Lista de Exercícios V

Estamos tomando $\hbar = 1$ (unidades naturais).

① Demonstre que

$$\langle \theta\phi | L_z | \ell m \rangle = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \phi}\langle \theta\phi | \ell m \rangle \,.$$

② Considere a seqüência de rotações de Euler representadas por

$$\mathcal{D}^{1/2}(\alpha\beta\gamma) = e^{-iS_3\alpha}\, e^{-iS_2\beta}\, e^{-iS_3\gamma},$$

onde $S_{2,3} = \frac{1}{2}\ \sigma_{2,3}$. Mostre que devido a propriedades do grupo de rotações essa seqüência de operações é equivalente a uma rotação de ângulo θ em torno de um único eixo. Encontre θ.

③ Considere um sistema com $j = 1$.

(a) Escreva explicitamente a representação de J_y na base $|1m\rangle$ dos auto-vetores do momento angular desse sistema.

(b) Mostre que apenas para $j = 1$, é possível substituir $e^{-iJ_y\beta}$ por $1 - iJ_y \sin\beta - J_y^2(1-\cos\beta)$.

④ Mostre que a matriz densidade ρ para um sistema físico de spin 1

$$\rho = \frac{1}{3}\left(1 + \vec{P}\cdot\vec{J} + W_{ij}T_{ij}\right),$$

onde W_{ij} são um conjunto de 5 números reais e $\vec{J}$ os operadores de momento angular do sistema, tem traço nulo. Encontre expressões explícitas para $\vec{P}$ e W_{ij} (análogas a $\vec{P} = \langle\vec{\sigma}\rangle$ para j=1/2).

⑤ Mostre que

$$e^{i\frac{\theta}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{n}}\,\vec{\sigma}\,e^{-i\frac{\theta}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{n}} = \vec{\sigma}\,\cos\theta + \vec{n}(\vec{\sigma}\cdot\vec{n})(1-\cos\theta) + (\vec{n}\times\vec{\sigma})\sin\theta$$

Encontre um argumento para mostrar que essa relação é válida para qualquer operador vetorial $\vec{V}$ desde que o momento angular apropriado seja usado para gerar a rotação,*i.e.*

$$e^{i\theta\vec{J}\cdot\vec{n}}\,\vec{V}\,e^{-i\theta\vec{J}\cdot\vec{n}} = \vec{V}\,\cos\theta + \vec{n}(\vec{V}\cdot\vec{n})(1-\cos\theta) + (\vec{n}\times\vec{V})\sin\theta\,.$$

Esse problema mostra que rotações em três dimensões são tratadas de forma mais eficiente com spin 1/2.

⑥ Considere os auto-estados de momento angular total $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2 + \vec{J}_3$, de três partículas de spin 1. Seja $J(J+1)$ os auto-valores de $\vec{J}^2$.

(a) Quais os valores possíveis de J? Quantos estados linearmente independentes existem para cada um desses valores?

(b) Construa explicitamente o estado $J = 0$. Se $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são vetores ordinários, o único escalar linear nos três vetores que podemos formar é $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$. Encontre uma relação entre esse fato e o seu resultado para $J = 0$.

⑦ Considere o estado de momento angular orbital $|l = 2\;m = 0\rangle$. Imagine que esse estado é rodado de um ângulo θ em torno do eixo-y. Encontre a probabilidade do novo estado ser encontrado com $m = 0 \pm 1, \pm 2$.

⑧ Considere um operador vectorial $\vec{V}$ na base esférica V_μ ($\mu = \pm 1, 0$) definida por

$$V_{+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(V_1 + iV_2) \qquad V_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(V_1 - iV_2) \qquad V_0 = V_3$$

Mostre que:

(a) $[J_z, V_\mu] = \mu\, V_\mu$

(b) $[J_\pm, V_\mu] = a_\pm(1\mu)\; V_{\mu\pm 1}$

(c) $a_\pm(1\mu)\,\langle j'\,m'|V_{\mu\pm 1}|j\,m\rangle =$
$a_\mp(j'm')\,\langle j'\,m'\mp 1|V_\mu|j\,m\rangle - a_\pm(jm)\,\langle j'\,m'|V_\mu|j\,m\pm 1\rangle$