Exercício (Classe)

Considere agora o oscilador harmônico amortecido $\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = F(t)$ onde $F(t) = F_0$. Dado que $x(0) = x_0$ e $v(0) = 0$, encontre $x(t)$.

Conforme discutimos anteriormente

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t),$$

onde $x_h(t) = e^{-\gamma t/2}\left[A' \cos \omega_1 t + B' \operatorname{sen} \omega_1 t\right]$

e $x_p(t) = \dfrac{F_0}{m\omega_1} \displaystyle\int_0^t e^{-\gamma(t-t')} \operatorname{sen}\left[\omega_1 (t-t')\right] dt'$

$$= \frac{F_0}{4\omega_0^2 m}\left[4\left(1 - e^{-\gamma t/2}\cos \omega_1 t\right) - \frac{2\gamma}{2\omega_1} e^{-\gamma t/2} \operatorname{sen} \omega_1 t\right]$$

onde $\gamma^2 + 4\omega_1^2 = 4\omega_0^2$

Portanto

$$x(0) = A' + \frac{F_0}{m\omega_0^2} \cdot 0 = x_0 \Leftrightarrow x_0 = A' \;//$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\frac{\gamma}{2} x_h(0) + \frac{F_0}{m\omega_0^2}\left[4\left(\frac{\gamma}{2}\right)\cos \omega_1 t\, e^{-\frac{\gamma t}{2}} + 4\omega_1 e^{-\gamma t/2} \operatorname{sen} \omega_1 t\right.$$

$$\left. + \frac{\gamma^2}{\omega_1} e^{-\gamma t/2} \operatorname{sen} \omega_1 t - 2\gamma e^{-\gamma t/2} \cos \omega_1 t\right] + e^{-\frac{\gamma t}{2}}\left(-\omega_1 A' \operatorname{sen} \omega_1 t + \omega_1 B' \cos \omega t\right)$$

$$v(0) = -\frac{\gamma}{2} x_h(0) + \frac{F_0}{m\omega_0^2}\left[2\gamma - 2\gamma\right] + \omega B' = ?$$

$$v(0) = -\frac{\gamma}{2} A' + \omega_1 B' = 0$$

$$B' = \frac{\gamma A'}{2\omega_1} = \frac{\gamma x_0}{2\omega_1}$$

<u>Finalmente</u>

$$x(t) = e^{-\gamma t/2}\left[x_0 \cos\omega_1 t + \frac{\gamma x_0}{2\omega_1} \operatorname{sen}\omega_1 t \right]$$

$$+ \frac{F_0}{m\omega_0^2}\left[4\left(1 - e^{-\gamma t/2}\cos\omega_1 t\right) - \frac{2\gamma}{2\omega_1} e^{-\gamma t/2} \operatorname{sen}\omega_1 t \right]$$

$$= e^{-\gamma t/2} \cos\omega_1 t \left(x_0 - \frac{F_0}{m\omega_0^2} \right) +$$

$$+ e^{-\gamma t/2} \operatorname{sen}\omega_1 t \frac{\gamma}{2\omega_1}\left(x_0 - \frac{F_0}{m\omega_0^2} \right) + \frac{F_0}{m\omega_0^2}$$

$$= e^{-\frac{\gamma t}{2}}\left(x_0 - \frac{F_0}{m\omega_0^2} \right) \cdot \left(\cos\omega_1 t + \frac{\gamma}{2\omega_1} \operatorname{sen}\omega_1 t \right) + \frac{F_0}{m\omega_0^2}$$

Solução particular

$$x(t) = e^{-\gamma t/2}\left(A_1 \cos\omega_1 t + B_1 \operatorname{sen}\omega_1 t \right) + \frac{F_0}{m\omega_0^2}$$

$$x(0) = A_1 + \frac{F_0}{m\omega_0^2} = x_0 \Leftrightarrow A_1 = x_0 - \frac{F_0}{m\omega_0^2}$$

$$\dot{x}(t) = -\frac{\gamma}{2}\left[x(t) - \frac{F_0}{m\omega_0^2} \right] + e^{-\gamma t/2}\left[-\omega_1 A \operatorname{sen}\omega_1 t + \omega_1 B \cos\omega_1 t \right]$$

$$\dot{x}(0) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\gamma}{2}\left[x(0) - \frac{F_0}{m\omega_0^2} \right] + \omega B_1 = 0 \Leftrightarrow B_1 = \frac{\gamma}{2\omega_1}\left[x(0) - \frac{F_0}{m\omega_0^2} \right]$$

Forças Periódicas genéricas

Até aqui consideramos ~~to~~ forças periódicas do tipo $F(t) = F_0 \cos\omega t$ e/ou $F_0 \operatorname{sen}\omega t$. Considerando agora uma frequência ω_n qualquer (por exemplo $F(t) = F_0 \cos\omega_n t$) a solução para $x_p(t)$ continua válida:

$$x_p(t) = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega_n)^2+\gamma^2\omega_n^2}} \cos[\omega_n t - \varphi] \qquad (1)$$

Por outro lado, uma propriedade importante da equação de movimento $\ddot{x}_p(t) + \gamma\dot{x}_p(t) + \omega_0^2 x_p(t) = F(t)$ é que ela obedece o princípio da superposição:

Se tivermos duas soluções (por ex) $x_p^{(1)}(t)$ e $x_p^{(2)}(t)$,

$$[\ddot{x}_p^{(2)} + \ddot{x}_p^{(1)}(t)] + \gamma[\dot{x}_p^{(2)} + \dot{x}_p^{(1)}] + \omega_0^2[x_p^{(2)} + x_p^{(1)}] =$$

$$= [\ddot{x}_p^{(2)} + \gamma\dot{x}_p^{(2)} + \omega_0^2 x_p^{(2)}] + [\ddot{x}_p^{(1)} + \gamma\dot{p}^{(1)} + \omega_0^2 x_p^{(1)}],$$

de forma que se cada solução $x_p^{(1)}$ e $x_p^{(2)}$ satisfazer cada força externa $F_1(t)$ e $F_2(t)$

$$\ddot{x}_p^{(1)} + \gamma\dot{x}_p^{(1)} + \omega_0^2 x_p^{(1)} = F_1(t)$$

$$\text{e} \quad \ddot{x}_p^{(2)} + \gamma\dot{x}_p^{(2)} + \omega_0^2 x_p^{(2)} = F_2(t)$$

onde cada $F_i(t)$ é uma força periódica do tipo $\cos\omega_i t$ e $\operatorname{sen}\omega_i t$, a solução para $x_p(t) = x_p^{(1)} + x_p^{(2)}$, onde cada caso será dada pela eq. (1) (diferindo apenas pelo coeficiente se $F_i(t) = F_0 i \operatorname{sen}\omega_i t$) →

Finalmente, se $F(t) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i F_1(t)$ (onde $F_i(t)$ for $\cos(\omega_i t - \phi_1)$,) a solução geral será dada por

$$x(t) = \frac{1}{m} \sum_i \frac{\alpha_i}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_i^2)^2 + \gamma^2 \omega_i^2}} \cos(\omega_i t - \phi_i + \delta_i)$$

onde $\delta_i = \tan^{-1}\left(\frac{\gamma \omega_i}{\omega_0^2 - \omega_i^2}\right)$

Uma relação análoga pode ser obtida para $F_i(t) = \alpha_i \operatorname{sen}(\omega_i t - \phi_i)$.

Note que uma força periódica genérica $F(t)$ deve satisfazer $F(t+T) = F(t)$, mas não precisa ser necessariamente senoidal ou co-senoidal. Neste caso, é possível representá-la em série de Fourier como

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \left[a_i \cos \omega_i t + b_i \operatorname{sen} \omega_i t\right]$$

onde $\omega_i = \frac{2\pi i}{T}$ e

$$a_i = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos\left(\frac{2\pi i t}{T}\right) dt$$

$$b_i = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi i t}{T}\right) dt,$$

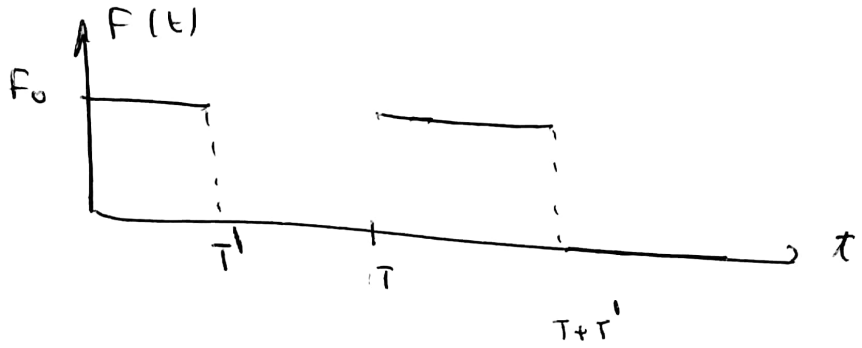
de forma que a argumentação acima é válida.

Exemplo:

Seja $F(t)$ uma força periódica do tipo

$$F(t) = \begin{cases} F_0 & \text{se } nT \le t < nT + T' \\ 0 & \text{se } nT + T' < t < (n+1)T \end{cases}$$

n inteiro



De acordo com o Teorema de Fourier,

$$F(t) = a_n + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \omega_n t + b_n \operatorname{sen} \omega_n t \right],$$

onde

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{T'} F(t)\, dt = \frac{2 F_0}{T} \int_0^{T'} dt = 2 F_0 \frac{T'}{T}$$

$$a_n = \frac{2 F_0}{T} \int_0^{T'} \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt = \frac{2 F_0}{2\pi n} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \Big|_0^{T'}$$

$$= \frac{F_0}{\pi n} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n T'}{T}\right)$$

$$b_n = \frac{2 F_0}{T} \int_0^{T'} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt = -\frac{2 F_0 T}{T \cdot 2\pi n} \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \Big|_0^{T'}$$

$$= -\frac{F_0}{\pi n} \left[\cos\left(\frac{2\pi n T'}{T}\right) - 1 \right]$$

$$= \frac{F_0}{\pi n} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi n T'}{T}\right) \right]$$

e então $F(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \omega_n t + b_n \overset{\text{sen}}{\cancel{\cos}} \omega_n t$.

Dessa forma, para uma componente n temos

$$\ddot{x}_p + \gamma \dot{x}_p + \omega_0^2 x_p = a_n \cos \omega_n t + b_n \operatorname{sen} \omega_n t$$

Assumindo / Escrevendo $x_p^n = A_n \cos \omega_n t + B_n \operatorname{sen} \omega_n t$

temos

$$-\omega_n^2 [A_n \cos \omega_n t + B_n \operatorname{sen} \omega_n t] + \gamma [-\omega_n A_n \operatorname{sen} \omega_n t + \omega_n B_n \cos \omega_n t] + \omega_0^2 (A_n \cos \omega_n t + B_n \operatorname{sen} \omega_n t) = a_n \cos \omega_n t + b_n \operatorname{sen} \omega_n t.$$

Igualando os termos (associados a $\cos \omega_n t$ e $\operatorname{sen} \omega_n t$) temos

$$A_n (\omega_0^2 - \omega_n^2) + \gamma \omega_n B_n = a_n$$

$$B_n (\omega_0^2 - \omega_n^2) - \gamma_n \omega_n A_n = b_n,$$

de onde obtemos:

$$A_n = \frac{a_n (\omega_0^2 - \omega_n^2) - \gamma \omega_n b_n}{[(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + \gamma^2 \omega_n^2]}$$

$$B_n = \frac{b_n (\omega_0^2 - \omega_n^2) + \gamma \omega_n a_n}{[(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + \gamma^2 \omega_n^2]}$$

Finalmente, encontramos:

$$x_p(t) = \frac{2 F_0 T'}{\omega_0^2 T} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \omega_n t + B_n \operatorname{sen} \omega_n t$$

onde $$A_n = \frac{a_n (\omega_0^2 - \omega_n^2) - \gamma \omega_n b_n}{[(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + \gamma^2 \omega_n^2]}$$

$$B_n = \frac{b_n (\omega_0^2 - \omega_n^2) + \gamma \omega_n a_n}{[(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + \gamma^2 \omega_n^2]}$$

com $$a_n = \frac{F_0}{\pi n} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n T'}{T}\right)$$

$$b_n = \frac{F_0}{\pi n}\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi n T'}{T}\right)\right]$$