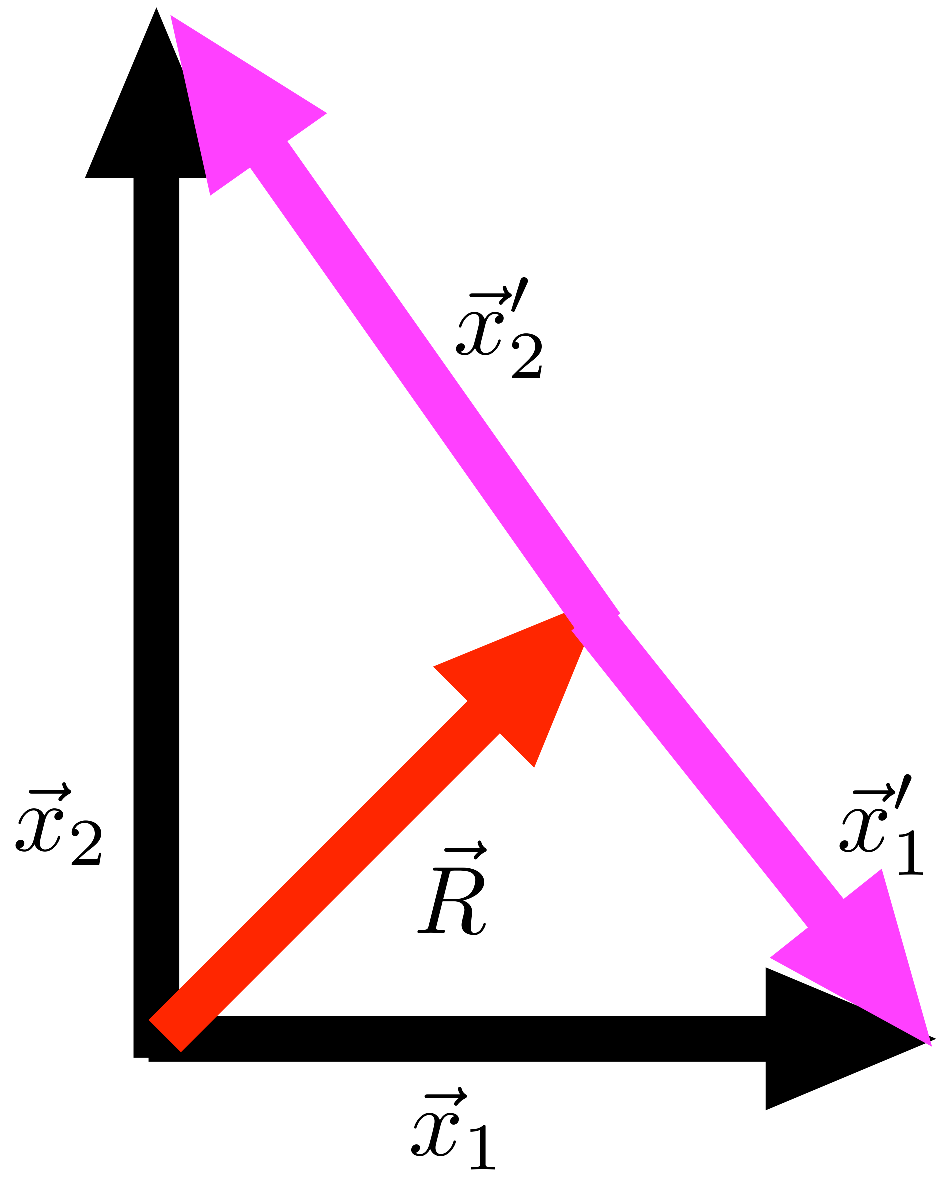
Alonso+Finn cap. 9

2. Coordenadas relativas

2.a Duas partículas

$$\vec{x}_1' \equiv \vec{x}_1 - \vec{R}$$
$$\vec{x}_2' \equiv \vec{x}_2 - \vec{R}$$

$$\vec{v}_1' = \vec{v}_1 - \vec{v}_{CM}$$
$$\vec{v}_2' = \vec{v}_2 - \vec{v}_{CM}$$



$$\vec{p}_1' = m_1 \vec{v}_1'$$
$$\vec{p}_2' = m_2 \vec{v}_2'$$

$$\vec{p}_1' + \vec{p}_2' = 0$$

No referencial do centro de massa

$$\vec{R}' = 0 \implies m_1 x_1' + m_2 \vec{x}_2' = 0 \implies \vec{x}_1' = -\frac{m_2}{m_1}\vec{x}_2'$$

e também $\vec{v}_1' = -\dfrac{m_2}{m_1}\vec{v}_2'$

Particular de 2 partículas: na ausência de forças externas

$$m_1 \frac{d^2\vec{x}_1}{dt^2} = \vec{F}_{12} \implies \frac{d^2\vec{x}_1}{dt^2} = \frac{1}{m_1}\vec{F}_{12}$$

$$m_2 \frac{d^2\vec{x}_2}{dt^2} = \vec{F}_{21} \implies \frac{d^2\vec{x}_2}{dt^2} = \frac{1}{m_2}\vec{F}_{21}$$

Subtraindo as duas equações temos

$$\frac{d^2}{dt^2}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = \frac{1}{m1}\vec{F}_{12} - \frac{1}{m_2}\vec{F}_{21} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{F}_{12}$$

Definimos a massa reduzida e a coordenada:

$$\frac{1}{\mu} \equiv \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \qquad \vec{r} \equiv \vec{x}_1 - \vec{x}_2 = \vec{x}\,'_1 - \vec{x}\,'_2$$

tal que $\mu\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{12}$ para $\vec{F}_{12}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)$ temos $\mu\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{12}(\vec{r})$

2.b N partículas:

Com respeito ao CM $\qquad \vec{x}'_j = \vec{x}_j - \vec{R} \implies \vec{v}'_j = \vec{v}_j - \vec{v}_{CM}$

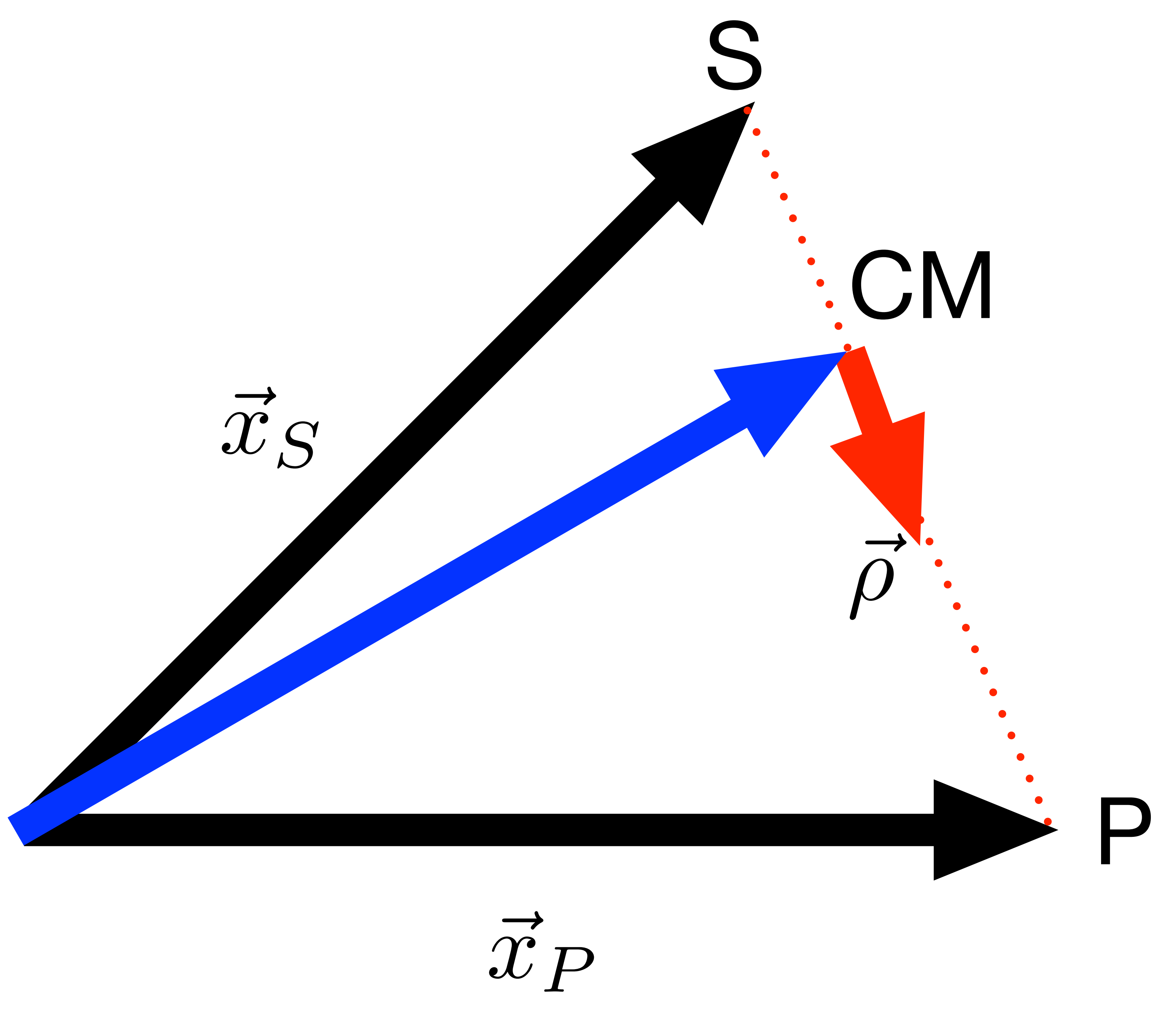
$$\vec{p}'_j = m_j \vec{v}'_j$$

$$\begin{aligned}\sum_j \vec{p}'_j &= \sum_j m_j(\vec{v}_j - \vec{v}_{CM}) \\ &= \sum_j \vec{p}_j - M\vec{v}_{CM} \\ &= \sum_j \vec{p}_j - \sum_j \vec{p}_j = 0\end{aligned}$$

Logo, o momento total é nulo com respeito ao referencial do CM

2.c Exemplo: exoplanetas

A força gravitacional em um planeta devida a seu sol é



$$\vec{F}_{grav} = -G_N \frac{m_P M_S}{|\vec{x}_P - \vec{x}_S|^2} \ \vec{\rho}$$

Usando $\mu \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{12}(\vec{r})$ e coordenadas polares no referencial do centro de massa

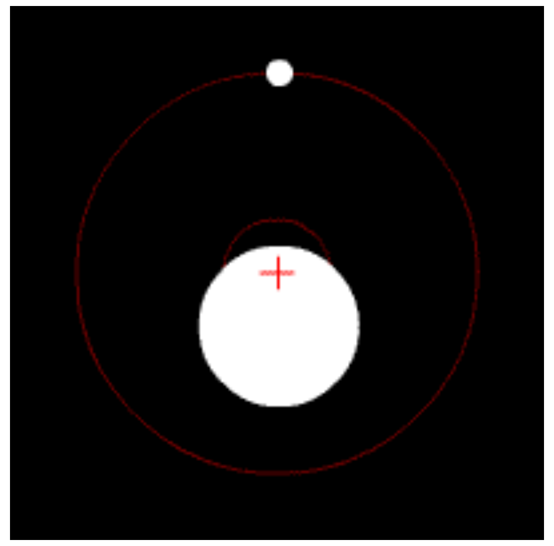
procuramos uma solução que é um círculo, a equação de movimento é

$$\mu r \dot{\theta}^2 = \frac{G_N m_P M_S}{r^2} \implies \dot{\theta} = \sqrt{\frac{G_N m_P M_S}{\mu r^3}}$$

até aqui tudo é exato.

$$\vec{r} = \vec{x}_P - \vec{x}_S \quad \text{e que} \quad m_S\vec{x}_S + m_P\vec{x}_P = 0 \quad \text{temos} \quad \vec{x}_S = \frac{m_P}{m_S - m_P}\vec{r}$$

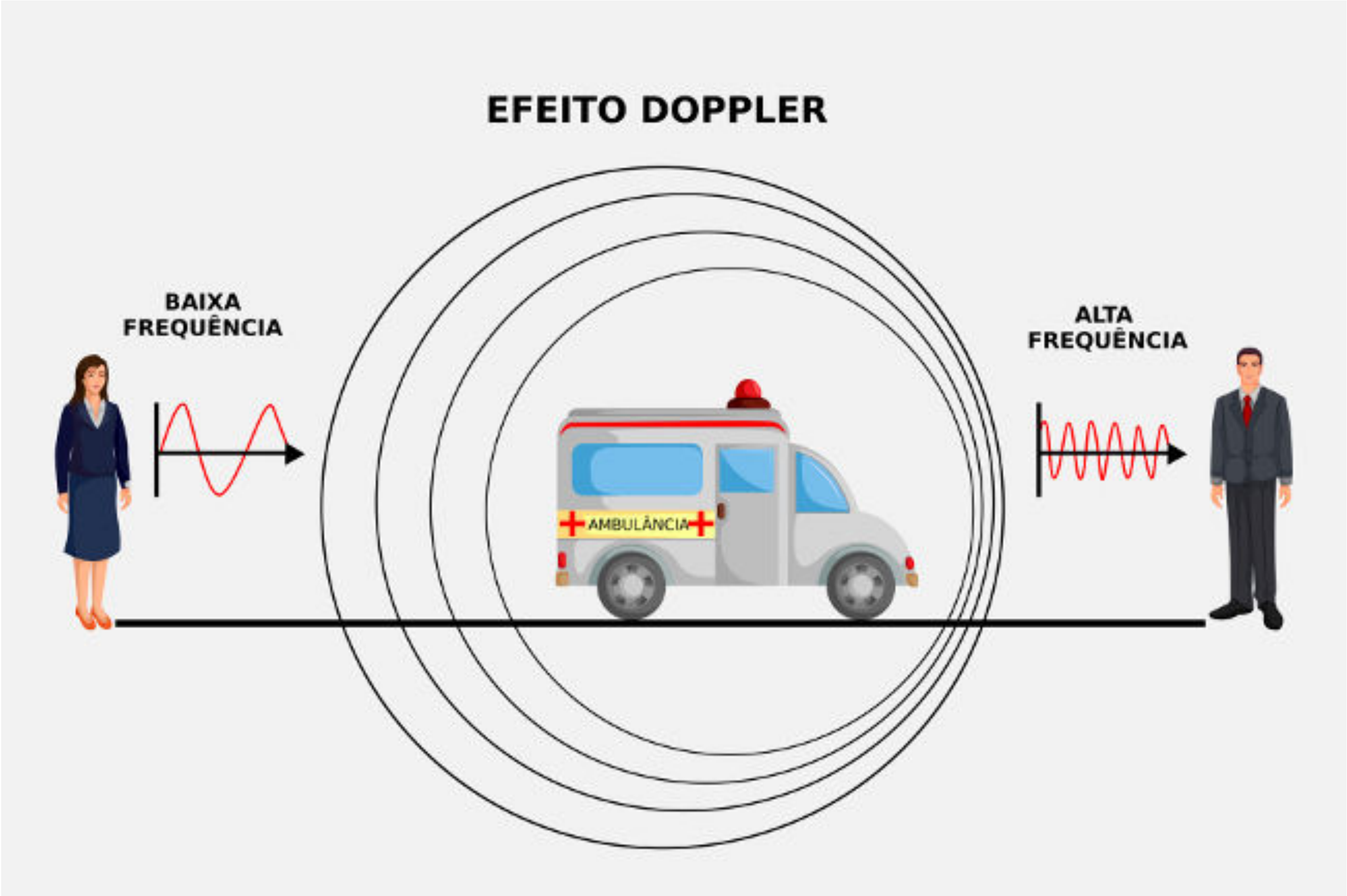
Então o sol descreve uma trajetória circular em torno do centro de massa



Para um observador estacionário o Sol possui uma velocidade radial que depende do tempo senoidalmente!

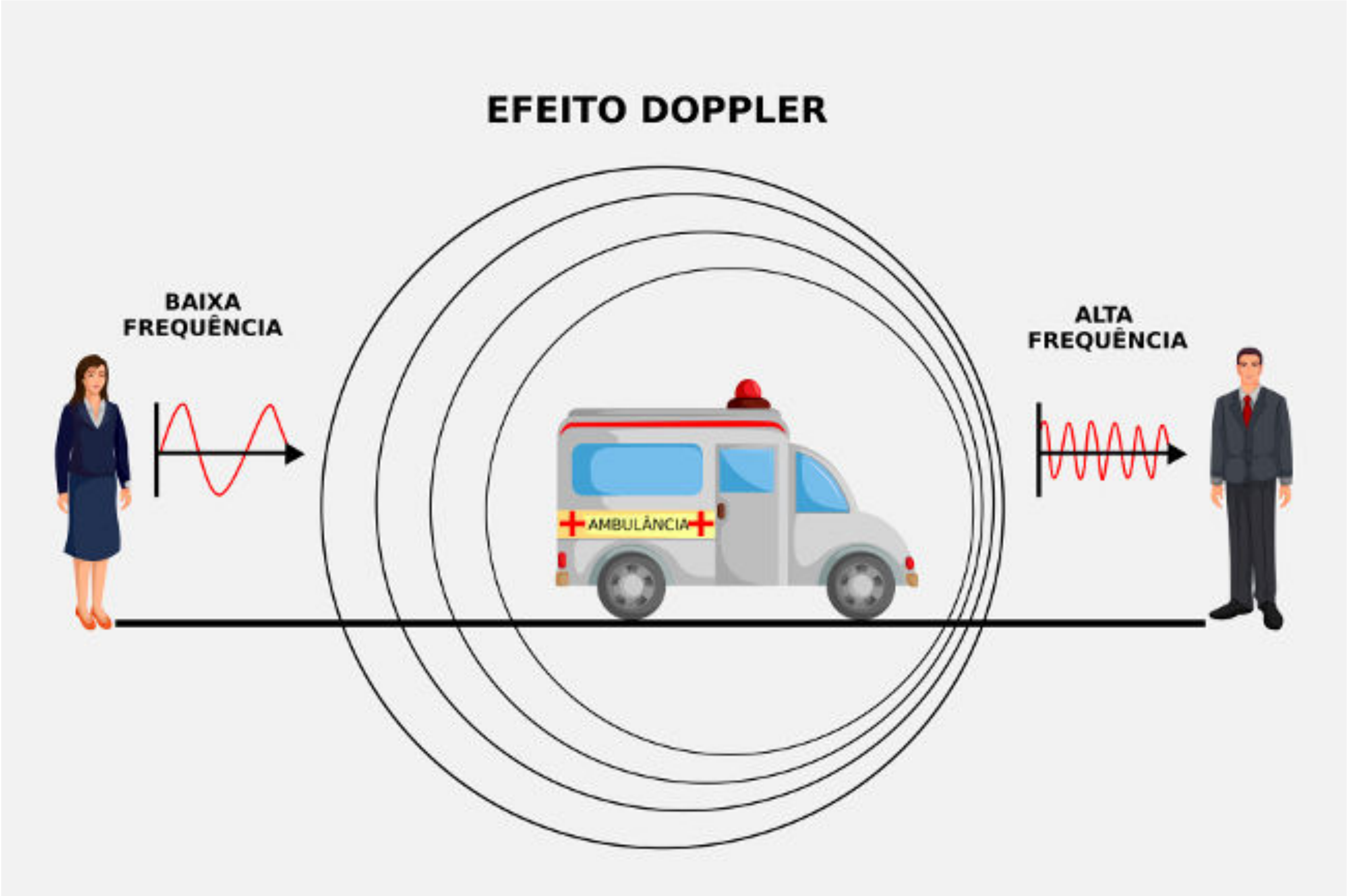
Como aproveitamos isso?

Com o efeito doppler!



https://www.youtube.com/watch?v=qiq9OGAdUA8&feature=youtu.be

Com o efeito doppler!

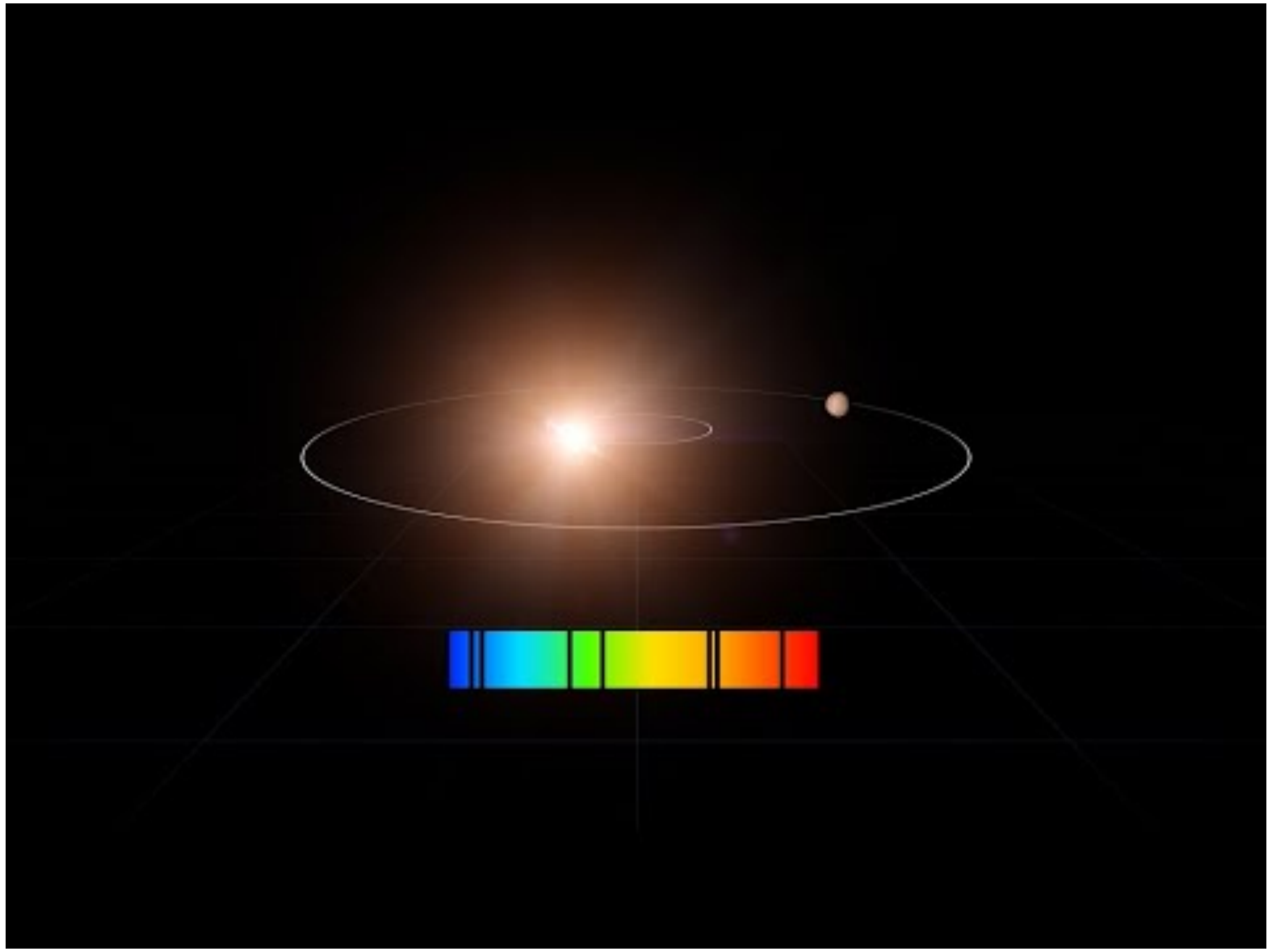


Para a luz: quando a fonte se aproxima luz muda na direção do azul

quando a fonte se afasta a luz desvia para o vermelho

Para a luz: quando a fonte se aproxima luz muda na direção do azul

quando a fonte se afasta a luz desvia para o vermelho



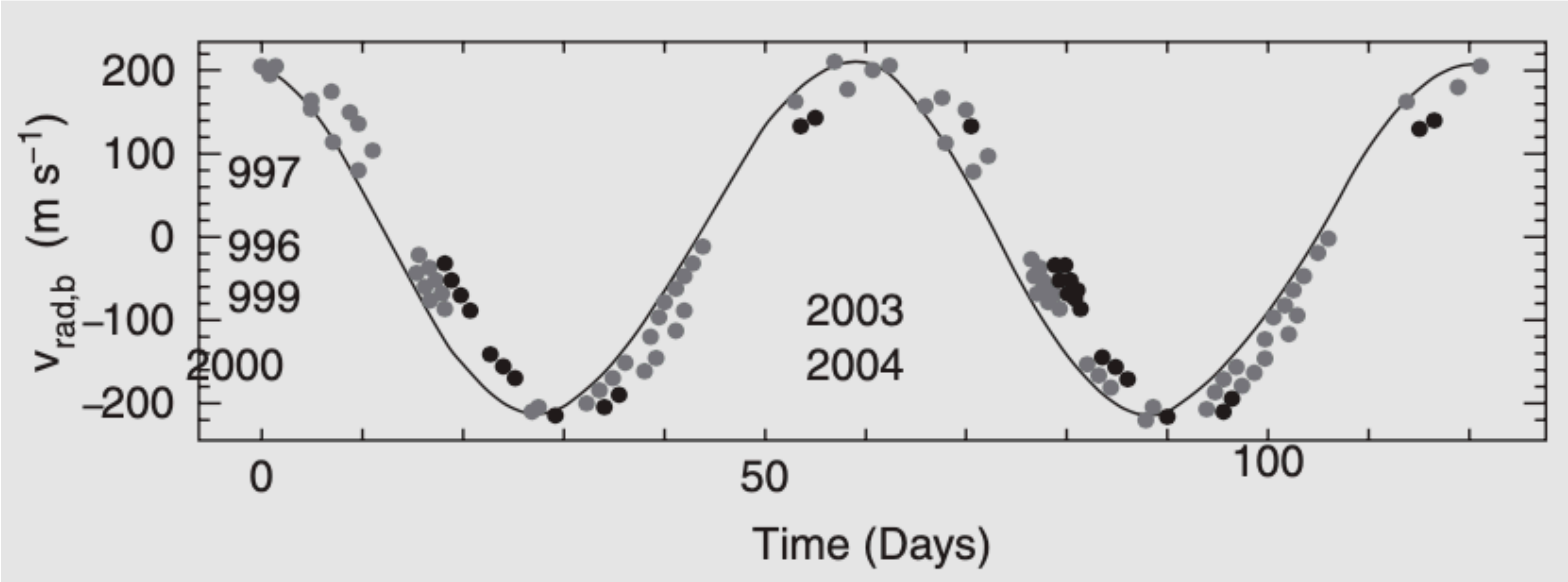
https://www.youtube.com/watch?v=9NaFu-wou8I

Por exemplo para a estrela Gliese 876 a 15,3 anos luz da terra

$R_{Gliese876} \simeq 2,5 \times 10^5$ km

$M_{Gliese876} \simeq 0,5 M_{Sol}$

$D_{Gliese-Sol} \simeq 1,4 \times 10^{15}$ km



A velocidade da estrela com respeito ao CM é

$$v_S = \dot{\theta} r_S = \sqrt{\frac{G_N M_S r_S^2}{r_P^3}} = \sqrt{\frac{G_N m_P^2}{M_S r_P}}$$

onde usamos que $\quad \dot{\theta} \simeq \sqrt{\frac{G_N M_S}{r_P^3}} \quad$ e $\quad r_S = \frac{M_S}{m_P} r_P$

2.d Energia cinética em diferentes referenciais

- Consideremos um referencial S e o CMR

$$
\begin{aligned}
T_S &= \frac{1}{2}\sum_j m_j \vec{v}_j^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_j m_j (\vec{v}_j' + \vec{v}_{CM}) \cdot (\vec{v}_j' + \vec{v}_{CM}) \\
&= \frac{1}{2}\sum_j m_j \left[\vec{v}_j'^{\,2} + \vec{v}_{CM}^2 + 2\vec{v}_j' \cdot \vec{v}_{CM}\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum_j m_j \vec{v}_j'^{\,2} + \frac{1}{2}(\sum_j m_j)\vec{v}_{CM}^2 + (\sum_j m_j \vec{v}_j') \cdot \vec{v}_{CM} \\
&= \frac{1}{2}\sum_j m_j \vec{v}_j'^{\,2} + \frac{1}{2} M \vec{v}_{CM}^2 \\
&= T_{CM} + \frac{1}{2} M \vec{v}_{CM}^2
\end{aligned}
$$

Lembre-se do vídeo da raquete!

3. Conservação de momento linear

Em um sistema, cuja força externa total é nula, o momento linear total é conservado!

$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{F}^{ext}_{total} = 0$$

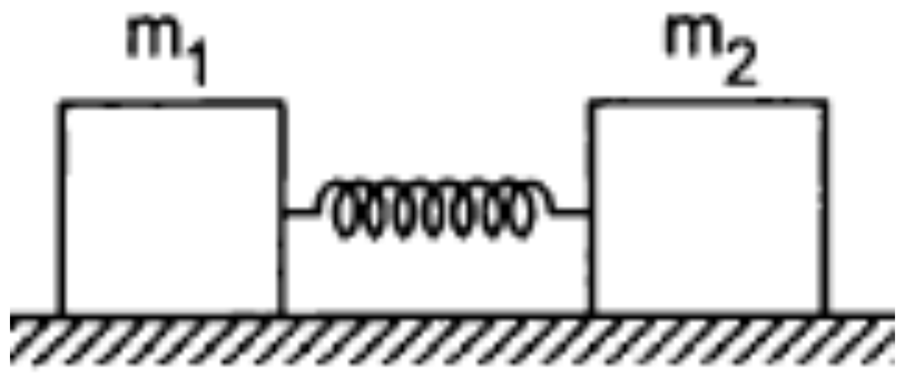
$$\frac{d}{dt}\left(M\frac{d\vec{R}}{dt}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(M\vec{v}_{CM}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{P}_{CM}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_j \vec{p}_j\right) = 0$$

Exemplo 1: massas unidas por mola



- Soltamos o sistema do repouso com a a mola comprimida
- CM inicialmente parado em relação ao plano
- Consideremos que o atrito é nulo
- CM não se move pois a força externa resultante é zero
- CMR coincide com o referencial do plano

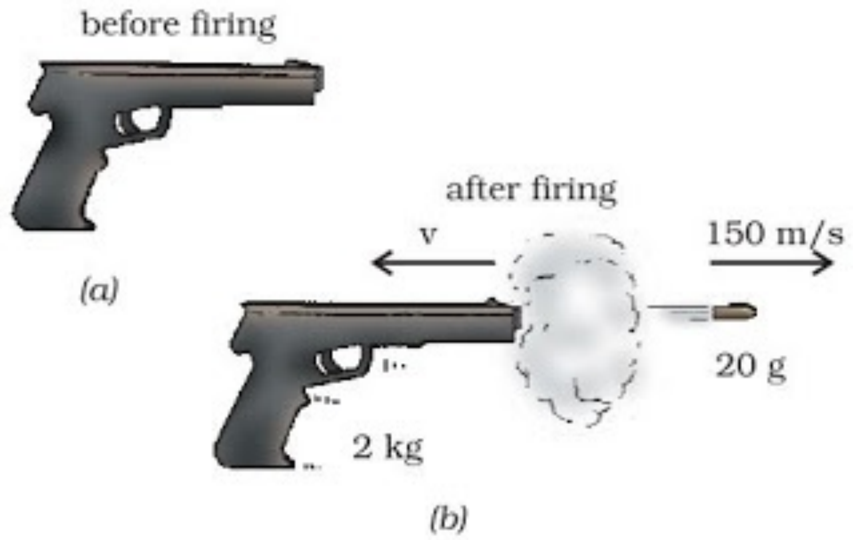
$$\vec{v}_1' = -\frac{m_2}{m_1}\vec{v}_2'$$

mesma razão

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1 {v_1'}^2 = \frac{1}{2}\,\frac{m_2^2}{m_1}{v_2'}^2 = \frac{m_2}{m_1}T_2$$

Pro lar: em que direção o sistema anda se há atrito?

Exemplo 2: recuo de arma de fogo



Recoil of a pistol

CM inicialmente parado com respeito ao solo. Novamente

$$\vec{v}_1' = -\frac{m_2}{m_1}\vec{v}_2'$$

que leva a $v_{pistola} = 1,5\ \mathrm{m/s} = 5,4\ \mathrm{km/h}$

Para um AK47: $m_{bala} = 7,9\ \mathrm{g} \quad m_{AK47} = 3.5\ \mathrm{kg} \quad v_{bala} = 715\ \mathrm{m/s}$

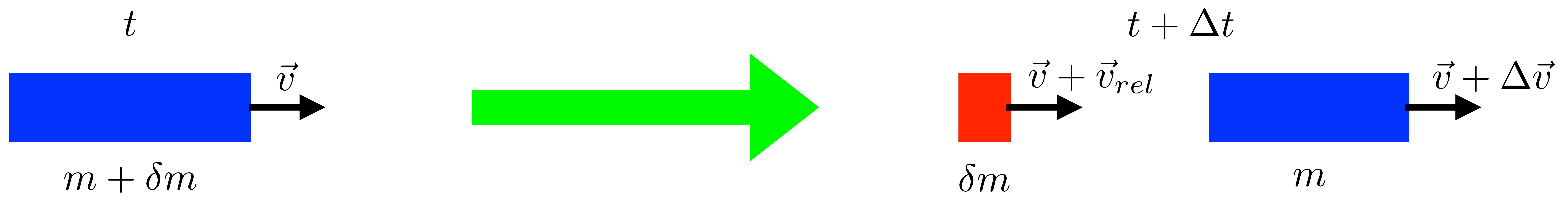
$v_{AK47} = 1,6\ \mathrm{m/s} = 5,8\ \mathrm{km/h}$

https://www.youtube.com/watch?v=mqHKVMrlNZM

https://www.youtube.com/watch?v=EL13quhcUMw

4. Sistemas de massa variável:

1: Ejetando material



velocidade relativa do ejetado em respeito ao sistema $\vec{v}_{rel}$

•conservação de momento $(m + \delta m)\vec{v} = m(\vec{v} + \Delta\vec{v}) + \delta m(\vec{v} + \vec{v}_{rel})$

$$m\Delta\vec{v} + \delta m \vec{v}_{rel} = 0$$

•para o sistema $M(t) = m + \delta m \text{ e } M(t + \Delta t) = m \implies \Delta M = -\delta m$

•logo

$$M\Delta\vec{v} = \Delta M \vec{v}_{rel}$$

dividindo por Δt e no limite $\Delta t \to 0$

$$\boxed{M\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dM}{dt}\,\vec{v}_{rel}}$$

Foguete na ausência de gravidade:

$$M\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dM}{dt}\ \vec{v}_{rel} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{M}\ \frac{dM}{dt}\ \vec{v}_{rel}$$

integrando no tempo do instante inicial ao final: $[\vec{v}_{rel}\ \text{constante}]$

$$\int_{t_i}^{t_f} dt\ \frac{d\vec{v}}{dt} = \int_{t_i}^{t_f} dt\ \frac{1}{M}\ \frac{dM}{dt}\ \vec{v}_{rel}$$

$$\vec{v}|_{\vec{v}_i}^{\vec{v}_f} = \ln(M)|_{t_i}^{t_f}\ \ \vec{v}_{rel}$$

$$\boxed{\vec{v}_f - \vec{v}_i = \vec{v}_{rel}\ \ln\left(\frac{M_f}{M_i}\right)}$$

- Variação de velocidade depende só da razão das massas inicial e final

Aplicação:

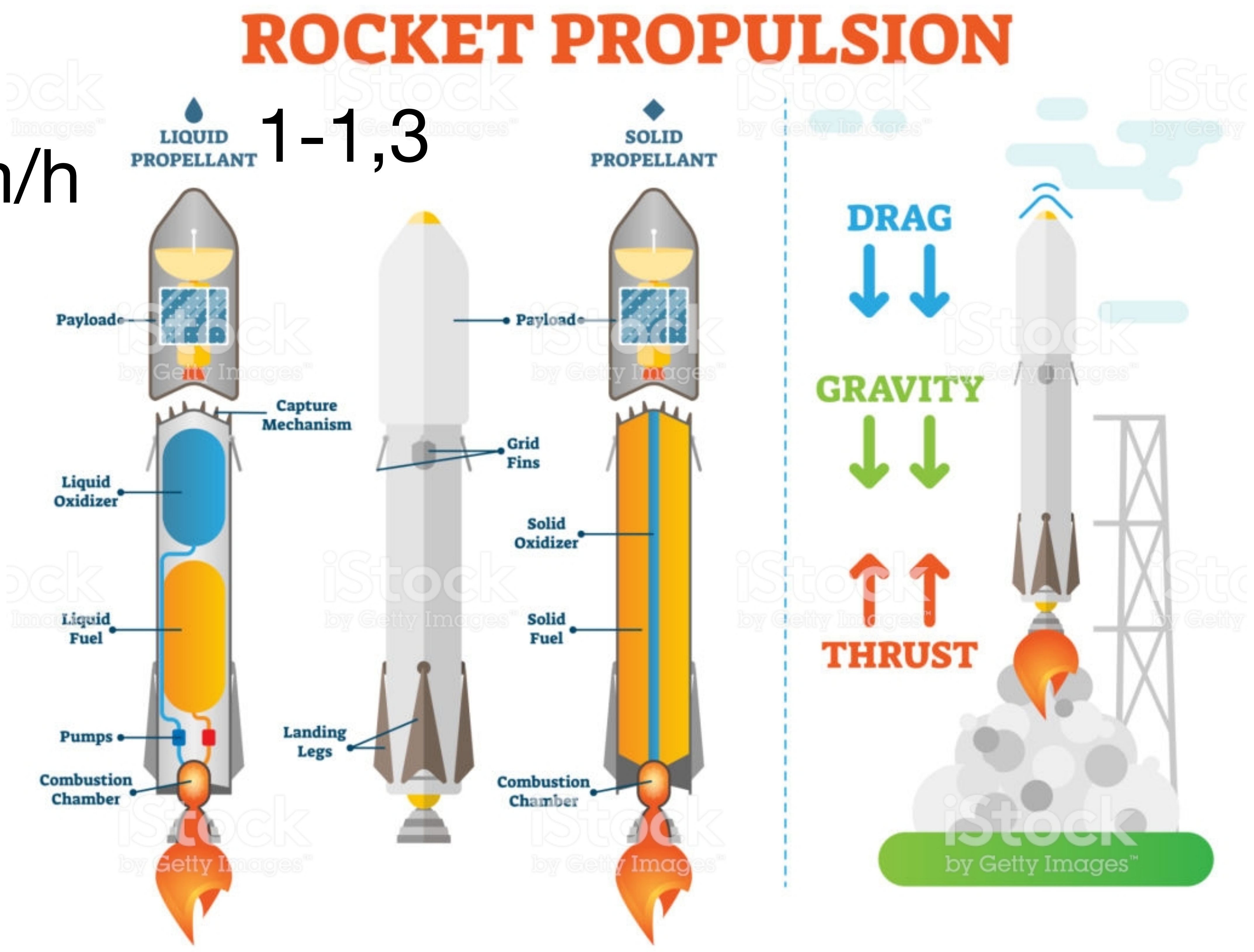
- Note que $v_{rel} = |\vec{v}_{rel}|$ é da ordem de 10000 km/h

- A velocidade de escape da terra é 40300 km/h

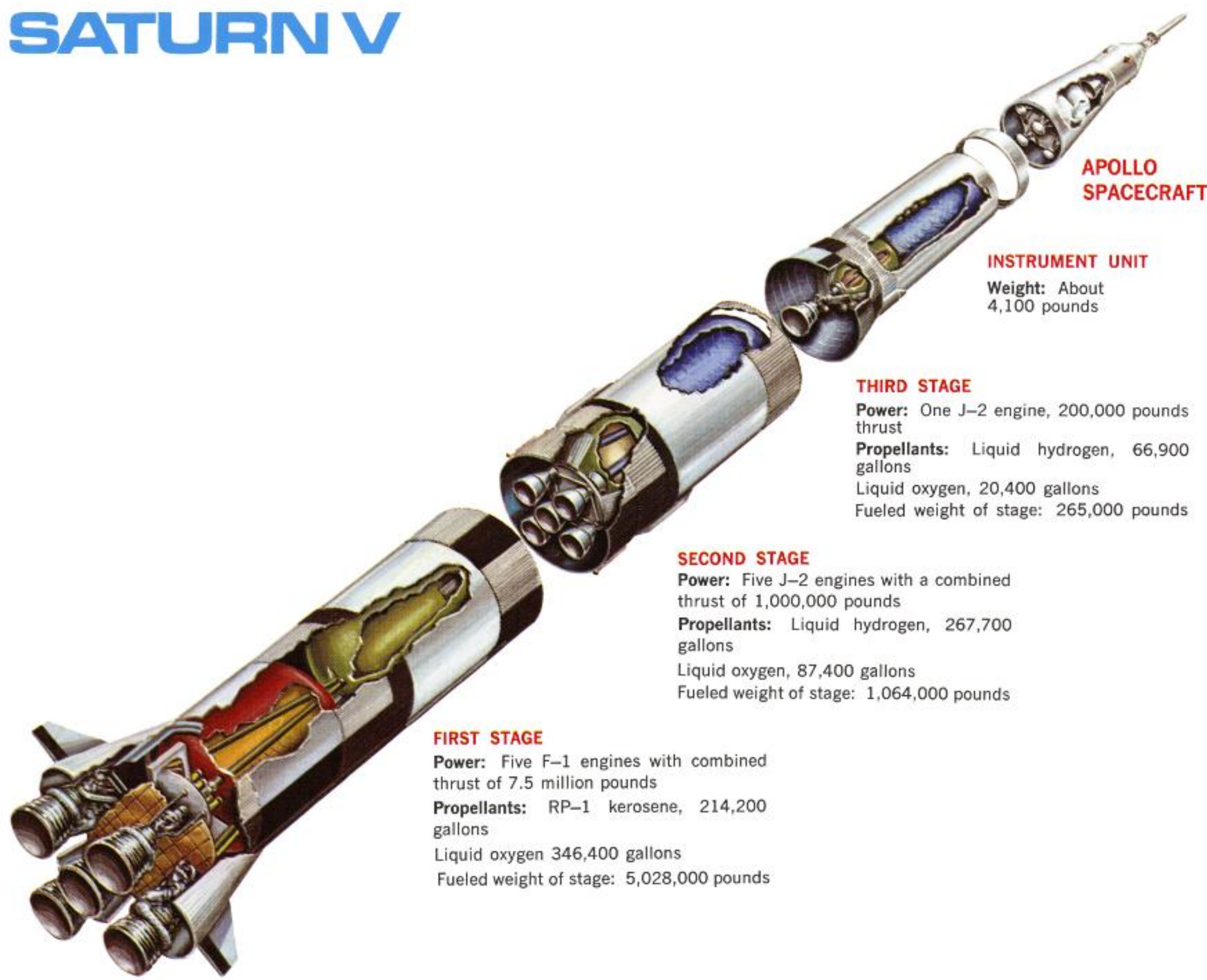
$\Delta v / v_{rel}$	M_i / M_f
1	$e \simeq 2,7$
2	$e^2 \simeq 7,4$
3	$e^3 \simeq 20$

- É infactível ir-se a Lua com um único estágio!

1-1,3



•Para os foguetes Saturno V: dM/dt da ordem de 12,5 ton/s



Componente	Massa, Kg (vazio)	Massa de combustível (Kg)	Massa total (Kg)	Tempo de ignição (s)	Empuxo (Kgf)	Função
1.º estágio	140.000	2.000.000 (querosene + O_2 líquido)	2.140.000	140	3.400.000	De 0 até 8.000 Km/h a 65 Km de altitude
2.º estágio	36.000	420.000 (H_2 líquido + O_2 líquido)	456.000	370	450.000	De 8.000 a 24.000 Km/h a 180 Km de altitude
3.º estágio	10.000	105.000 (H_2 líquido + O_2 líquido)	115.000	475	90.000	Injeção em órbita lunar a 40.000 Km/h.
Apolo (módulo lunar, módulo de comando e módulo de serviço)	12.000	11.000 (combustíveis líquidos e sólidos)	23.000		10.000	Missões lunares; retorno à Terra

Moyses capítulo 8

Referências

1. Moysés volume 1 capítulo 8

2. Alonso e Finn volume 1, capítulo 9

3. Kleppner e Kolenkow capítulo 4