

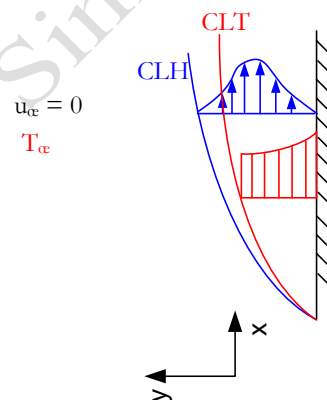
## AULA 18 – CONVECÇÃO NATURAL OU LIVRE

Nos casos anteriormente estudados, os de convecção interna e externa, havia o movimento forçado do fluido em relação à superfície de troca de calor. Esse movimento forçado pode ser causado por um agente externo como uma bomba, um ventilador, ou outra máquina de fluxo. A força da gravidade desempenhava pouco ou nenhum efeito sobre a transferência de calor nesses casos. No entanto, quando o fluido se encontra em repouso e em contato com uma superfície aquecida (ou resfriada) a transferência de calor da superfície para o fluido deverá ocorrer de forma *não forçada*. Nesse caso o número de Reynolds é nulo e as correlações desenvolvidas para a convecção forçada não se aplicam. Assim, o movimento do fluido junto à superfície vai ocorrer como resultado de outro fenômeno, originário da variação de densidade do fluido como consequência de gradientes de temperatura. Para se entender melhor esse aspecto, considere uma superfície vertical em contato com um fluido em repouso. A região em contato com a superfície aquecida também vai se aquecer e, como consequência, haverá uma diferença de empuxo gravitacional entre as porções aquecidas e as menos aquecidas. Assim, as porções aquecidas sobem, enquanto que as menos aquecidas tomam seu lugar dando origem às *correntes de convecção*. Camadas limites térmicas e hidrodinâmicas também são estabelecidas, como ilustrado abaixo. No caso da CLH, as condições de contorno do problema exigem que a velocidade seja nula junto à superfície e também na extremidade da camada limite, como ilustrado.

### *Equações diferenciais*

Quantidade de movimento

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$



Mas,  $\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_\infty g$ , de forma que substituindo na equação da QM, vem

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = g(\rho_\infty - \rho) + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Mas o coeficiente de expansão volumétrica,  $\beta$ , pode ser escrito como:

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \cong \frac{1}{\rho} \left( \frac{\rho_\infty - \rho}{T - T_\infty} \right), \text{ ou } \rho_\infty - \rho \cong \beta \rho (T - T_\infty) \text{ (aproximação de Boussinesq),}$$

logo,

$$\boxed{u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g\beta(T - T_\infty) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}$$

Note que para gás perfeito,  $\beta_{GP} = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p = -\frac{RT}{P} \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{P}{RT} \right)_p = \frac{1}{T} \text{ [K}^{-1}\text{]}$

A equação da Energia:  $\boxed{\left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}}$

Contrariamente à solução das camadas limites hidrodinâmicas e térmicas laminares da convecção forçada, as equações da conservação da quantidade de movimento e da energia *não* podem ser resolvidas separadamente, pois o termo de empuxo  $g\beta(T - T_\infty)$  acopla estas duas equações. Não se pretende avançar na discussão da solução dessas camadas limites e sugere-se a leitura da Seção 9.4 do livro do Incropera, como ponto de partida para aquele aluno mais interessado. De forma que, a partir desse ponto, lança-se mão de correlações empíricas, obtidas em experimentos de laboratório.

O primeiro passo para a análise empírica é a definição de um novo grupo adimensional chamado *número de Grashof*,  $Gr$ , por

$$Gr_x = g\beta \frac{(T_s - T_\infty)x^3}{\nu^2}$$

Este adimensional representa a razão entre as forças de empuxo e as forças viscosas na convecção natural. Ele desempenha um papel semelhante ao do número de Reynolds na convecção forçada, o qual representa a razão entre as forças de inércia e as forças viscosas. Assim, a solução das equações da quantidade de movimento e da energia pode ser escrita da seguinte forma geral:

$$Nu = f(Gr, Pr)$$

A solução aproximada para a placa vertical isotérmica em convecção natural laminar, resulta em:

$$Nu_x = 0,508 Pr^{1/2} (0,952 + Pr)^{-1/4} Gr_x^{1/4}$$

e o valor médio de Nusselt

$$\bar{Nu}_L = \frac{1}{L} \int_0^L Nu_x dx = 0,677 Pr^{1/2} (0,952 + Pr)^{-1/4} Gr_x^{1/4} = \frac{4}{3} Nu_{x=L}$$

Assim, como ocorre com a convecção forçada, também existe a *transição de camadas limites de laminar para turbulenta* na placa vertical, o valor normalmente aceito é  $Gr_{crit} Pr \cong 10^9$

### **Relações Empíricas**

Diversas condições de transferência de calor por convecção natural podem ser relacionadas da seguinte forma.

$$\bar{Nu} = C(Gr \times Pr)^m = CRa^m,$$

sendo as propriedades calculadas a temperatura de película,  $T_f$ , que é a média entre a temperatura da superfície e do fluido. O produto  $Gr.Pr$  é chamada de *número de Rayleigh*

$$Ra = Gr.Pr = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)L^3}{\nu\alpha}$$

a) *Superfícies Isotérmicas - Convecção natural em cilindros e placas*

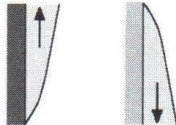
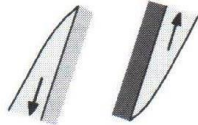
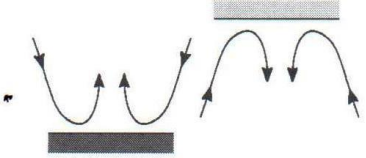
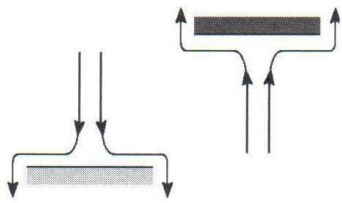


Geometria	Ra	C	m	obs
$\frac{D}{L} > \frac{35}{Gr_L^{1/4}}$ Cilindros e placas verticais	$10^4 - 10^9$	0,59	1/4	Laminar
	$10^9 - 10^{13}$	0,10	1/3	Turbulento
Cilindros horizontais	$10^4 - 10^9$	0,53	1/4	Laminar
	$10^9 - 10^{12}$	0,13	1/3	Turbulento

b) *Fluxo de calor constante*

Grashof modificado:  $Gr^*$ , sendo  $Gr^* = Gr_x \cdot Nu_x = \frac{g\beta q_B x^4}{k\nu^2}$

Laminar, placa vertical:  $Nu_x = 0,60(Gr_x^* \cdot Pr)^{1/5}$   $10^5 < Gr_x^* < 10^{11}$

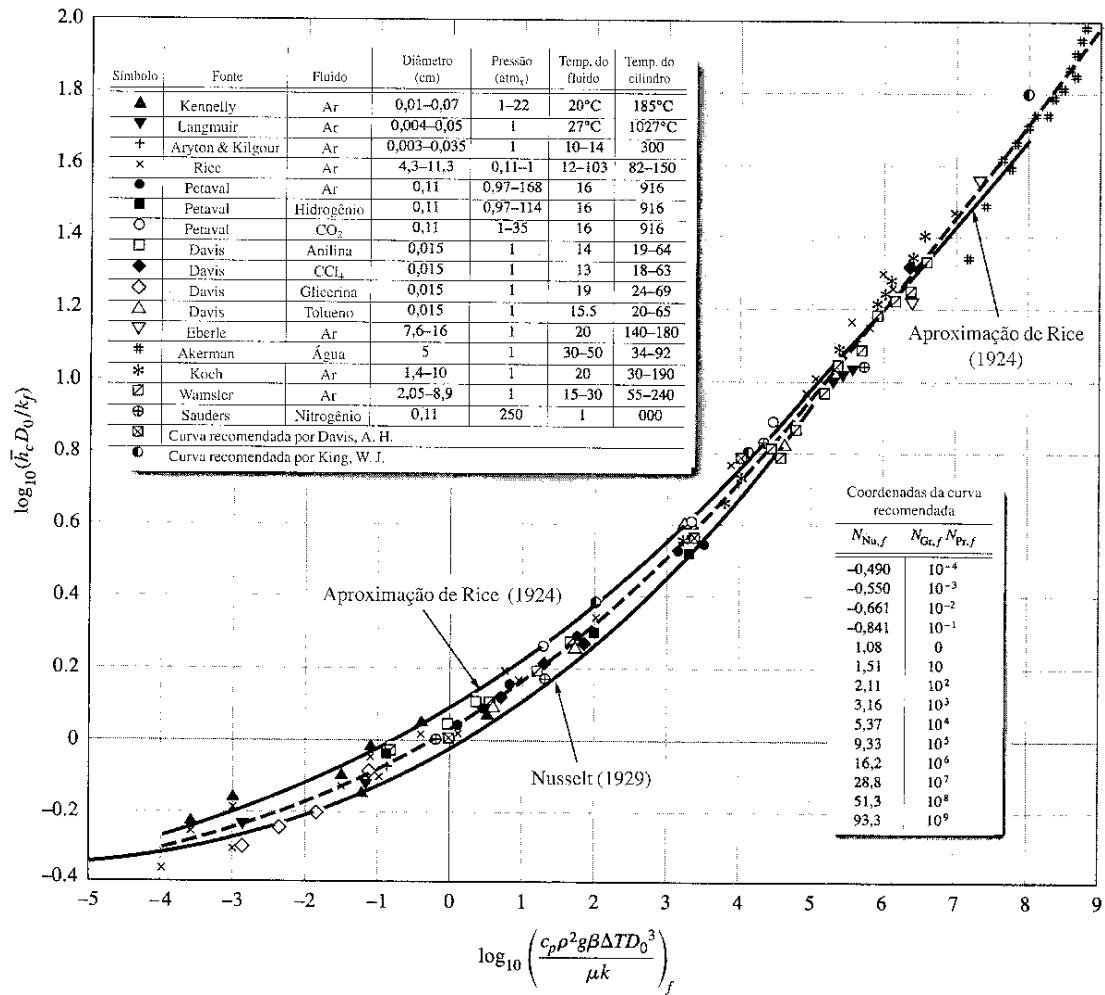
Turbulento, placa vertical:  $Nu_x = 0,17(Gr_x^* \cdot Pr)^{1/4}$   $2 \cdot 10^{13} < Gr_x^* \cdot Pr < 10^{16}$

Geometria	Correlação Recomendada	Restrições
<p>1. Placas verticais<sup>a</sup></p> 	$\overline{Nu}_L = \left\{ 0,825 + \frac{0,387Ra_L^{1/6}}{[1 + (0,492/Pr)^{9/16}]^{8/27}} \right\}^2$	Nenhuma
<p>2. Placas inclinadas, com a superfície fria para cima ou com a superfície quente para baixo</p> 	$\overline{Nu}_L = \left\{ 0,825 + \frac{0,387Ra_L^{1/6}}{[1 + (0,492/Pr)^{9/16}]^{8/27}} \right\}^2$ <p style="text-align: center;"><math>g \rightarrow g \cos \theta</math></p>	$0 \leq \theta \leq 60^\circ$
<p>3. Placas horizontais</p> <p>(a) Superfície quente para cima ou superfície fria para baixo</p> 	$\overline{Nu}_L = 0,54Ra_L^{1/4}$ $\overline{Nu}_L = 0,15Ra_L^{1/3}$	$10^4 \leq Ra_L \leq 10^7$ $10^7 \leq Ra_L \leq 10^{11}$
<p>(b) Superfície fria para cima ou superfície quente para baixo</p> 	$\overline{Nu}_L = 0,27Ra_L^{1/4}$	$10^5 \leq Ra_L \leq 10^{10}$
<p>4. Cilindro horizontal</p> 	$\overline{Nu}_D = \left\{ 0,60 + \frac{0,387Ra_D^{1/6}}{[1 + (0,559/Pr)^{9/16}]^{8/27}} \right\}^2$	$Ra_D \leq 10^{12}$
<p>5. Esfera</p> 	$\overline{Nu}_D = 2 + \frac{0,589Ra_D^{1/4}}{[1 + (0,469/Pr)^{9/16}]^{4/9}}$	$Ra_D \leq 10^{11}$ $Pr \geq 0,7$

<sup>a</sup>A correlação pode ser utilizada em um cilindro vertical se  $(D/L) \geq (35/Gr_L^{1/4})$

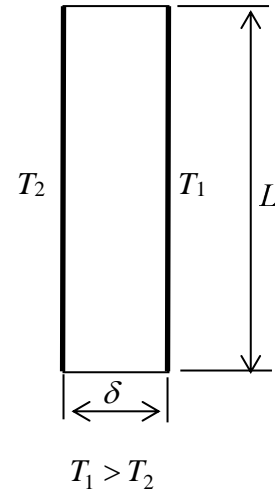
**Exemplo sugerido**

Com base em muitos dados experimentais indicados no gráfico abaixo (extraído de Kreith & Bohn), estabeleça sua própria correlação experimental de  $Nu_D = f(Ra)$  para cilindros horizontais.

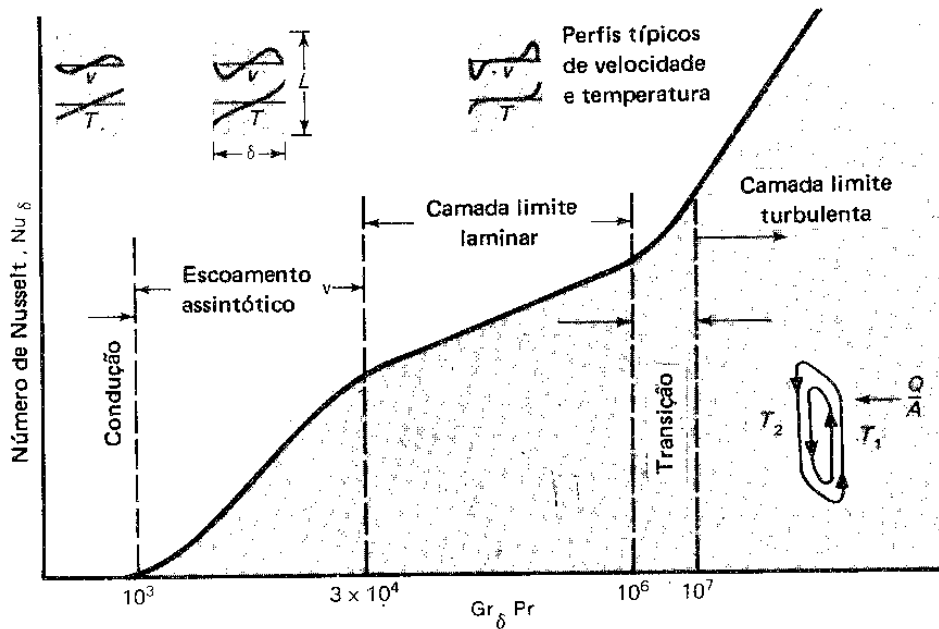


**Espacos Confinados**

Um caso comum de convecção natural é o de duas paredes verticais isotérmicas, conforme ilustrado ao lado, separadas por uma distância  $\delta$ . A figura seguinte mostra os perfis de velocidade e temperatura que podem ocorrer, de acordo com MacGregor e Emery. Na figura, o número de Grashof é baseado na distância  $\delta$  entre as placas:



$$Gr_{\delta} = g\beta \frac{(T_1 - T_2)\delta^3}{\nu^2}$$



Os regimes de escoamento estão indicados no gráfico acima. As correntes de convecção diminuem com o número de Grashof e, para números de Grashof muito baixos, o calor é transferido por condução de calor. Outros regimes de convecção também existem, dependendo do número de Grashof, como ilustrado. O número de Nusselt é expresso em

função da distância das placas, isto é:  $Nu_{\delta} = \frac{h\delta}{k}$ . Conforme indicado por Kreith, algumas correlações empíricas podem ser empregadas:

$$Nu_{\delta} = 0,42 (Gr_{\delta} Pr)^{1/4} Pr^{0,012} \left(\frac{L}{\delta}\right)^{-0,30} \quad \begin{array}{l} q_p = \text{const} \\ 10^4 < Gr_{\delta} Pr < 10^7 \\ 1 < Pr < 20.000 \\ 10 < L/\delta < 40 \end{array}$$

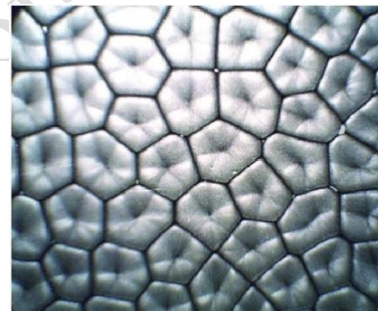
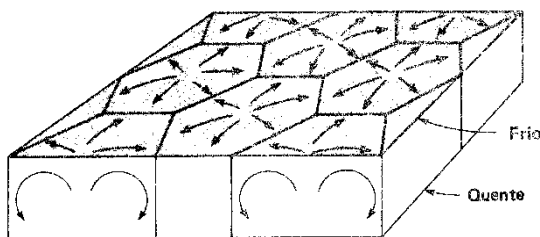
$$Nu_{\delta} = 0,046 (Gr_{\delta} Pr)^{1/3} \quad \begin{array}{l} q_p = \text{const} \\ 10^6 < Gr_{\delta} Pr < 10^9 \\ 1 < Pr < 20 \\ 1 < L/\delta < 40 \end{array}$$

O fluxo de calor é calculado através de

$$\frac{q}{A} = q_p = h(T_1 - T_2) = Nu_{\delta} \frac{k}{\delta} (T_1 - T_2)$$

$Gr_{\delta}$  - número de Grashof baseado na distância  $\delta$  entre as placas.

No caso de espaço confinado horizontal há duas situações a serem consideradas. Não haverá convecção se a temperatura da placa superior for maior que a da placa inferior e, nesse caso, a transferência de calor se dará por meio de condução de calor simples. Já no caso recíproco, isto é, temperatura da placa inferior maior que a da placa superior, haverá convecção. Para um número de Grashof baseado na distância  $\delta$  entre as placas,  $Gr_{\delta}$ , inferior a 1700 haverá a formação de células hexagonais de convecção conhecidas como *células de Bernard*, como ilustrado abaixo. O padrão das células é destruído pela turbulência para  $Gr_{\delta} \sim 50000$ .





Segundo Holman, há certa discordância entre autores, mas a convecção em espaços confinados pode ser expressa por meio de uma expressão geral do tipo:

$$Nu_{\delta} = \frac{h\delta}{k} = C(Gr_{\delta} Pr)^n \left(\frac{L}{\delta}\right)^m$$

$C$ ,  $m$  e  $n$  são dadas na tabela a seguir.  $L$  é a dimensão característica da placa. Holman adverte que deve-se usar essa expressão na ausência de uma expressão mais específica.

Fluido	Geometria	$Gr_{\delta} Pr$	Pr	$\frac{L}{\delta}$	C	n	m	
Gás	Placas verticais, isotérmicas	<2000	$k_s/k = 1,0$					
		6000-200.000	0,5-2	11-42	0,197	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	
		200.000- $1,1 \times 10^7$	0,5-2	11-42	0,073	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	
	Placas horizontais, isotérmicas, aquecidas por baixo	<1700	$k_s/k = 1,0$					
		1700-7000	0,5-2	—	0,059	0,4	0	
		7000- $3,2 \times 10^5$	0,5-2	—	0,212	$\frac{1}{3}$	0	
	$>3,2 \times 10^5$	0,5-2	—	0,061	$\frac{1}{3}$	0		
Líquido	Placas verticais, fluxo de calor constante ou isotérmicas	$10^4-10^7$	1-20.000	10-40	Eq. (7-50)	—	—	
		$10^6-10^9$	1-20	1-40	0,046	$\frac{1}{3}$	0	
	Placas horizontais, isotérmicas, aquecidas por baixo	<1700	$k_s/k = 1,0$	—	—	0,012	0,6	0
		1700-6000	1-5000	—	0,375	0,2	0	
		6000-37.000	1-5000	—	0,13	0,3	0	
		37.000- $10^8$	1-20	—	0,057	$\frac{1}{3}$	0	
	$>10^8$	1-20	—	0,057	$\frac{1}{3}$	0		
Gás ou líquido	Anel tubular vertical	Semelhante às placas verticais						
	Anel tubular horizontal, isotérmico	6000- $10^8$	1-5000	—	0,11	0,29	0	
	Espaço entre esferas concêntricas	$10^6-10^8$	1-5000	—	0,40	0,20	0	
		$120-1,1 \times 10^9$	0,7-4000		0,228	0,226	0	

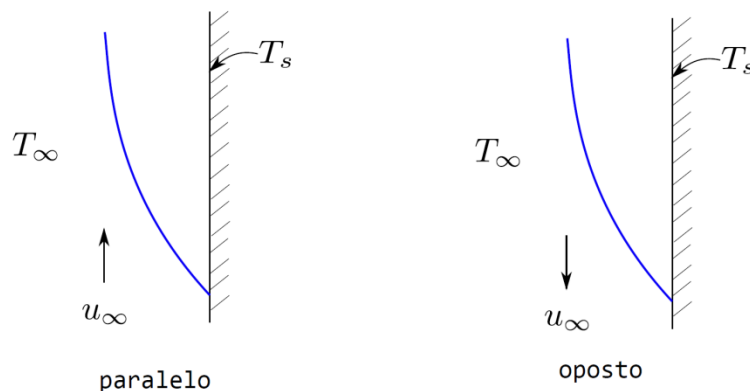
## CONVECÇÃO MISTA

Até o presente os casos de convecção natural e forçada foram tratados separadamente. Claro que a natureza não está preocupada com nossas classificações e os fenômenos vão ocorrer mediante a presença das forças que o controlam (forças de empuxo, atrito e inercial). De forma que existem determinadas situações em que os dois efeitos convectivos são significativos, para as quais se dá o nome de *convecção mista*. Considera-se que a convecção mista ocorra quando  $Gr_L / Re_L^2 \approx 1$ . As formas combinadas dessas duas formas de convecção podem ser agrupadas em três categorias gerais: (a) *escoamento paralelo* se dá quando os movimentos induzidos pelas duas formas de convecção estão na mesma direção (exemplo de uma placa aquecida com movimento forçado ascendente de ar); (b) *escoamento oposto* se dá quando os movimentos induzidos pelas duas formas

de convecção estão em direções opostas (exemplo de uma placa aquecida com movimento forçado descendente de ar); (c) *escoamento transversal* é exemplificado pelo movimento forçado cruzado sobre um cilindro aquecido, por exemplo. É padrão considerar que o número de Nusselt misto seja resultante da combinação dos números de Nusselt da convecção forçada,  $Nu_F$ , e natural,  $Nu_N$ , segundo a seguinte expressão:

$$Nu^n = Nu_F^n \pm Nu_N^n$$

Onde, o expoente  $n$  é adotado como 3, embora 3,5 e 4 também sejam adotados para escoamentos transversais sobre placas horizontais e cilindros (e esferas), respectivamente. O sinal de (+) se aplica para escoamentos paralelos e transversais, enquanto que o sinal de (-), para escoamentos opostos.



### Exemplo

Em um determinado experimento de laboratório, uma pequena esfera de cobre de 1 cm de diâmetro é mantida aquecida atingindo uma temperatura de superfície constante de  $T_s = 69^\circ\text{C}$  e é circundada por água a  $T_\infty = 25^\circ\text{C}$ . Determine o fluxo de calor total em watts transferido da pequena esfera para a água sob duas situações:

- a água está em repouso;
- a água se movimenta com uma velocidade ascendente de  $U_\infty = 0,04$  m/s;
- a partir de que velocidade da água a convecção natural poderia ser desprezada?

**Obs.:** para o item (b) considere a transferência de calor combinada de convecção natural (livre) e forçada. Para isso, verifique se a condição em que os dois efeitos são significativos dado por  $Gr_D \approx Re_D^2$  e use a expressão  $Nu^3 = Nu_F^3 + Nu_N^3$ , onde,  $Nu_N$  é o número de Nusselt calculado como se houvesse apenas convecção natural e  $Nu_F$  se houvesse apenas convecção forçada. Todos os números de Nusselt são baseados no diâmetro da esfera.

**Solução**

(a) Propriedades da água a  $T_f = \frac{T_s + T_\infty}{2} = \frac{69 + 25}{2} = 47^\circ C$

$\beta = 0,0004366 / K$        $\nu = 5,82 \cdot 10^{-7} m^2 / s$        $k = 0,627 W / mK$   
 $c_p = 4182 J / kg K$        $Pr = 3,84 (> 0,7)$        $\alpha = 1,515 \cdot 10^{-7} m^2 / s$

$$Ra = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)D^3}{\nu\alpha} = \frac{9,81 \cdot 0,0004366 \cdot (69 - 25)0,01^3}{5,82 \cdot 10^{-7} \cdot 1,51 \cdot 10^{-7}} = 2,14 \cdot 10^6 < 10^{11}$$

$$\overline{Nu}_N = 2 + \frac{0,589 Ra^{1/4}}{\left[1 + \left(\frac{0,469}{Pr}\right)^{9/16}\right]^{4/9}} = 2 + \frac{0,589 \cdot (2,14 \cdot 10^6)^{1/4}}{\left[1 + \left(\frac{0,469}{3,84}\right)^{9/16}\right]^{4/9}} = 22$$

$$h_N = \overline{Nu}_N \frac{k}{D} = 22 \frac{0,627}{0,01} = 1379 W / m^2 K$$

$$A_s = \pi D^2 = \pi \times 0,01^2 = 0,000314 m^2$$

$$q_N = h_N A_s (T_s - T_\infty) = 1379 \times 0,000314 \times (69 - 25) = 19,1 W$$

(b)

$$Gr_D = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)D^3}{\nu^2} = \frac{9,81 \cdot 0,0004366 \cdot (69 - 25)0,01^3}{(5,82 \cdot 10^{-7})^2} = 556398$$

$$Re_D = \frac{U_\infty D}{\nu} = \frac{0,04 \cdot 0,01}{5,82 \cdot 10^{-7}} = 687$$

$$\frac{Gr_D}{Re_D^2} = \frac{556398}{687^2} = 1,21 \approx 1$$

$$\mu = 557 \times 10^{-6} \text{ kg/ms} \quad \mu_s = 400 \times 10^{-6} \text{ kg/ms}$$

$$\overline{Nu}_F = 2 + (0,4 Re_D^{0,5} + 0,06 Re_D^{2/3}) Pr^{0,4} \left( \frac{\mu}{\mu_s} \right)^{0,25} = 2 + (0,4 \cdot 687^{0,5} + 0,06 \cdot 687^{2/3}) 3,84^{0,4} \left( \frac{557}{400} \right)^{0,25}$$

$$\overline{Nu}_F = 30,28$$

$$\overline{Nu}^3 = \overline{Nu}_F^3 + \overline{Nu}_N^3 \quad \Rightarrow \quad \overline{Nu} = 33,74$$

$$h = \overline{Nu} \frac{k}{D} = 33,74 \frac{0,627}{0,01} = 2115 \text{ W/m}^2 \text{K}$$

$$q = hA_s(T_s - T_\infty) = 2115 \times 0,000314 \times (69 - 25) = 29,2 \text{ W}$$

(c)

$$\frac{Gr_D}{Re_D^2} \ll 1 \quad \rightarrow \quad \text{portanto, assumindo } \frac{Gr_D}{Re_D^2} = 0,01$$

$$Re_D = \frac{U_\infty D}{\nu} = \sqrt{\frac{Gr_D}{0,01}}$$

$$U_\infty = \frac{\nu}{D} \sqrt{\frac{Gr_D}{0,01}} = \frac{5,82 \times 10^{-7}}{0,01} \sqrt{\frac{556398}{0,01}} = 0,434 \text{ m/s} \quad (\text{ou maior})$$