**Material de apoio para trabalho com números complexos em disciplinas relacionadas a Circuitos Elétricos do Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétricas – PEA da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo – EPUSP.**

**Autores:** José Enrique Eirez Izquierdo (bolsista PaP); Milana Lima dos Santos; Renato Machado Monaro; Carlos Eduardo de Morais Pereira; Carlos Frederico Meschini Almeida e Eduardo Lorenzetti Pellini.

A introdução de grandezas, como corrente e tensão, na forma de fasores facilita a análise e compreensão de circuitos de *ca* em regime permanente. Porém, o trabalho com números complexos que isto implica, apresenta novos desafios aos estudantes. O conhecimento de como representar e operar números complexos e o uso de calculadoras cientificas, possibilita e agiliza as operações e cálculos.

**Objetivo:** O objetivo deste material é relembrar e resumir as representações e operações com números complexos que serão usadas nas disciplinas de circuitos elétricos em corrente alternada (*ca*).

Texto extraído da Guia do Usuário da ***hp 49g+* *Scientific Calculator***

Capítulo 4

Cálculos com números complexos

Este capítulo mostra os exemplos de cálculos e aplicações das funções para os números complexos.

Definições

Um número complexo ***z*** é escrito como ***z = x + i y***, onde ***x*** e ***y*** são números reais e ***i*** é a unidade imaginária definida por ***i*2 = -1**. O número complexo ***x + i y*** tem uma parte real, ***x = Re (z)***, e uma parte imaginária, ***y = Im (z)***.

Podemos imaginar um número complexo como um ponto ***P (x, y)*** no plano x-y com o eixo x mencionado como eixos reais e o eixo y como os eixos imaginários. Assim, um número complexo representando na forma ***x + i y*** é considerado como sua **representação cartesiana**. Uma representação cartesiana alternativa é o par ordenado ***z = (x, y)***.

Um número complexo pode ser também representado nas coordenadas polares (**representação polar**) como ***z = r e iθ = r cos θ + i r sin θ***, onde ***r = |z| = sqrt (x*2 *+ y*2*)*** é a magnitude do número complexo ***z***, e ***θ = Arg (z) = arctan (y/x)*** é o argumento do número complexo ***z***. A relação entre a representação cartesiana e polar dos números complexos é dada pela fórmula de *Euler*: ***e iθ = cos θ + i sin θ***.

O conjugado complexo de um número complexo ***z = x + i y = r e iθ, é z = x - i y = r e -iθ***. O conjugado complexo de ***i*** pode ser visto como a reflexão de ***z*** sobre o eixo real (x). De forma similar, o negativo de ***z = x + i y = r e iθ***, ***-z = -x - i y = - r e iθ*** pode ser visto como a reflexão de ***z*** sobre a origem.

**Exemplos de operações simples com números complexos:**

**Observação:** No caso específico de disciplinas relacionadas com Circuitos Elétricos é interessante substituir a unidade imaginária ***i*** pela letra ***j***. Isto pode evitar confusões já que as correntes que variam no tempo são classificadas também com a letra ***“i”*** minúscula. Isto não modifica as informações fornecidas anteriormente neste documento em relação à representação dos números complexos.

**Soma:**

São **somadas** as partes reais e imaginárias dos dois números complexos. A forma mais conveniente de realizar a operação é expressando o números na **forma cartesiana**.

Operação: (*a +* ***j*** *b*) **+** (*c +* ***j*** *d*) = (*a* **+** *c*) *+* ***j*** (*b* **+** *d*)

Exemplo S1: (1 *+* ***j*** 2) **+** (3 *+* ***j*** 4) = (1**+**3) *+* ***j*** (2**+**4) = 4 *+* ***j*** 6

Exemplo S2: (-1 *-* ***j*** 2) **+** (3 *+* ***j*** 4) = (-1**+**3) *+* ***j*** (-2**+**4) = 2 *+* ***j*** 2

**Subtração:**

São **subtraídas** as partes reais e imaginárias dos dois números complexos. A forma mais conveniente de realizar a operação é expressando o números na **forma cartesiana**.

Operação: (*a +* ***j*** *b*) **-** (*c +* ***j*** *d*) = (*a* **-** *c*) + ***j*** (*b* **-** *d*)

Exemplo Su1: (1 *+* ***j*** 2) **-** (3 *+* ***j*** 4) = (1**-**3) + ***j*** (2**-**4) = -2 *-* ***j*** 2

Exemplo Su2: (1 *+* ***j*** 2) **-** (3 *-* ***j*** 4) = (1**-**3) + ***j*** (2**-**(-4)) = -2 *+* ***j*** 6

**Multiplicação:**

São **multiplicados** os dos dois números complexos aplicando a propriedade distributiva. A forma mais conveniente de realizar a operação é expressando o números na **forma polar**.

Operação (forma cartesiana): (*a +* ***j*** *b*) **×** (*c +* ***j*** *d*)

= (*a* **×** *c*) + (*a* **×*****j*** *d*) + (***j*** *b* **×** *c*) + (***j*** *b* **×*****j*** *d*)

= (*a* **×** *c*) + ***j*** [(*a* **×** *d*) + (*b* **×** *c*)] + ***j* 2**(*b* **×** *d*)

= [(*a* **×** *c*) -(*b* **×** *d*)] + ***j*** [(*a* **×** *d*) + (*b* **×** *c*)]

Exemplo M1 (forma cartesiana): (1 *+* ***j*** 2) **×** (3 *+* ***j*** 4)

= (1**×**3 - 2**×**4) + ***j*** (1**×**4 + 2**×**3)

= -5 *+* ***j*** 10 (Trabalhoso)

**Operação (forma polar):** *r*1 ∠*θ*1 **×** *r*2 ∠*θ*2

= (*r*1 **×** *r*2) ∠(*θ*1 + *θ*2)

**Exemplo D1 (forma polar):** 1 ∠10° **×** 2 ∠20°

= (1 **×** 2) ∠(10° + 20°)

= 2 ∠30° (Bem melhor)

**Divisão:**

O número complexo, tanto do numerador quanto do denominador da **divisão**, é multiplicado pelo conjugado do denominador. A forma mais conveniente de realizar a operação é expressando o números na **forma polar**.

Operação (forma cartesiana): [(*a +* ***j*** *b*) **/** (*c +* ***j*** *d*)] × [(*c -* ***j*** *d*) **/**(*c -* ***j*** *d*)]

= [(*a +* ***j*** *b*) × (*c -* ***j*** *d*)] **/** [(*c +* ***j*** *d*) ×(*c -* ***j*** *d*)]

= {[(*a* × *c*) +(*b* × *d*)] + ***j*** [(*a* × *-d*) + (*b* × *c*)]} **/** {[(*c* × *c*) +(*d* × *d*)] + ***j*** [(*c* × *-d*) + (*d* × *c*)]}

= {[(*a* × *c*) +(*b* × *d*)] + ***j*** [(*a* × *-d*) + (*b* × *c*)]} **/** {[*c* 2 +*d* 2] + ***j*** [*-cd* + *dc*]}

= {[(*a* × *c*) +(*b* × *d*)] + ***j*** [(*a* × *-d*) + (*b* × *c*)]} **/** {*c* 2 +*d* 2}

Exemplo D1: (1 *+* ***j*** 2) **/** (3 *+* ***j*** 4)

= [(1 *+* ***j*** 2) **/** (3 *+* ***j*** 4)] × [(3 *-* ***j*** 4) **/** (3 *-* ***j*** 4)]

= [(1 *+* ***j*** 2) × (3 *-* ***j*** 4)] **/** [(3 *+* ***j*** 4) × (3 *-* ***j*** 4)]

= [(1×3 + 2×4) + ***j*** (1× *-*4 + 2×3)] **/** [(3 × 3 *+* 4 × 4) + ***j*** (-12 *+* 12)]

= [11 + ***j*** 2] **/** [25] = 11/25 + ***j*** 2/25 (Bem trabalhoso)

**Operação (forma polar):** *r*1 ∠*θ*1 **/** *r*2 ∠*θ*2

= (*r*1 **/** *r*2) ∠ (*θ*1 - *θ*2)

**Exemplo D1 (forma polar):** 1 ∠10° **/** 2 ∠20°

= (1 **/** 2) ∠(10° - 20°)

= 0,5 ∠-10° (Bem melhor)

**Convertendo o número complexo da forma:**

**Cartesiana à Polar:** *a +* ***j*** *b* → *r* ∠*θ*: *r = √* (*a*2 + *b*2); *θ =* tan-1(*b/a*)

Exemplo: 1 + ***j*** 1 = *√* (12 + 12) ∠tan-1(1/1) = *√* 2 ∠tan-11 = 1,41 ∠45°

**Polar à Cartesiana:** *r* ∠*θ* → *a +* ***j*** *b*: *a* = *r* cos *θ*; *b* = *r* sin *θ*

Exemplo: 25 ∠90° = 25 cos 90° + ***j*** 25 sem 90° = 25 cos 90° + ***j*** 25 sem 90°

= 25 × 0 + ***j*** 25 × 1 = ***j*** 25

**Conclusões:**

* Apresentaram-se a forma cartesiana e polar para representação de números complexos;
* Apresentaram-se, explicaram-se e exemplificaram-se as operações básicas (soma, subtração, multiplicação e divisão) com números complexos;
* Demonstrou-se a conveniência de utilizar a representação na forma cartesiana nas operações de soma e subtração e a forma polar nas de multiplicação e divisão;
* Apresentou-se, explicou-se e exemplificou-se o método para converter um número complexo da forma cartesiana à polar e vice-versa;

**Propostas futuras:**

Em próximos materiais serão abordados todas estes aspectos (representação, operações e transformações de números complexos) utilizando vários modelos de calculadoras científicas. Além disso serão analisados e explicados exemplos envolvendo circuitos simples para ir desenvolvendo habilidades nos estudantes.