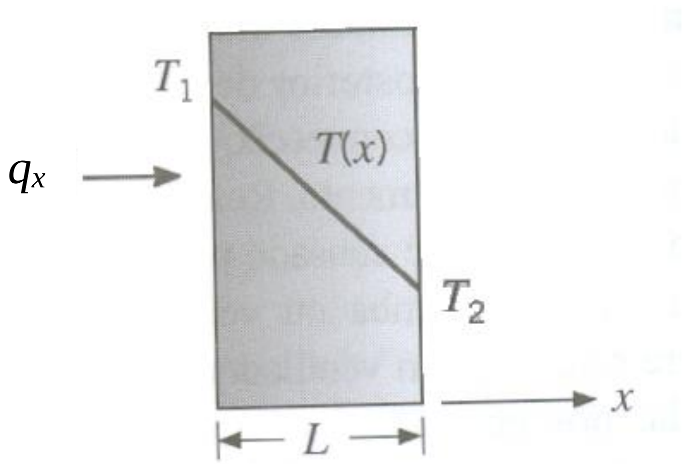
AULA 3 – Condução Unidimensional em Regime Permanente sem geração – Placa ou Parede Plana

O caso mais simples que se pode imaginar de transferência de calor por condução é o caso da parede ou placa plana, em regime permanente, sem geração interna de energia térmica (calor) e propriedades de transporte (condutividade térmica) constantes. Este é o caso ilustrado na figura abaixo em que uma parede de espessura L, tendo a face esquerda mantida a uma temperatura T_1, enquanto que a face à direita é mantida à temperatura T_2. Poderia se imaginar que se trata, por exemplo, de uma parede que separa dois ambientes de temperaturas distintas. Como se verá, a distribuição de temperaturas $T(x)$ dentro da parede é linear, como indicado na figura, com $T_1 > T_2$.



Para resolver esse caso, vamos partir da equação geral da condução de calor, deduzida na aula anterior, isto é:

$$\nabla^2 T + \frac{q_G'''}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

Introduzindo as simplificações do problema, vem:

i. Não há geração interna de energia térmica (calor): $\Rightarrow q_G''' = 0$

ii. Regime permanente: $\Rightarrow \dfrac{\partial T}{\partial t} = 0$

iii. Unidimensional (1-D): $\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$

Assim, com essas condições, vem que $\dfrac{d^2T}{\partial x^2} = 0$, e a solução procurada é do tipo *T(x)*.

Para resolver essa equação considere a seguinte mudança de variáveis: $\theta = \dfrac{dT}{dx}$

Logo, substituindo na equação, vem que $\frac{d\theta}{dx} = 0$

Integrando por separação de variáveis vem:

$$\int d\theta = C_1 \text{ , ou seja: } \theta = C_1$$

Mas, como foi definido $\theta = \frac{dT}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{dx} = C_1$

Integrando a equação mais uma vez, vem:

$$\boxed{T(x) = C_1 x + C_2}$$ Que é a equação de uma reta, como já antecipado.

Para se obter as constantes C_1 e C_2, deve-se aplicar as condições de contorno que, nesse exemplo, são dadas pelas temperaturas superficiais das duas faces. Em termos matemáticos isso quer dizer que

(A) em $x = 0 \quad \Rightarrow \quad T = T_1$

(B) e em $x = L \quad \Rightarrow \quad T = T_2$

De (A): $C_2 = T_1$

e de (B): $T_2 = C_1 L + T_1 \;\Rightarrow\; C_1 = \frac{T_2 - T_1}{L}$

Assim, $$\boxed{T(x) = (T_2 - T_1)\frac{x}{L} + T_1}$$

Para efeito de ilustração, suponha que $T_1 > T_2$, como mostrado na figura abaixo.

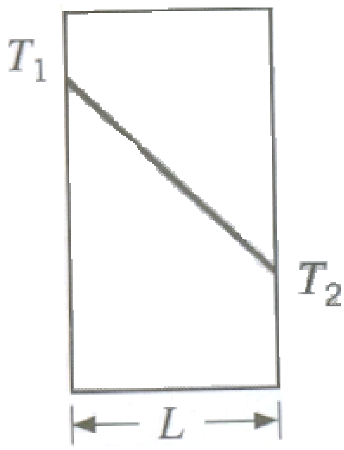
Cálculo da taxa e do fluxo de calor transferido através da parede

.

Para isso, deve-se usar a Lei de Fourier, dada por:

$$\dot{Q} = -k\mathrm{A}\frac{dT}{dx}$$

e, substituindo a distribuição de temperaturas, obtém-se a seguinte taxa de transferência de calor:



$$\dot{Q} = -k\mathrm{A}\frac{d}{dx}\left[(T_2 - T_1)\frac{x}{L} + T_1\right] = -k\mathrm{A}\frac{(T_2 - T_1)}{L} \text{, ou,}$$

em termos de fluxo de calor por unidade de área, temos:

$$q = \frac{\dot{Q}}{\mathrm{A}} = -k\frac{(T_2 - T_1)}{L} \qquad \left[\mathrm{W/m^2}\right]$$

Esquecendo o sinal de (-), já que sabemos a direção do fluxo de calor, vem

$$\boxed{q = k\frac{\Delta T}{L}}$$

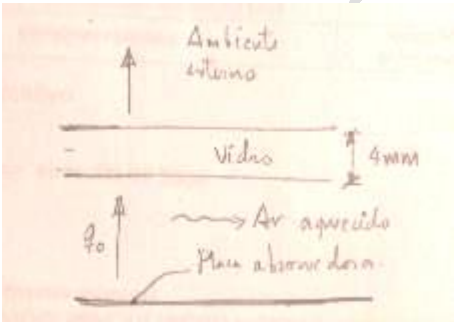
Conhecida a equação que rege do fluxo de calor através da parede, podemos:

Aumentar o fluxo de calor *q:*
. Com o uso de material bom condutor de calor, isto é, com $k\uparrow$
. Ou, pela diminuição da espessura da parede, isto é $L\downarrow$

Ou diminuir o fluxo de calor *q:*
. Com o uso de material isolante térmico $k\downarrow$
. Ou, pelo aumento da espessura da parede, isto é $L\uparrow$

condução de calor em vidro de coletor solar

A energia solar pode ser aproveitada para aquecimento de ar mediante coletor de placa plana. O coletor mostrado na figura possui uma cobertura de vidro. Devido à diferença de temperatura entre a placa absorvedora e o ar ambiente, existe perda de calor para o ambiente. Em regime permanente essa perda de calor é de 140 W/m². Avalie a diferença de temperaturas entre as faces superior e inferior da cobertura de vidro de 4 mm de espessura.



<u>*Solução:*</u>

O fluxo de calor pode ser avaliado pela relação $q_0 = k\frac{(T_1 - T_2)}{L}$, assim, a diferença de temperaturas $\Delta T = T_1 - T_2$ é avaliada por:

$$\Delta T = \frac{q_o L}{k}$$

É possível verificar que a condutividade do vidro é de $k = 1,4$ W/mK.

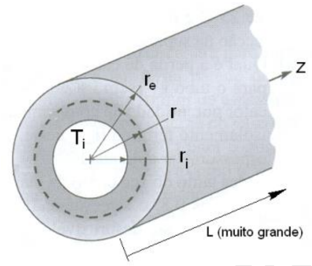
$$\Delta T = \frac{140 \times 0,004}{1,4} = 0,4\,°\text{C}$$

A diferença de temperatura nos vidros de coletores solares geralmente é pequena, assim, em alguns cálculos é assumido que as temperaturas nas faces do vidro são iguais.

CONDUÇÃO UNIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE SEM GERAÇÃO INTERNA DE CALOR – TUBO CILÍNDRICO.

Este é o caso equivalente, em coordenadas cilíndricas, ao da condução de calor unidimensional, em regime permanente, sem geração de energia térmica (calor) e condutividade térmica constante estudado acima para uma parede ou placa plana. A diferença é que sua aplicação é para tubos cilíndricos.

A equação geral é da forma $\nabla^2 T + \frac{q_G'''}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$



Neste caso, a geometria do problema indica que se deve resolver o problema em coordenadas cilíndricas. Para isso, basta usar o Laplaciano correspondente, isto é:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q_G'''}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

Introduzindo as simplificações:

i. Não há geração interna de calor: $\Rightarrow q_G''' = 0$

ii. Regime permanente: $\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = 0$

iii. Unidimensional (1D): que é válido para um tubo muito longo, ou seja, *T* não depende de *z*, logo $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$

iv. Há uma simetria radial, *T* não depende de ϕ, isto é: $\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} = 0$

As simplificações (iii) e (iv) implicam que se trata de um problema unidimensional na direção radial, *r*. A aplicação dessas condições resulta em:

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)=0\text{, onde a solução procurada é do tipo } T=T(r)$$

As condições de contorno para a ilustração indicada acima são:

A superfície interna é mantida a uma temperatura constante, isto é: $r=r_i \Rightarrow T=T_i$
A superfície externa é também mantida a uma outra temperatura constante, isto é: $r=r_e \Rightarrow T=T_e$

Solução:

1ª Integração – separe as variáreis e integra uma vez, para resultar em:

$$\int d\left(r\frac{dT}{dr}\right)dr=\int 0dr+C_1 \qquad \Rightarrow \qquad r\frac{dT}{dr}=C_1$$

Integrando pela 2ª vez, após separação de variáveis, vem:

$$\int dT=\int C_1\frac{dr}{r}+C_2$$

$$\boxed{T(r)=C_1\ln(r)+C_2}$$

Portanto, a distribuição de temperaturas no caso do tubo cilíndrico é logarítmica e não linear como no caso da parede plana.

Determinação de C_1 e C_2 por meio da aplicação das condições de contorno:

(A) $\quad r=r_i \Rightarrow T=T_i \quad \Rightarrow \quad T_i=C_1\ln(r_i)+C_2$

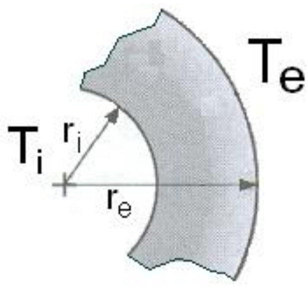
(B) $\quad r=r_e \Rightarrow T=T_e \quad \Rightarrow \quad T_e=C_1\ln(r_e)+C_2$

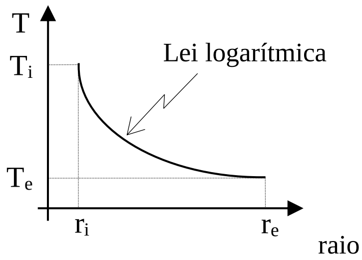
Fazendo-se (A) – (B), temos que $\quad T_i-T_e=C_1\ln\frac{\mathrm{r_i}}{\mathrm{r_e}}$, ou $C_1=\dfrac{T_i-T_e}{\ln\frac{\mathrm{r_i}}{\mathrm{r_e}}}$

Finalmente, na eq. da distribuição de temperaturas:

$$\boxed{T(r)=\frac{T_i-T_e}{\ln\frac{\mathrm{r_i}}{\mathrm{r_e}}}\ln\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{r_e}}+T_e}$$

Distribuição de temperatura, supondo $T_i > T_e$.





O fluxo de calor é obtido por meio da Lei de Fourier, isto é, $q=-kA\frac{dT}{dr}$

Atenção a esse ponto, a área *A* é a área perpendicular à direção da taxa de condução de calor e não a área da seção transversal. Portanto, trata-se da área da "casquinha" cilíndrica ilustrada abaixo.

$A=2\pi rL$ (área da casca cilíndrica), *L* é o comprimento do tubo

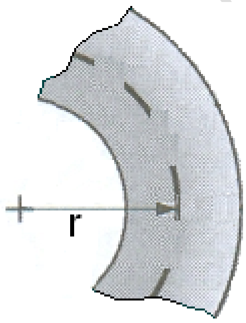
Substituindo a distribuição logarítmica de temperatura na equação de Fourier, $T(r)=C_1\ln(r)+C_2$, vem:

$$\dot{Q}=-k2\pi rL\frac{d}{dr}[C_1\ln(r)+C_2]$$

ou, efetuando a derivação, temos:

$$\dot{Q}=-2\pi kLrC_1\frac{1}{r}$$

ou, ainda: $\dot{Q}=-2\pi kLC_1$



Substituindo, C_1: $\boxed{\dot{Q}=2\pi kL\frac{(T_e-T_i)}{\ln\left(\frac{\mathrm{r_i}}{\mathrm{r_e}}\right)}}$ (*W*)

A taxa de transferência de calor $\dot{Q}$ é constante através das superfícies cilíndricas! Entretanto, o fluxo de calor (por unidade de área), *q*, depende da posição radial

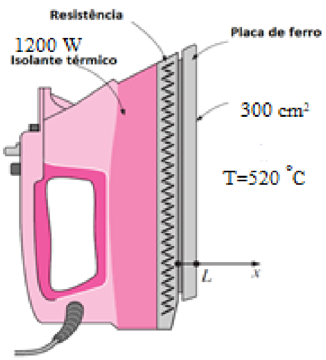
$$q = \frac{\dot{Q}}{A} = \frac{2\pi kL}{2\pi rL}\frac{(T_e - T_i)}{\ln\left(\frac{r_i}{r_e}\right)}$$

$$\boxed{q = \frac{k}{r}\frac{(T_e - T_i)}{\ln\left(\frac{r_i}{r_e}\right)}} \qquad (W/m^2)$$

Exercícios Resolvidos: Exercícios adaptados do livro transferência de calor e massa, Çengel.

Fluxo de calor como condição de contorno

Considere que a base do ferro de passar roupa doméstico possui uma espessura de *L = 0,5 cm*, e uma área de *A = 300 cm²*, o material de ferro com condutividade térmica, *k = 15 W/m°C*. A superfície interna da placa é aquecida por uma resistência de *1200 W* e a superfície externa possui uma temperatura *T(L) = 520°C* como apresentado na figura abaixo, determine a distribuição de temperatura ao longo da placa e a temperatura da superfície interna



Hipóteses:
Estado estacionário
A condução e calor é unidimensional
As propriedades físicas constantes
Sem geração interna de energia
A isolação térmica na superfície interna é perfeitamente adiabática
Dados do problema:
L = 0,5 cm; A = 300 cm²; T(L) = 520°C; k = 15 W/m°C

Solução: O fluxo de calor na superfície interna é dado por:

$$\dot{q}_0 = \frac{\dot{Q}_0}{A_{base}} = \frac{1200\ W}{0{,}03\ m^2} = 40000\frac{W}{m^2}$$

A partir da equação de difusão do calor e as hipóteses admitida obtemos a equação diferencial abaixo:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

Integrando a equação acima duas vezes obtemos o perfil de temperatura:
$\frac{dT}{dx} = C_1$. Integrando mais uma vez obtemos, $T(x) = C_1x + C_2$. C1 e C2 são as constantes de integração e são obtidas aplicando as condições de contorno.
Condição de contorno 1: Na superfície interna,
$x = 0,\qquad -k\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} = \dot{q}_0$, o que indica que $-kC_1 = \dot{q}_0$ e $C_1 = -\frac{\dot{q}_0}{k}$
Condição de contorno 2: Na superfície externa,
$x = L,\qquad T(L) = 520^{\circ}C$

Substituindo $C_1 = -\frac{\dot{q}_0}{k}$ e resolvendo para obter C_2, temos: $C_2 = \frac{\dot{q}_0}{k} L + T(L)$. Substituindo as constantes no perfil de temperatura obtemos:

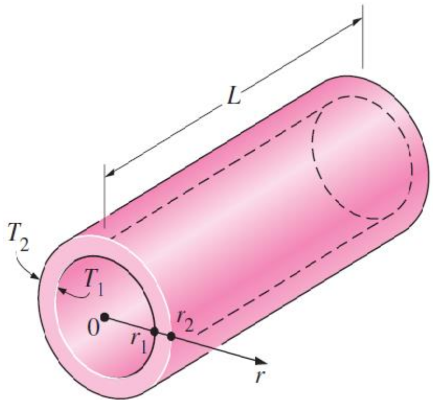
$$T(x) = -\frac{\dot{q_0}}{k}(x - L) + T(L)$$

Aplicando os valores na equação acima para $x = 0$ e $x = 0{,}5\ cm$ encontramos a temperatura da superfície interna.

$$T(0) = -\frac{40000}{15}(0 - 0.005)\left[\frac{^\circ C}{m}.m\right] + 520\ [^\circ C] = 533^\circ C$$

Condução de calor unidimensional em coordenadas cilíndricas

Um tubo por onde passa vapor de água possui as seguintes dimensões: comprimento, $L=20\ m$; raio interno $r_1= 6\ cm$; raio externo $r_2=8\ cm$; e condutividade térmica, $k= 20W/m^\circ C$. A temperatura média da superfície interna e externa, $T_1=150^\circ C$ e $T_2=60^\circ C$, são mantidas constantes. Obtenha a distribuição de temperatura da parede do tubo e determine a perda de calor do vapor por meio da parede do tubo.



Hipóteses:
1. Regime estacionário
2. Condução de calor unidimensional
3. As propriedades físicas
4. Sem geração calor

Solução: Da equação de difusão de calor para coordenada cilíndrica,

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = 0$$

Integrando uma vez temos, $r\frac{dT}{dr} = c_1$ e integrando mais uma vez obtemos o perfil de temperatura:

$$T(r) = C_1 \ln r + C_2$$

Aplicando as condições de contorno para determinar as constantes,

C.C 1: $r = r_1 \quad T(r_1) = T_1 = 150^\circ C \rightarrow T_1 = C_1 \ln r_1 + C_2 \quad \rightarrow C_1 = \frac{T_2 - T_1}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$

C.C 2: $r = r_2 \quad T(r_2) = T_2 = 60^\circ C \quad \rightarrow T_2 = C_1 \ln r_2 + C_2 \quad \rightarrow C_2 = T_1 - \frac{T_2 - T_1}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \ln(r_1)$

Substituindo as constantes no perfil de temperatura obtemos:

$$T\ (r) = \left(\frac{\ln\left(\frac{r}{r_1}\right)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}\right)(T_2 - T_1) + T_1$$

A taxa de calor do vapor é determinada utilizando a lei de Fourier,

$$\dot{Q}_c = -kA\frac{dT}{dr} = -k(2\pi r L)\frac{C_1}{r} = -2\pi k L C_1 = 2\pi k L\frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

Substituindo os valores numéricos obtemos:

$$\dot{Q} = 2\pi\left(20\frac{W}{m^\circ C}\right)(20\ m)\frac{(150 - 60)^\circ C}{\ln\left(\frac{0{,}08}{0{,}06}\right)} = 786\ kW$$