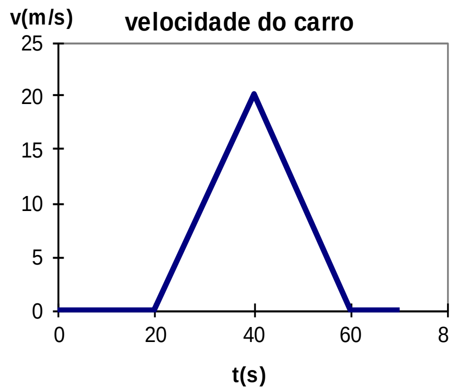
Sumário

Determinação da posição a partir da velocidade e da aceleração

Posição a partir do gráfico da velocidade no tempo

1) Automóvel que acelera e breca em seguida

O movimento de um automóvel está representado no gráfico ao lado.



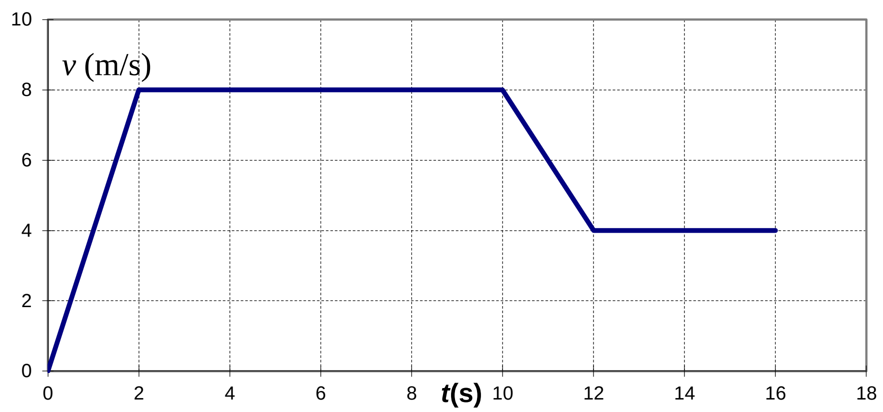
a) Determine a posição do automóvel nos instantes: t=0 s; t = 20 s; t = 40 s; t = 60 s e t = 70 s .

b) Esboce o gráfico de $x(t)$ no intervalo $0 \le t \le 70$ s .

2) Corredor que muda de aceleração durante o percurso

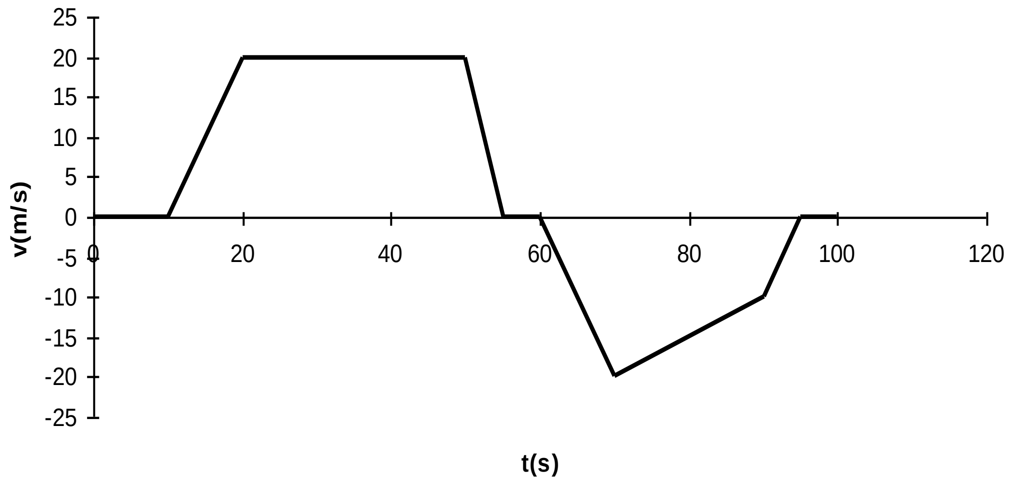
A velocidade de um corredor varia com o tempo conforme o gráfico da figura abaixo.

Determine a distância que o corredor percorre entre 0 e 16 s.



3) Veículo que muda de aceleração e inverte o movimento durante o percurso

O gráfico de velocidade em função do tempo abaixo representa o movimento de um veículo numa avenida. No instante t = 55 s, o veículo contorna o canteiro central e retorna pela outra pista.

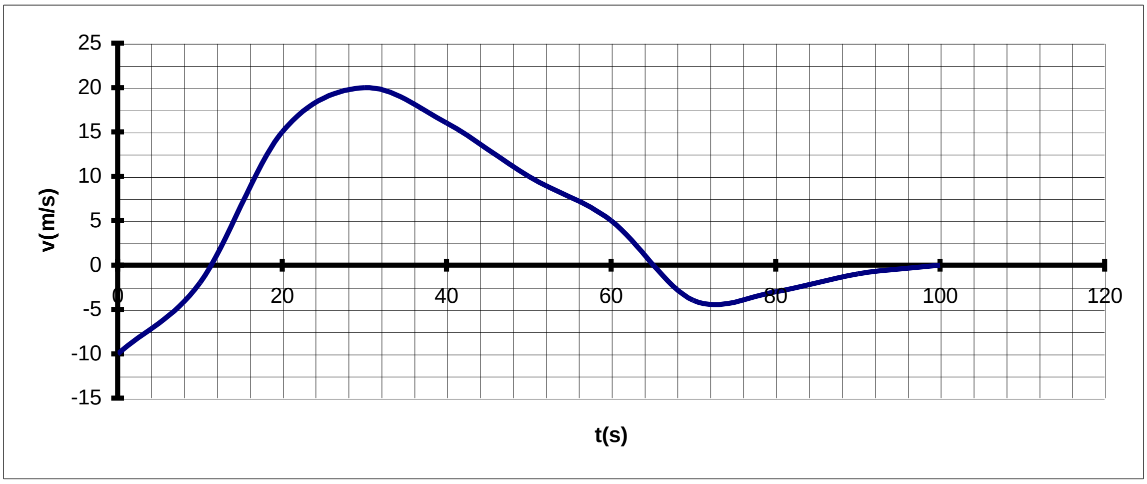


a) Determine, em t =100 s, a que distância o carro está do ponto que ocupava em t = 0 s.

b) Esboce o gráfico da posição em função do tempo.

4) Ônibus com aceleração variável ao longo de todo o percurso

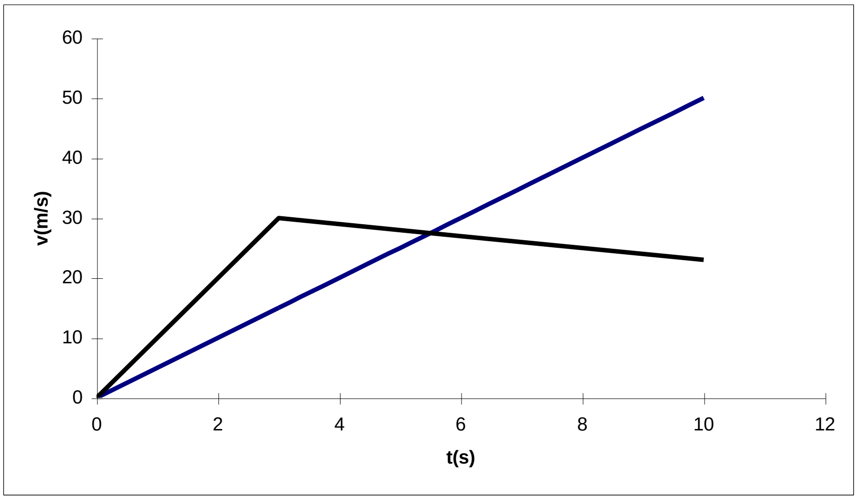
Determine o deslocamento entre t = 100 e t = 0 s do ônibus cujo gráfico $v(t)$ está desenhado abaixo. O método gráfico mais simples consiste em contar o número de quadrículas contidas entre o gráfico e o eixo, tomando o cuidado de estimar que fração ficou entre o gráfico e o quadriculado, para as quadrículas cortadas pelo gráfico. Uma quadrícula equivale a 2,5 m/s × 4 s = 10 m.



5) Corrida de 2 autos, com acelerações uniformes por intervalos de tempo

No desenho ao lado, estão os gráficos das velocidades de dois carros de corrida em um autódromo, que, inicialmente alinhados, arrancam simultaneamente ao sinal verde.

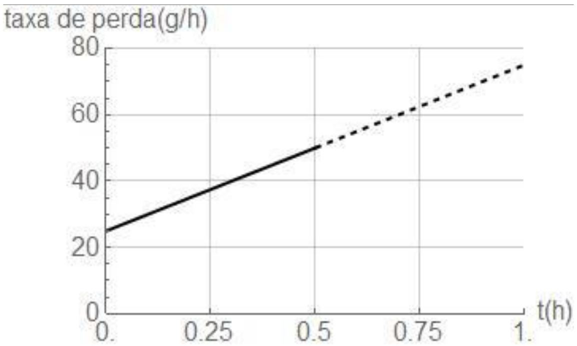
Determine o instante em que o carro que saiu na frente é ultrapassado pelo outro.



6) Integral aplicada a um caso fora da mecânica

O pneu de um automóvel contém, no seu interior, 52 g de ar. No instante t = 0 h, um prego faz um pequeno furo por onde vaza ar, numa taxa de vazamento (ou "velocidade" com que o ar é perdido) descrita pelo gráfico ao lado.

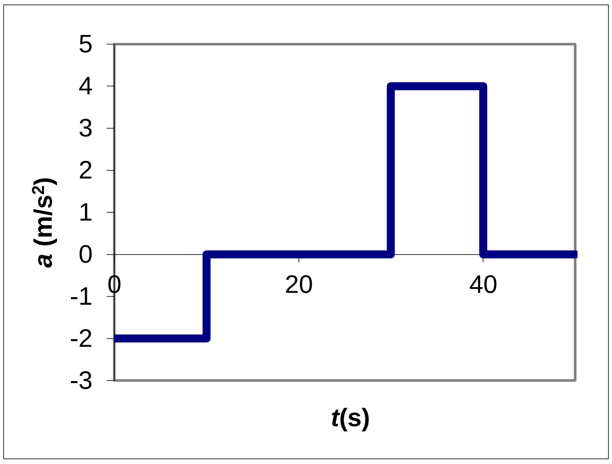
Determine quanto ar o pneu contém no instante t = 0,50 h.



Integral: posição a partir da aceleração.

7) Aceleração constante por pedaços

A aceleração em função do tempo de um objeto é descrita pelo gráfico ao lado; suponha que em t = 10, 30 e 40 s a aceleração mude de valor instantaneamente, de modo que o valor exato da aceleração nesses instantes não tem importância. A velocidade e posição em t = 0 s são $v(0)$ = 10 m/s e $x(0)$ = 100 m.

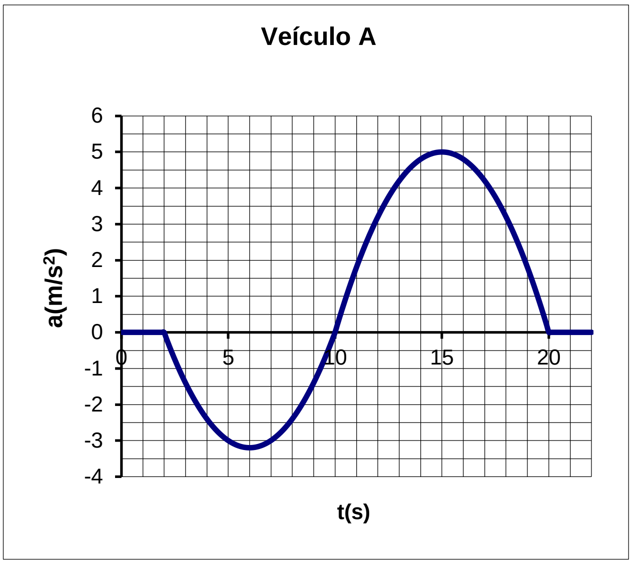


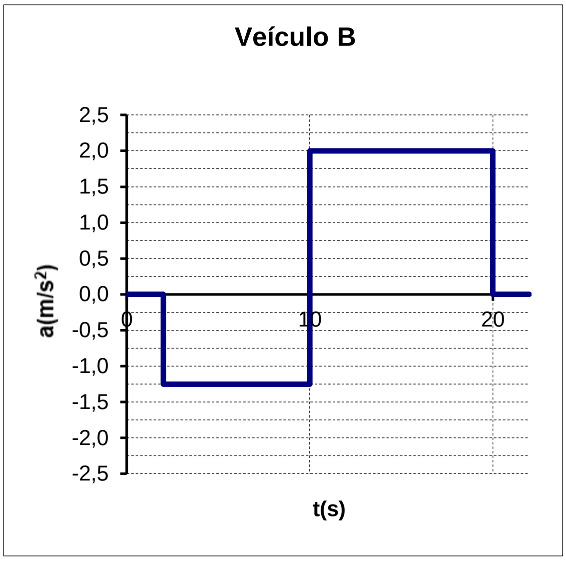
Determine o gráfico de:

a) $v(t)$
b) $x(t)$

*8) Aceleração variável continuamente comparada com aceleração constante por intervalos

Os gráficos abaixo descrevem as acelerações dos veículos A e B que, em t = 0 s, têm velocidade 30 m/s e estão na posição –20 m no sistema de referência escolhido. Responda as questões abaixo para os dois veículos.





a) Determine as velocidades v_A e v_B nos instantes t = 10 s e 20 s.
b) Esboce os gráficos $v_A \times t$ e $v_B \times t$.
c) Determine as posições dos veículos A e B em t = 2, 10 e 20 s.
d) Esboce os gráficos de posição em função do tempo para A e B, $x_A \times t$ e $x_B \times t$.

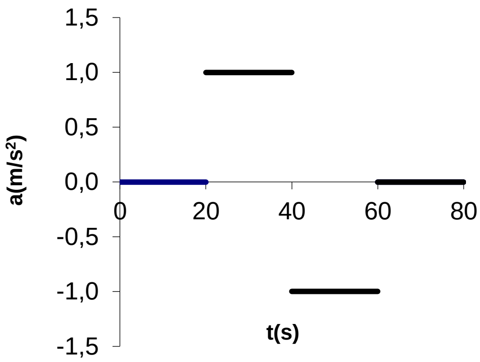
A área sob a curva da aceleração permite deduzir a VARIAÇÃO da velocidade (e não a velocidade); leve em conta as condições iniciais.

Faça os gráficos em papel quadriculado, marque valores numéricos nas escalas dos gráficos e determine as áreas sob as curvas contando o número de quadrículas.

O traço vertical no gráfico correspondente ao veículo B em t = 2; 10, e 20 s indica que a mudança de aceleração é tão brusca que o valor exato da aceleração nesses instantes não tem importância.

9) Aceleração constante por intervalos e várias condições iniciais da velocidade

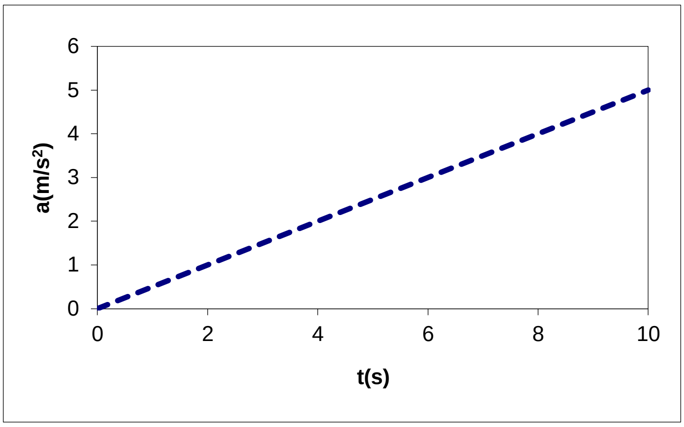
A partir do gráfico de aceleração em função do tempo ao lado, determine os gráficos de $v(t)$ e $x(t)$ para t no intervalo de 0 a 70 s, sabendo que $x(0)$ =100 m e que em t = 20, 40 e 60 s, a aceleração muda de valor instantaneamente, nas seguintes situações:



a) $v(0)$ = 0 m/s;
b) $v(0)$ = 10 m/s;
c) $v(0)$ = –10 m/s.

10) Uma freada brusca - aceleração linear no tempo

Em um ônibus que está se movendo a 72 km/h, o motorista começa a frear, aumentando lentamente a pressão sobre os freios, de maneira que o módulo da aceleração aumenta com o tempo de acordo com o gráfico da figura ao lado.



Determine o tempo que o ônibus demora a parar.

O gráfico está desenhado em linha pontilhada porque a aceleração cai a zero quando o carro para, o que acontece antes de t = 10 s.

Descrevendo o movimento pela velocidade

11) Aceleração constante por intervalos

Uma motorista dirige seu veículo numa estrada plana e retilínea a **30 m/s**, quando avista uma placa indicando a velocidade máxima permitida de **15 m/s**. Devido a um ônibus "grudado na traseira", demora **1,0 s** para tirar o pé do acelerador e consegue reduzir a velocidade lentamente, com aceleração constante, demorando **10,0 s** para chegar à velocidade máxima permitida.

Adote a origem do tempo, t = 0 s, no momento que a motorista avista a placa e determine:

a) o gráfico da velocidade do veículo em função do tempo de t = **0 s** até t = **30 s.**
b) a aceleração **durante a redução da velocidade**;
c) o deslocamento do veículo **durante a redução da velocidade**.

Integração conhecendo as condições iniciais e a equação horária.

12) Equação da posição dada a da velocidade e as condições iniciais

Determine $x(t)$ dado que a velocidade da partícula é, em m/s para t em s:

a) $v(t)= 3t^2-t+2$, e a posição em t_0=0 s é x_0 = 0 m.
b) $v(t)= t^2-4$, e a posição em t_0=0 s é x_0 = 10 m.
c) $v(t)=-t^2+2t+1$, e a posição em t_0=2 s é x_0 = 0 m. *Atenção, não confunda x_0 com $x(t=0)$.*
d) $v(t)=(3/2)t^2-3t+1$, e a posição em t_0=1 s é x_0 =3 m
e) $v(t)=t^2+t-2$, e a posição em t_0=-1 s é x_0 =2 m
f) $v(t)=-t^2+2t+1$, e a posição em t_0=2 s é x_0 =0 m

13) Equação da posição dada a da aceleração e as condições iniciais

A aceleração de uma partícula é ***a(t)= –0,2 t + 1*** em m/s^2 para t em s**,** sendo que em $\boldsymbol{t_0=0}$ **s** a posição ***x*** é ***x(0) = 10*** m e a velocidade é ***v(0) = 10*** m/s .

Determine *x(t)* no intervalo [0 s; 10 s].

*14) Equação da posição dada a da aceleração, que muda bruscamente no meio do intervalo, e as condições iniciais

Uma partícula em $\boldsymbol{t_0=0}$ ***s*** está na posição ***x(0) = -50*** cm com velocidade ***v(0) = 20*** cm/s. Sua aceleração em função do tempo é $a(t) = \begin{cases} 2{,}0t & 0 \leq t \leq 5 \\ -1{,}0t + 15 & 5 < t \leq 15 \end{cases}$ em cm/s^2 para t em s

Determine *x(t)* no intervalo [0 s; 15 s].

*15) Comparação do efeito das condições iniciais da velocidade na equação da posição, quando a aceleração é conhecida.

Um corpo que em t = 0 s está na posição x(0) = 100 m, tem aceleração em função do tempo dada pela função:$a(t) = \begin{cases} 0{,}2t & 0 \leq t < 10 \\ -0{,}4t + 6{,}0 & 10 \leq t \leq 15 \end{cases}$ em m/s^2 para t em s.

Determine a posição em função do tempo, $x(t)$, no intervalo $0 \leq t \leq 15$ s, quando a velocidade em t=0 s é

a) v(0) = 0;
b) v(0) = 10 m/s;
c) v(0) = –10 m/s.

Integral em um intervalo definido, formal.

16) Área sob a curva num intervalo dado

Determine a integral de ***y=f(x)***, de ***a*** a ***b***, por meio da antiderivada ***A(x),*** nos casos:

a) $f(x)=3x-x^2$, $a=1, b=2;$
b) $f(x)=x^2+x+1$, $a=-2, b=1;$
c) $f(x)=6+x-x^2$, $a=-2, b=-1.$

17) Integração numérica

Calcule a integral definida $S = \int_a^b f(x)dx$ de duas maneiras: i) pela soma $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ considerando n segmentos Δx_i todos iguais e x_i o ponto médio do i-ésimo intervalo; ii) calculando analiticamente a integral definida. Em cada item, a, b e n são dados.

a) $f(x)=x+1$, $a=1, b=3, n=1;$

b) $f(x)=x^2$, $a=-2, b=-1, n=5;$

c) $f(x)=1/x^2$, $a=1, b=2, n=5;$ considerando 4 casas decimais

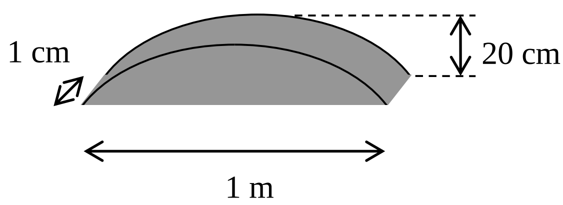
*18) Aplicação da integral na determinação da massa de um objeto

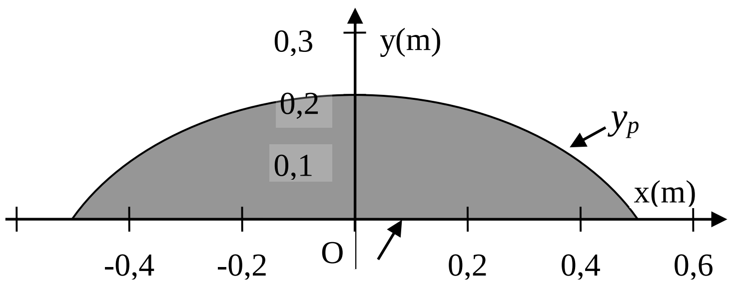
Um serralheiro constrói peças curvas dobrando-as sobre moldes de Al. A quantidade de material usado nesses moldes são parte importante do custo total, de modo que ele precisa calcular a massa desses moldes para dar um orçamento. A massa é calculada pelo produto do volume da peça pela densidade do Al, 2,7 g/cm^3. O item a) trata de um molde com forma geométrica que dá um cálculo de volume simples, já no item b) a maneira mais fácil de calcular o volume usa uma integral.

Determine o **volume** e a correspondente **massa de Al** para produzir cada molde descrito abaixo.

a) *Molde para dobrar uma tira metálica e construir uma braçadeira*. O molde é metade de um disco com 9,0 cm de raio e 1,00 cm de espessura.

b) *Molde para dobrar as nervuras de uma antena parabólica*. A figura abaixo representa a forma do molde, que será feito de uma chapa com 1,00 cm de espessura, 1,00 m de largura e 0,20 m de altura. A parábola que define a forma do molde é descrita pela equação $y_p = 0{,}20 - 0{,}80x^2$, em m para x em m, cujo gráfico está na figura abaixo; ao determinar a área das faces maiores do molde por integração, note a propriedade: $y_p(x = -0{,}50) = y_p(x = 0{,}50) = 0$.





Velocidade Média é a média temporal da velocidade

19) HRK E2.26 modificado – Corredor da maratona

Um corredor realiza a prova de 100 m em aproximadamente 10,0 s; outro corredor realiza a maratona (42,2 km) em cerca de 2 h 10 min.

Determine:

a) a velocidade escalar média de cada um.
b) o tempo para realizar a maratona mantendo a velocidade média da prova de 100 m.

20) Ônibus interurbano

Um ônibus sai da cidade A e chega na cidade B, rodando metade do *tempo* a 56,3 km/h e a outra metade, a 88,5 km/h. Na volta, ele percorre metade da *distância* a 56,3 km/h e a outra metade a 88,5 km/h.

Determine a velocidade escalar média no percurso:

a) da cidade A até à cidade B.
b) de B até A, na volta.
c) completo (ida e volta).

21) HRK E2.30 modificado para SI - Caminhada

Uma corredora faz um percurso retilíneo de treino em que primeiro anda a 1,2 m/s e depois corre a 3,0 m/s.

Determine sua velocidade escalar média quando ela:

a) caminha 72 m e depois corre 72 m.
b) caminha 1,0 min e depois corre durante 1,0 min.

Este exercício procura mostrar que o termo "média" da expressão velocidade média, quando não qualificada, refere-se, por convenção, à média temporal

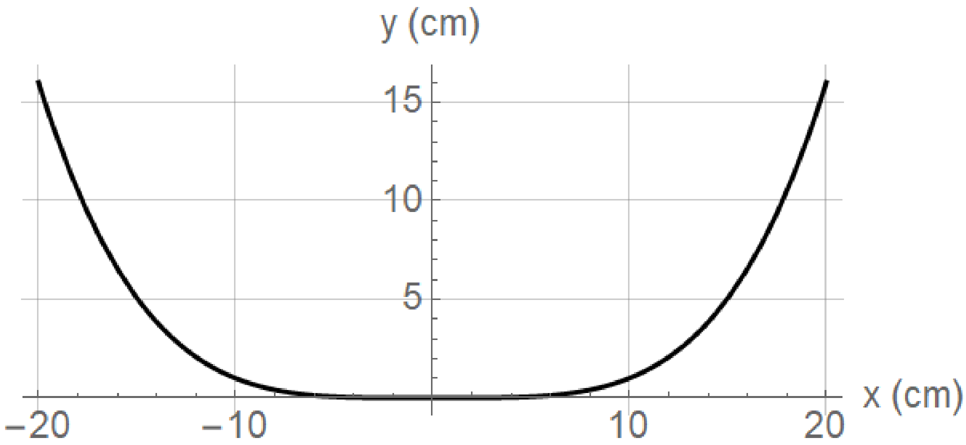
Usando a integral na cinemática e no cálculo de áreas

22) Aplicação da integral no cálculo do volume que cabe em um recipiente

Em uma usina de reprocessamento, o Pu (plutônio) é transportado dissolvido por calhas de 40 cm de largura máxima e que têm um perfil arredondado, dado pela equação

$$y(x) = 0{,}1\, x \left(\frac{x}{a}\right)^3$$

em que a = 10,0 cm.



Calcule

a) o volume máximo de líquido por cada metro dessa calha.
b) a altura ocupada pelo líquido, quando há 20,0 L de líquido por cada metro dessa calha.

23) Propriedades do Movimento Uniformemente Acelerado

A imagem abaixo, do museu galileo (https://catalogue.museogalileo.it/index.html, acesso em 18/5/21 – procure por "inclined plane") é usada para demonstrar uma propriedade dos movimentos uniformemente acelerados: quando um corpo é abandonado no topo do plano, os deslocamentos sucessivos de mesma duração estão na proporção dos números ímpares, a começar de 1. Assim, a montagem é feita de forma que a bola que rola o plano esbarra nas campainhas, que estão separadas por distâncias crescentes e proporcionais a 1, 3, 5, 7 e 9. Essa demonstração pode ser encontrada no Laboratório de Demonstrações Ernst W. Hamburger aqui no IF, mas infelizmente não dispomos de um vídeo que exiba o efeito sonoro provocado pela bola tocando os sinos compassadamente. O texto do museu esclarece que não há documento escrito provando que Galileu realizou esse experimento em particular e que a demonstração foi produzida a partir de uma pintura que

representava Galileu usando o equipamento. No entanto, tem-se certeza que Galileu realizou muitos experimentos com corpos rolando planos inclinados de vários ângulos e cronometrava o movimento. Galileu sabia e divulgou que o movimento de queda livre, quando o atrito pode ser ignorado, é tal que os deslocamentos sucessivos de mesma duração estão na proporção dos números ímpares.

Nesta questão, propomos verificar duas propriedades do movimento uniformemente acelerado (MUA) e que valem apenas para o MUA e relacionar essas propriedades com a fórmula matemática da equação horária do MUA.

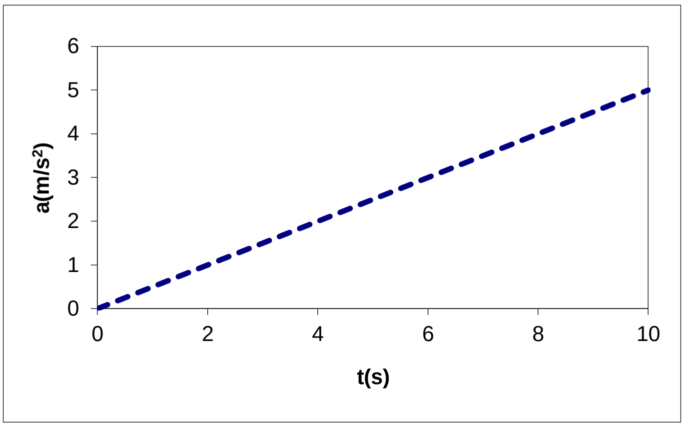
Mostre, tanto algebricamente com as equações horárias do MUA quanto graficamente, a partir da relação entre a área embaixo da curva da velocidade e o deslocamento, as propriedades:

i. Os deslocamentos sucessivos de mesma duração de um corpo abandonado em queda livre estão na proporção dos números ímpares, a começar de 1.
ii. A velocidade média em um certo intervalo de tempo é igual à velocidade no instante do meio do intervalo.

Mostre que $\sum_{i=1}^{N}(2n-1) = N^2$, tanto algebrica quanto graficamente.

24) Cinemática da freada brusca, com aceleração linear no tempo

Em um ônibus que está se movendo a 72 km/h, o motorista começa a frear, aumentando lentamente a pressão sobre os freios, de maneira que o módulo da aceleração aumenta com o tempo de acordo com o gráfico da figura ao lado.



Determine:

a) o tempo que o ônibus demora a parar.
b) a equação horária da velocidade
c) a distância percorrida até parar

O gráfico está desenhado em linha pontilhada porque a aceleração cai a zero quando o carro para, o que acontece antes de t = 10 s.

25) Uma freada suave, com aceleração parabólica no tempo

O exercício 24 corresponde a uma freada brusca, que demora um pouco menos que 9 s. Nesta questão, o motorista, quando está a 20 m/s, começa a frear suavemente, aumenta a pressão no freio até atingir o máximo 4,5 s depois do início da freada e, a partir desse instante, reduz gradualmente a pressão no freio até que o ônibus para totalmente 9 s após o início da freada e com aceleração nula nesse exato instante. A equação horária da aceleração é bem aproximada por uma função parabólica no tempo.

Determine:

Pena que o metrô não freie assim.

a) A equação horária da aceleração.
b) A equação horária da velocidade.
c) A distância percorrida durante a freada.