AULA 9

Mecânica Quântica I

AULA 9 — Momento Angular na M.Q. ($\hbar = 1$)

Definição: Momento Angular $\vec{J}$ é o conj de três operadores tal que $[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk} J_k$ (1) $i,j,k = 1,2,3$

O que segue é geral, porém partículas de massa nula (o fóton!) precisam de um tratamento especial.

J^2 é um escalar por rotação i.e $[J^2, J_i] = 0$

$\Rightarrow$ J^2 e J_3 (escolha) podem ser diagonalizados simultaneamente:

$\{|jm\rangle\}$ $\to$ base

$$J^2 |jm\rangle = j(j+1)\, |jm\rangle \quad (2a)$$

$$J_3 |jm\rangle = m\, |jm\rangle \quad (2b)$$

m é real pois $J_3^+ = J_3$; $j(j+1)$ é real e positivo ou nulo (mostre!)

$$\langle jm | j'm' \rangle = \delta_{jj'}\, \delta_{mm'} \quad (2c)$$

É útil definir

$$J_\pm = J_1 \pm i J_2 \quad (3a)$$

$$J_+ = J_-^+ \quad (3b)$$

não são hermitianos!

$$[J_+, J_-] = 2J_3 \quad (4a)$$

$$[J_+, J_3] = -J_+ \quad (4b)$$

$$[J_-, J_3] = J_- \quad (4c)$$

$$J_+ J_- = (J_1 + iJ_2)(J_1 - iJ_2)$$
$$= J_1^2 + J_2^2 + i(J_2 J_1 - J_1 J_2) = J^2 - J_3^2 + J_3$$

$$J_+ J_- = J^2 - J_3(J_3 - 1) \quad (4d)$$
$$J_- J_+ = J^2 - J_3(J_3 + 1) \quad (4e)$$
$$[J_\pm, J^2] = 0 \quad (4f)$$

Assim

$$\langle jm | J_1^2 + J_2^2 | jm \rangle = \langle jm | J^2 - J_3^2 | jm \rangle = j(j+1) - m^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{m^2 \leq j(j+1)}$$

m é limitado entre m_{max} e m_{min} para um dado j, assim

$$m_{min} \leq m \leq m_{max}$$

$$J_3 \underline{J_\pm |jm\rangle} = (J_\pm J_3 \pm J_\pm)|jm\rangle = (m \pm 1) \underline{J_\pm |jm\rangle}$$

autovetor de J_3 com auto-valor $m \pm 1$

$$J^2 \underline{J_\pm |jm\rangle} = J_\pm J^2 |jm\rangle = j(j+1) \underline{J_\pm |jm\rangle}$$

autovetor de J^2 com auto-valor $j(j+1)$

$$\therefore \quad J_\pm |jm\rangle = a_\pm(jm) |j \; m \pm 1\rangle$$

$$|a_\pm|^2 = \langle jm | J_\mp J_\pm | jm \rangle = \langle jm | J^2 - J_3(J_3 \pm 1) | jm \rangle$$
$$= j(j+1) - m(m \pm 1) \geq 0$$

por convenção de fase definimos

$$a_\pm(jm) = \sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}$$

$$\boxed{J_\pm |jm\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m\pm1)}\ |jm\rangle} \quad (5)$$

$$J_+ |j\, m_{max}\rangle = 0 \qquad \therefore\ j(j+1) = m_{max}(m_{max}+1)$$

$$J_- |j\, m_{min}\rangle = 0 \qquad\qquad = m_{min}(m_{min}-1)$$

$\Rightarrow m_{max}(m_{max}+1) - m_{min}(m_{min}-1) = (m_{max}+m_{min})(m_{max}-m_{min}+1)$
$=0$, mas $(m_{max}-m_{min}+1) > 0 \Rightarrow \boxed{m_{max} = -m_{min}} = j$

logo

$$\underline{-j \le m \le j} \quad (6)$$

$$(J_+)^k |j\, m_0\rangle \propto |j\, m_0+k\rangle \qquad k \text{ é inteiro}$$

para algum k $\quad m_0 + k = m_{max} = j$

$$(J_-)^{\ell} |j\, m_0\rangle \propto |j\, m_0 - \ell\rangle \qquad \ell \text{ é inteiro}$$

para algum ℓ $\quad m_0 - \ell = -j = m_{min}$

$\therefore\ k + \ell = 2j$ é inteiro

$\Rightarrow$ os auto-valores de J^2 são $j(j+1)$, com $j = 0, 1/2, 1, 3/2, \ldots$
(inteiros e semi-inteiros)

dado j existem $2j+1$ auto-estados de J_3 com auto-valores $m = -j, -j+1, \ldots, j-1, j$

O espaço vetorial complexo de dimensão $2j+1$ gerado pelos estados de um dado j será chamado de $\mathcal{H}_j$

O espectro de J_3 implica que os <u>operadores de momento angular tem 2 propriedades importantes independentes de base</u>:

$$(1) \quad \sum_m \langle jm | J_3 | jm \rangle = 0 \Rightarrow \boxed{\mathrm{Tr}\, J_3 = 0} \quad \text{em } \{|jm\rangle\}$$

mas
traço é invariante por transf. de base

$$D^j(R) = e^{-i\theta \hat{n} \cdot \vec{J}}$$ transf. unitárias em $\mathcal{H}_j$.

como já vimos são rotações, J_i são matrizes de dim $2j+1$ por uma rotação apropriada $D^+ J_3 D$ podemos virar J_3 para qualquer direção deixando o traço invariante

$$\therefore \boxed{\mathrm{Tr}\, \vec{J} = 0} \quad (7)$$

(2) Se $M = M^+$ de dim $n \times n$ com auto-valores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, então

$$\prod_i (M - \lambda_i) = 0$$ essa equação também invariante por transf de base (4)

$$M \rightarrow U^{+} M U \quad , \quad M = J_3 \Rightarrow U^{+} J_3 U = J_i$$

$$\therefore \boxed{\prod_{m=-j}^{j} (J_i - m) = 0} \quad (8)$$ para todas as componentes de $\vec{J}$

[Esse é o teorema de Caley-Hamilton $\prod_i (M - \lambda_i) = 0$]

Em $\mathcal{H}_j$ qualquer função dos operadores de momento angular, como $D^j(R)$, é um polinômio de grau no máximo $2j$!

Note que
$$e^{-i\theta J_3} |jm\rangle = e^{-i\theta m} |jm\rangle$$

$\theta = 2\pi$ então • se j for inteiro $e^{-im(\theta+2\pi)} = e^{-im\theta}$

$\Rightarrow$ o estado não muda

• se j for semi-inteiro $e^{-im(\theta+2\pi)} = -e^{-im\theta}$

$\Rightarrow$ o estado ganha uma fase, muda de sinal

$\therefore$ estados de mom. angular inteiro tem valor único sob rotação

estados de mom. angular semi-inteiro tem valor duplo sobre rotação.

Mas $\langle\psi|A|\psi\rangle$ tem valor único! Operadores são observáveis e devem ter valor único mesmo que $|\psi\rangle$ não o tenha!

(a) <u>Momento Angular Orbital</u> i.e. $l = 0, 1, 2, \dots$ $\{|lm\rangle\}$ L^2, L_3

$$L_3|lm\rangle = m\,|lm\rangle \quad (9a) \qquad L^2|lm\rangle = l(l+1)\,|lm\rangle \quad (9b)$$

$$\langle\theta\phi|L_3|lm\rangle = m\,\langle\theta\phi|lm\rangle \quad (9c)$$

$$\langle\theta\phi|L^2|lm\rangle = l(l+1)\,\langle\theta\phi|lm\rangle \quad (9d)$$

na base $\{|r\theta\phi\rangle\}$ usando coord. esféricas

$$\langle\theta\phi|L_3|lm\rangle = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}\langle\theta\phi|lm\rangle = m\,\underbrace{\langle\theta\phi|lm\rangle}_{\equiv\, Y_{lm}(\theta,\phi)}$$ harmônicos esféricos

$$\boxed{\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}Y_{lm}(\theta,\phi) = m\,Y_{lm}(\theta,\phi)} \quad (10)$$ Equação Diferencial

é tedioso encontrar L_1, L_2, L_3, L^2 na base $\{|\vec{r}\rangle\}$
$\vec{L} = \vec{x}\times\vec{p}$ $\langle\vec{r}|\vec{p}|\psi\rangle$ etc.. como fizemos antes

mas agora em coord. esféricas

$$-\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]Y_{lm}(\theta,\phi) = l(l+1)Y_{lm}(\theta,\phi) \quad (11)$$

$$\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}d\phi\; Y_{l'm'}(\theta,\phi)\,Y^*_{lm}(\theta,\phi) = \int d\Omega\, Y_{l'm'}(\Omega)\,Y^*_{lm}(\Omega) = \delta_{ll'}\delta_{mm'} \quad (12)$$

$$Y_{\ell m}(\theta,\phi) = (-1)^m \left[\frac{(2\ell+1)}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} \right]^{1/2} P_\ell^m(\cos\theta)\, e^{im\phi} \qquad m>0$$

$$Y_{\ell m}(\theta,\phi) = (-1)^m\, Y^*_{\ell -m}(\theta,\phi) \qquad m<0$$

$$P_\ell^m(\cos\theta) = (1-\cos^2\theta)^{m/2} \frac{d^m}{d\cos\theta^m} P_\ell(\cos\theta)$$

Polinômios de Legendre.

Polinômio de Legendre Associados

$$P_\ell(u) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{du^\ell} (u^2-1)^\ell$$

Um teorema importante aqui é o chamado TEOREMA DE ADIÇÃO

$\vec{n}_1 \equiv (\theta_1,\phi_1) \qquad \vec{n}_2 \equiv (\theta_2,\phi_2)$

$$P_\ell(\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2) = \frac{4\pi}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}(\theta_1,\phi_1)\, Y^*_{\ell m}(\theta_2,\phi_2) \quad (13)$$

Relação de Completeza:

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}(\theta,\phi)\, Y^*_{\ell m}(\theta',\phi') = \frac{\delta(\theta-\theta')\,\delta(\phi-\phi')}{\sin\theta} \quad (14)$$

EXEMPLOS: $\boxed{\ell=0}$

$$Y_{00} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$$

$\boxed{l=1}$ $\quad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta \qquad Y_{1\pm1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\, e^{\pm i\phi} \operatorname{sen}\theta$

$x_1 = r\cos\phi \operatorname{sen}\theta \quad y_1 = r \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \quad z_1 = r\cos\theta$

$$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,\frac{1}{r}\, z_1 \qquad Y_{1\pm1} = \mp\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\phi \pm i \operatorname{sen}\phi)\operatorname{sen}\theta\right]$$

$$= \mp\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\, x_1 \pm i\,\frac{y_1}{\sqrt{2}}\right]$$

Podemos então escrever:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\, r}_{C} \underbrace{\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ i/\sqrt{2} & 0 & i/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} Y_{11} \\ Y_{10} \\ Y_{1-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = C M \begin{pmatrix} Y_{11} \\ Y_{10} \\ Y_{1-1} \end{pmatrix} \qquad M \cdot M^{+} = \mathbb{1} \text{ (matriz unitária)}$$

logo $$\begin{pmatrix} Y_{11} \\ Y_{10} \\ Y_{1-1} \end{pmatrix} = C^{-1} M^{+} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

podemos agora mudar para um outro sistema por rotação

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \\ z_1' \end{pmatrix} = R(\alpha) \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \qquad (\theta, \phi) \longrightarrow (\theta', \phi')$$

$$M \begin{pmatrix} Y_{11}(\theta',\phi') \\ Y_{10}(\theta',\phi') \\ Y_{1-1}(\theta',\phi') \end{pmatrix} = R(\alpha)\, M \begin{pmatrix} Y_{11}(\theta,\phi) \\ Y_{10}(\theta,\phi) \\ Y_{1-1}(\theta,\phi) \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} Y_{11}(\vec{n}') \\ Y_{10}(\vec{n}') \\ Y_{1-1}(\vec{n}') \end{pmatrix} = M^{+} R(\alpha)\, M \begin{pmatrix} Y_{11}(\vec{n}) \\ Y_{10}(\vec{n}) \\ Y_{1-1}(\vec{n}) \end{pmatrix}$$

e isso também vale p/ os kets $|1m\rangle$

$\vec{n}' \equiv (\theta',\phi')$ $\quad \vec{n} \equiv (\theta,\phi)$

(b) Spin

O spin é o momento angular total do sistema (elementar ou composto) em torno do CM. Note que o conceito de CM não tem sentido para o fóton; o caso de partículas de massa nula deve ser tratado separadamente.

$\boxed{j = 1/2}$ $\quad \mathcal{H}_{1/2}$ $\quad \dim = 2j+1 = 2\tfrac{1}{2}+1 = 2$

• $\mathrm{Tr}\, J_i = 0$ $\quad J_i^{+} = J_i$ $\quad$ matrizes 2×2, hermitianas de traço nulo

$\Rightarrow J_i \propto \sigma_i \Rightarrow J_i = a_i \sigma_i \quad , a_i \in \mathbb{R}$

Cayley-Hamilton

• $(J_i + 1/2)(J_i - 1/2) = 0 \Rightarrow J_i^2 = \frac{1}{4} = a_i^2 \quad \therefore \boxed{J_i = \frac{1}{2}\sigma_i}$ $\quad$ (8bis)

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$j = 1/2 \qquad m = \pm 1/2$

$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$: base $\{|jm\rangle\}$

$$\boxed{[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\, \epsilon_{ijk}\, \sigma_k} \qquad \sigma_i^2 = \mathbb{1} \quad , \mathrm{Tr}\, \sigma_i = 0$$

$$\boxed{\sigma_i \sigma_j = i\, \varepsilon_{ijk}\, \sigma_k + \delta_{ij}} \quad (16)$$

Qualquer observável de $\mathcal{H}_{1/2}$ pode ser escrito como uma combinação linear de $\mathbb{1}$ e σ_i (4 matrizes L.I)

$$M_{2\times 2} = m_0 \mathbf{1} + m_i \sigma_i = \begin{pmatrix} m_0 + m_3 & m_1 - i m_2 \\ m_1 + i m_2 & m_0 - m_3 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$(\vec{\sigma}.\vec{A})(\vec{\sigma}.\vec{B}) = \vec{A}.\vec{B} + i\,\vec{\sigma}.\,(\vec{A}\times\vec{B}) \quad (18)$$

Prova:

$$\begin{aligned} \sigma_i A_i \sigma_j B_j &= A_i B_j \,(i\varepsilon_{ijk}\sigma_k + \delta_{ij}) \\ &= i\,\varepsilon_{ijk} A_i B_j \sigma_k + \delta_{ij} A_i B_j \\ &= A_i B_i + i\, \sigma_k (\vec{A}\times\vec{B})_k \end{aligned}$$

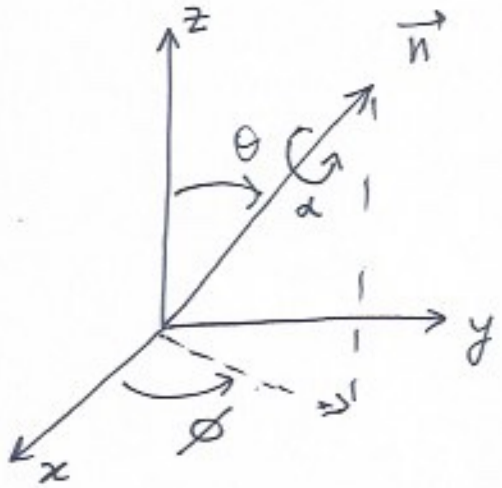
O operador unitário para rotações finitas pode então ser avaliado explicitamente

$$D^{1/2}(R) = e^{-\frac{i}{2}\alpha\,\vec{n}\cdot\vec{\sigma}}$$

$$= \cos\frac{\alpha}{2} - i(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})\,\mathrm{sen}\,\frac{\alpha}{2} \quad (19)$$

É útil definir os chamados <u>parâmetros</u> <u>de</u> <u>Cayley - Klein</u> :

$$\vec{n} = (\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi,\ \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi,\ \cos\theta)$$



$$D^{1/2}(R) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \quad (20)$$

$|a|^2 + |b|^2 = 1$ unitariedade

<u>obs</u> : a matriz unitária 2x2 tem a forma $e^{i\beta}D^{1/2}(R)$, mas a fase global não aparece nos observáveis !

Usando (19) e (20) vemos que

$$a = \cos\frac{\alpha}{2} - i\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\frac{\alpha}{2} \quad (21a)$$

$$b = -\left[\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi + i\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi\right]\mathrm{sen}\,\frac{\alpha}{2}$$

$$= -i\,e^{-i\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\frac{\alpha}{2} \quad (21b)$$

$$D^{1/2\,\dagger}(R) = \begin{pmatrix} a^* & -b \\ b^* & a \end{pmatrix}$$

$$D^{1/2+}(R)\,|+\rangle = \begin{pmatrix} a^* & -b \\ b^* & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^* \\ b^* \end{pmatrix}$$

$$= a^*|+\rangle + b^*|-\rangle$$

Esse estado rodado é um auto-estado do momento angular? Ele tem certamente $j = 1/2$, como todos os estados de $\mathcal{H}_{1/2}$ (uma rotação não pode mudar os auto-valores de J^2) Mas é também um auto-estado de uma componente particular de $\vec{J}$ com auto-valor $+1$. Vejamos

$$\sigma_3\,|+\rangle = |+\rangle \quad \Longrightarrow \quad D^{1/2+}\,\sigma_3\,|+\rangle = D^{1/2+}|+\rangle$$

$$\underbrace{D^{1/2+}\,\sigma_3\,D^{1/2}}_{\tilde{\sigma}_3}\left(D^{1/2+}|+\rangle\right) = \left(D^{1/2+}|+\rangle\right)$$

$\Longrightarrow D^{1/2+}|+\rangle$ é autovetor de $\tilde{\sigma}_3$ com auto-valor $+1$.

Seja R uma rotação em torno de $\vec{n} = (0,1,0)$

nesse caso

$$\tilde{\sigma}_3 = \left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\,\sigma_2 \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right)\sigma_3\left(\cos\frac{\alpha}{2} - i\,\sigma_2 \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= \left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\,\sigma_2 \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right)^2\sigma_3$$

$$= \left(\cos^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} + 2i\,\sigma_2 \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)\sigma_3$$

$\tilde{\sigma}_3 = \cos\alpha\, \sigma_3 - \sigma_1 \operatorname{sen}\alpha$

Note que $\alpha/2$ aparece nas rotações dos estados, enquanto que α aparece nas rotações dos operadores vetoriais (observáveis não tem valor duplo!)

No formalismo de operador estatístico (ou matriz densidade) o estado mais geral de $\mathcal{H}_{1/2}$ é descrito por

$$\rho = 1/2\,(\mathbb{1} + \vec{P}\cdot\vec{\sigma})$$ $\vec{P}$ é a polarização

$\rho^{+} = \rho \Rightarrow \vec{P}$ é um vetor real

$\mathrm{Tr}\,\rho = 1$ ✓ (por construção)

$\mathrm{Tr}\,\rho^2 = \frac{1}{2}(1+P^2) \leq 1 \quad \Rightarrow |\vec{P}| \leq 1$

$|\vec{P}| = 1$ é um estado puro

$\langle\vec{\sigma}\rangle = \mathrm{Tr}\,(\vec{\sigma}\rho) = \vec{P}$

A polarização também determina o valor esperado de qualquer operador vetorial em $\mathcal{H}_{1/2}$, pois tal operador deve ter a forma

$$\vec{V} = \lambda\vec{\sigma}$$

$$\therefore \langle\vec{V}\rangle = \lambda\vec{P}$$

Na representação que diagonaliza

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{p} = \sigma_n$$

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+P) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-P) \end{pmatrix}$$

se $P=1$ essa é uma matriz densidade de um estado puro com auto-valor $+1$ de σ_n

se $P=0$ o estado encontra-se em uma mistura 50%.(+1) e 50%.(-1)

<u>Note</u>: que como todos os observáveis em $\mathcal{H}_{1/2}$ podem ser escritos como combinações lineares de $\mathbb{1}$ e $\vec{\sigma}$, em qualquer estado de um sistema de spin 1/2 os únicos observáveis possíveis são escalares ou vetoriais (sob rotação)

Ex: se um sistema com $J=1/2$ carrega cargas e correntes, suas propriedades e.m. são descritas totalmente pela carga total (escalar) e o momento de dipolo (vetor). Multipolos superiores se anulam pois em $\mathcal{H}_{1/2}$ é impossível construir tensores de ordem mais alta! Se o momento de dipolo é elétrico ou magnético dependerá do que acontece com o sistema sob reflexão espacial e/ou reversão temporal. Veremos isso mais adiante.

$\boxed{j=1}$ $2j+1 = 3$ dim $\mathcal{H}_1$

$[J_i, J_j] = i\,\varepsilon_{ijk} J_k$ matrizes 3×3

$J_i^+ = J_i$

$\mathrm{Tr}\, J_i = 0$

$(J_i - 1) J_i (J_i + 1) = 0 \implies J_i^3 = J_i$ (Cayley-Hamilton)

$$\boxed{D^1(R) = e^{-i\theta \vec{n}\cdot\vec{J}} = 1 - i(\vec{J}\cdot\vec{n})\,\mathrm{sen}\,\theta - (\vec{J}\cdot\vec{n})^2(1-\cos\theta)}$$

(lista)

<u>obs</u>: Podemos ir de um ket de $\mathcal{H}_j$ $|jm\rangle \xrightarrow{D^j(R)} |jm'\rangle$ a todos os outros por rotação. Para spin j o operador de rotações $D^j(R)$ é um polinômio em $(\vec{J}\cdot\vec{n})$ de grau $2j$, o que fornece operadores $J_\pm$ suficientes para levar a qualquer outro estado partindo de $|jm\rangle$

Em $\mathcal{H}_1$ qualquer operador é uma matriz 3×3 que pode ser expressa como combinação linear de 9 matrizes linearmente independentes: $\mathbb{1}$, J_i, 5 tensores de ordem 2 sob rotação: $J_i J_j$ (9 bilineares) - mas eles não são completamente ind. de $\mathbb{1}$ e J_i pois

$J_i J_j - J_j J_i = i\,\varepsilon_{ijk} J_k$ (combinação anti-simétrica)

$J^2 = j(j+1) = 2$ (combinação simétrica)

Assim ficamos com a combinação simétrica que não contém J^2

$$\boxed{T_{ij} = \frac{1}{2}(J_i J_j + J_j J_i) - \frac{2}{3}\delta_{ij}}$$

tensor simétrico de traço nulo.

$\{\mathbb{1}, J_i, T_{ij}\}$

$$J_i \longrightarrow D^1(R)^+ J_i D^1(R) = \sum_k a_{ik}(R) J_k$$

transforma como um vetor sob rotação em $\mathcal{E}_3$.

os termos bilineares T_{ij} não transformam assim sob rotação mas

$$J_i J_j \longrightarrow (D^{1+}(R) J_i D^1(R))(D^{1+}(R) J_j D^1(R))$$

$$= \sum_{k,l} a_{ik}(R) a_{jl}(R) J_k J_l$$

que é a lei de transformação de um tensor de ordem 2 em $\mathcal{E}_3$

Qualquer observável no espaço de spin 1, $\mathcal{H}_1$, pode ser escrito como uma combinação linear de $\{\mathbb{1}, J_i, T_{ij}\}$

Em particular a matriz densidade tem a forma.

$$\rho = \frac{1}{3}(\mathbb{1} + \vec{P}\cdot\vec{J} + W_{ij} T_{ij})$$

W_{ij} é um conj. de 5 números reais

Mesmo se o estado não tiver polarização ($\vec{P} = 0$) pode não ser esfericamente simétrico se $W_{ij} \neq 0$.

Nesse caso nenhum operador vetorial (ex: momento de dipolo) teria um valor esperado não-nulo nesse estado, mas um quadrupolo teria valor esperado não-nulo para qualquer estado de spin 1

$\boxed{j \text{ arbitrario}}$ Podemos generalizar as lições que aprendemos com $j = 1/2$ e $j = 1$

— um conj completo de matrizes no espaço $\mathcal{H}_j$ de dim $2j+1$ deve ter $(2j+1)^2$ membros L.I:

$\{ \mathbb{1}, J_i, T_{ij}, \text{etc} \dots \}$

— qualquer operador vetorial pode ser escrito como

$$V_i = \lambda_V J_i$$

onde λ_V é invariante (escalar) por rotação

$$\Rightarrow \langle jm | V_i | jm' \rangle = \lambda_V \langle jm | J_i | jm' \rangle$$

— qualquer operador tensor de ordem 2 simétrico de traço nulo em $\mathcal{H}_j$ tem elementos de matriz

$$\langle jm | X_{ij} | jm' \rangle = \lambda_X \langle jm | \tfrac{1}{2} (J_i J_j + J_j J_i) | jm' \rangle$$

$$- \frac{\lambda_X}{3} j(j+1) \delta_{ij} \delta_{mm'}$$

λ_X é uma constante que depende apenas das especificidades de X_{ij}
i.e. 5 matrizes de dim $2j+1$ que são completamente especificadas a menos de uma constante.

<u>OBS</u>: as matrizes de rotação $D^j(R)$ de $\mathcal{H}_j$ <u>não</u> constituem a transf. unitária mais geral no espaço $(2j+1)$-dimensional. P/ todo j elas dependem de 3 parâmetros reais p/ especificar uma rotação em $\mathcal{E}_3$., enquanto que a transf. unitária em $\mathcal{H}_j$ é especificada por $(2j+1)^2$ parâmetros reais. Apenas p/ $j = 1/2$ as rotações são suficientes p/ exaurir as transf. unitárias de $\mathcal{H}_{1/2}$.