Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3210 - Mecânica dos Sólidos I

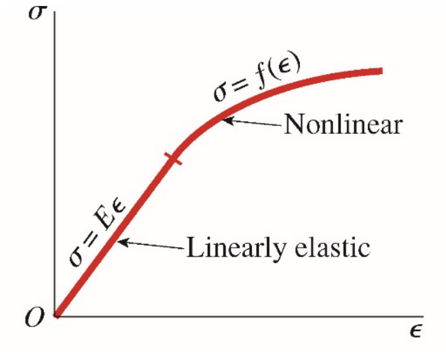
Aula #08

Prof. Dr. Clóvis de Arruda Martins

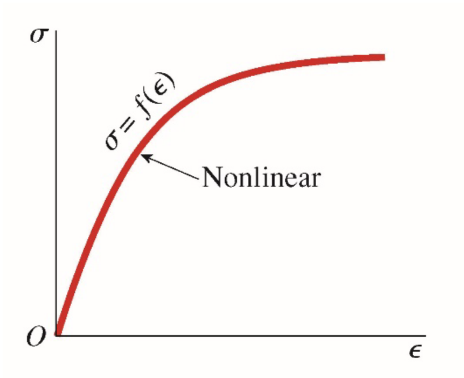
26/04/22

2.11 Comportamento não-linear

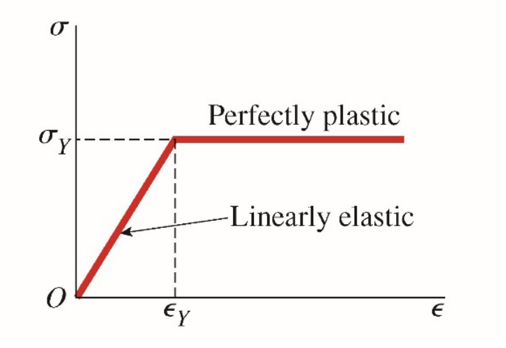
Elástico Não-Linear



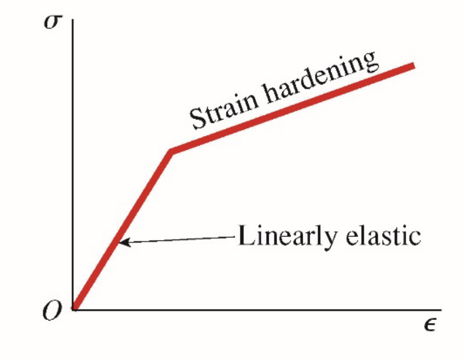
Não-Linear



Elastoplástico

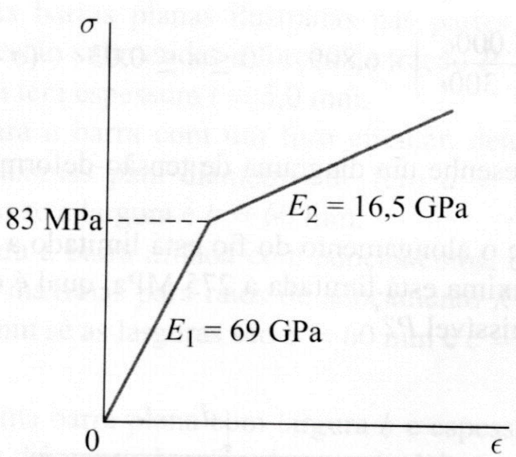


Bilinear



2.11-5 Uma barra de alumínio submetida a forças de tração P tem comprimento L = 3,8 mm e área de seção transversal A = 1.290 mm². O comportamento de tensão-deformação do alumínio pode ser representado aproximadamente pelo diagrama de tensão-deformação bilinear representado na figura.

Calcule o alongamento δ da barra para cada uma das cargas a seguir: P = 35 kN, 70 kN, 106 kN, 140 kN e 180 kN. A partir desses resultados, trace um diagrama de carga P *versus* alongamento δ (diagrama de carga-deslocamento).



$$P_y = \sigma_y A = 107{,}1kN$$

i) $P = 70kN \; < P_y$

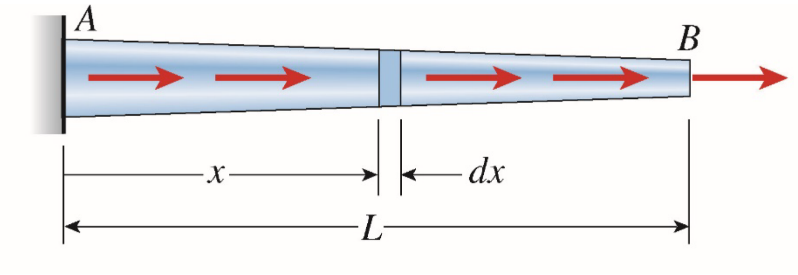
$$\delta = \frac{PL}{E_1 A} = 2{,}99mm$$

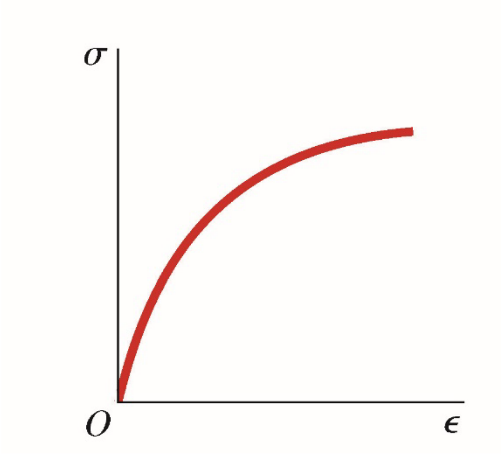
ii) $P = 140kN \; > P_y$

$$\delta_y = \frac{P_y L}{E_1 A} = 4{,}57mm$$

$$\delta = \delta_y + \frac{(P - P_y)L}{E_2 A} = 10{,}47mm$$

Variação do comprimento das barras





$$dx \ \rightarrow \varepsilon(x)dx$$

$$\delta = \int_0^L \varepsilon(x)dx$$

Lei de Tensão-Deformação de Ramberg-Osgood

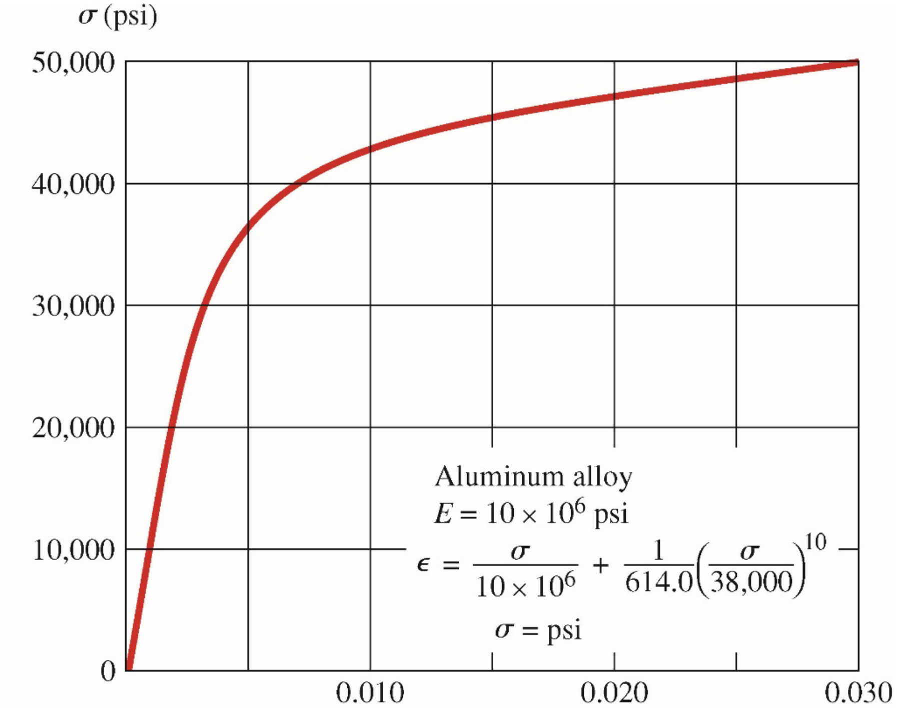
$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + \alpha\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m$$

ou, fazendo $E = \dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$,

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha\frac{\sigma_0}{E}\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m$$

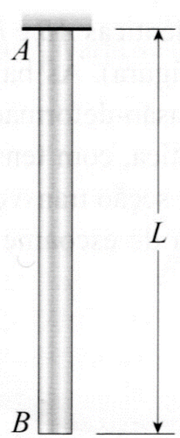
Constantes do material:

$$E, \sigma_0, \alpha, m$$



2.11-1 Uma barra AB, de comprimento L e peso específico γ, está suspensa sob a ação de seu próprio peso (veja a figura). A relação de tensão-deformação para o material é dada pela equação de Ramberg-Osgood (Equação 2.71):

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{\sigma_0 \alpha}{E}\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m$$



Deduza a fórmula para o alongamento da barra

$$N(x) = \gamma A(L - x)$$

$$\sigma_x(x) = \gamma(L - x)$$

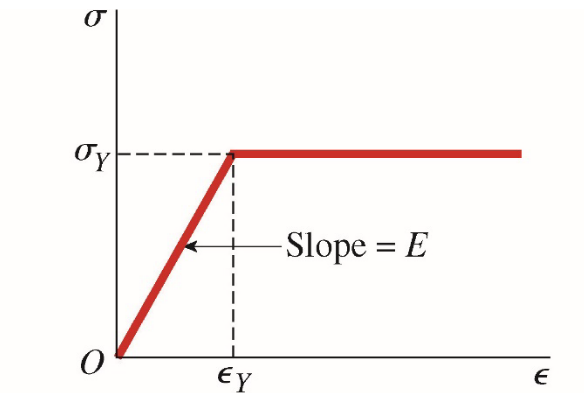
$$\delta = \int_0^L \varepsilon \, dx$$

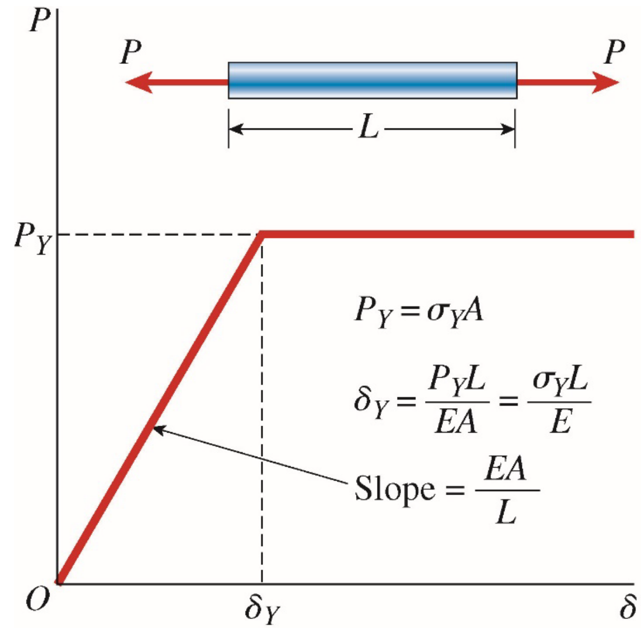
$$= \int_0^L \left[\frac{\sigma_x(x)}{E} + \frac{\sigma_0 \alpha}{E}\left(\frac{\sigma_x(x)}{\sigma_0}\right)^m\right] dx$$

$$= \frac{\gamma}{E}\int_0^L (L - x) dx + \frac{\sigma_0 \alpha}{E}\left(\frac{\gamma}{\sigma_0}\right)^m \int_0^L (L - x)^m dx$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{\gamma L^2}{2E} + \frac{\sigma_0 \alpha L}{(m+1)E}\left(\frac{\gamma L}{\sigma_0}\right)^m$$

2.11 Análise elastoplástica



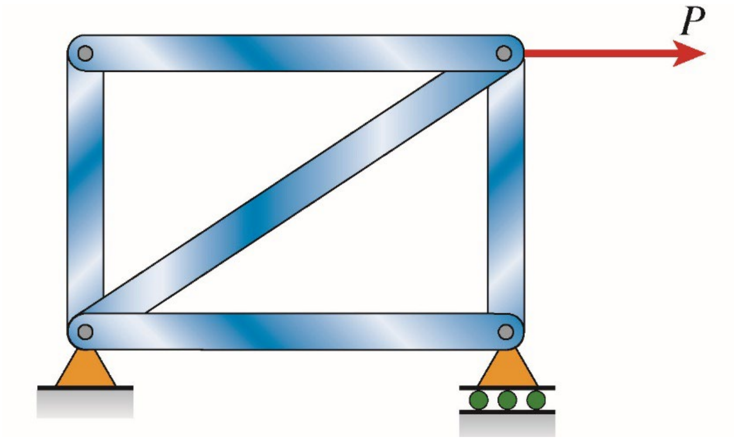


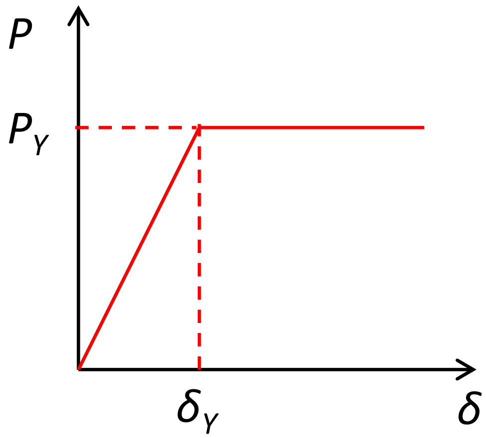
σ_y →tensão de escoamento

P_y →carga de escoamento

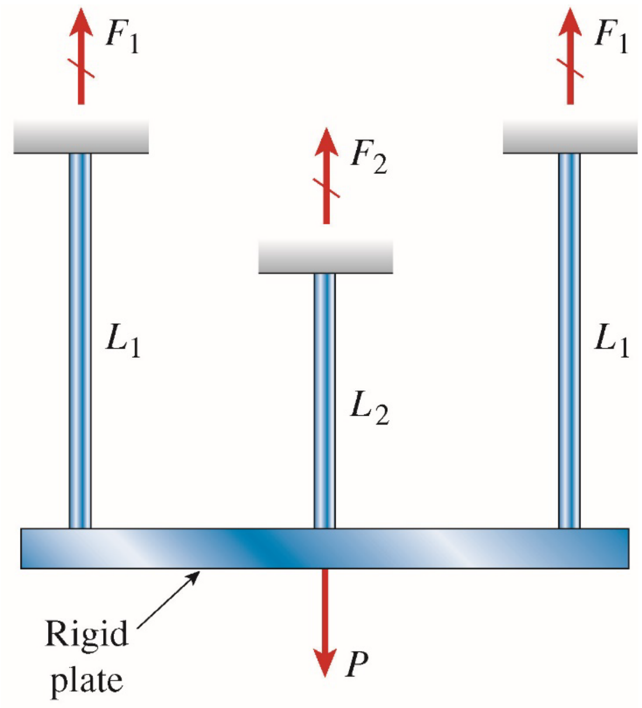
δ_y →deslocamento de escoamento

Estrutura estaticamente determinada





Estrutura estaticamente indeterminada



Para carga P *pequena*:

i) Equilíbrio:

$$2F_1 + F_2 = P$$

ii) Compatibilidade de deslocamentos:

$$\delta_1 = \delta_2$$

iii) Relações força-deslocamento:

$$\delta_1 = \frac{N_1 L_1}{EA} = \frac{F_1 L_1}{EA}$$

$$\delta_2 = \frac{N_2 L_2}{EA} = \frac{F_2 L_2}{EA}$$

Resultam:

$$F_1 = \frac{P L_2}{L_1 + 2L_2} \quad F_2 = \frac{P L_1}{L_1 + 2L_2}$$

Tensões normais nas barras:

$$\sigma_1 = \frac{F_1}{A} = \frac{PL_2}{A(L_1 + 2L_2)}$$

$$\sigma_2 = \frac{F_2}{A} = \frac{PL_1}{A(L_1 + 2L_2)}$$

Como $L_1 > L_2 \Rightarrow \sigma_2 > \sigma_1$

$\Rightarrow$ com o aumento de P a primeira barra a plastificar é a de comprimento L_2

Fazendo $\sigma_2 = \sigma_y$: $\quad \sigma_y = \dfrac{P_y L_1}{A(L_1 + 2L_2)}$

$$\Rightarrow P_y = \sigma_Y A\left(1 + 2\frac{L_2}{L_1}\right) \quad \text{(carga de escoamento)}$$

$$\Rightarrow \delta_y = \frac{\sigma_y L_2}{E} \quad \text{(deslocamento de escoamento)}$$

- Para $P > P_y$, a força na barra de comprimento L_2 permanece constante e a estrutura comporta-se como uma estrutura isostática:

$$F_2 = \sigma_Y A$$

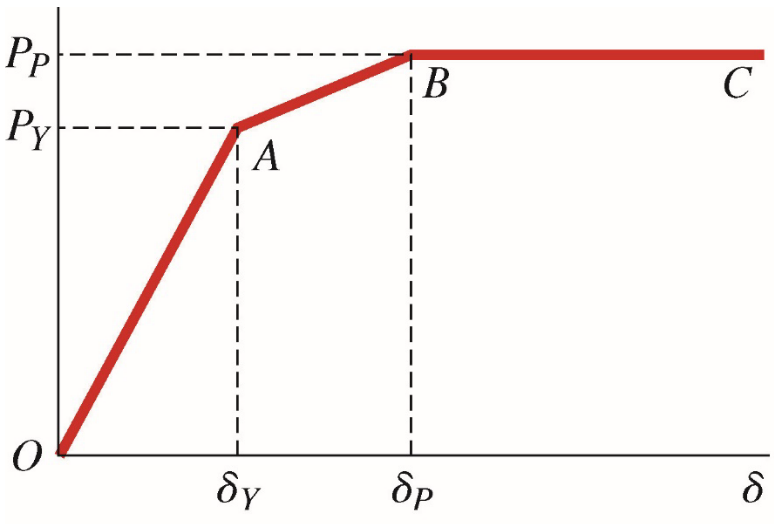
como $2F_1 + F_2 = P \quad \Rightarrow F_1 = \dfrac{P - \sigma_y A}{2}$

-Até que todas as barras se plastifiquem:

$$F_1 = F_2 = \sigma_y A$$

$$P_p = 3\sigma_y A$$

(carga plástica)



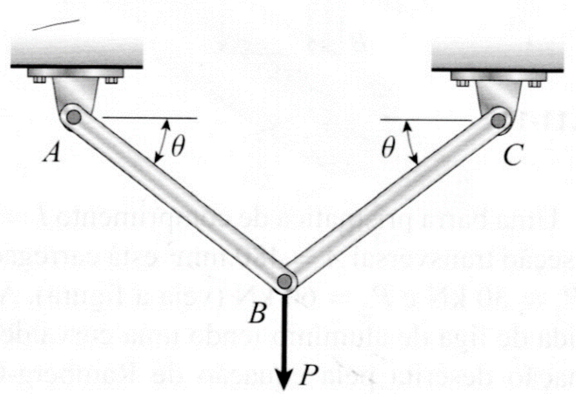
$$\delta_p = \frac{F_1 L_1}{EA} = \frac{\sigma_1 L_1}{E} = \frac{\sigma_Y L_1}{E}$$

(deslocamento plástico)

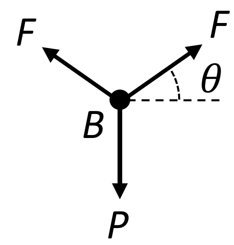
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

2.12-1 Duas barras idênticas AB e BC sustentam uma carga vertical P (veja a figura). As barras são feitas de aço, tendo uma curva de tensão-deformação que pode ser idealizada como elastoplástica, com tensão de escoamento σ_Y. Cada barra tem área de seção transversal A.

Determine a carga de escoamento P_Y e a carga plástica P_P.



i) Equilíbrio do nó *B:*



$$P = 2F\,\mathrm{sen}\,\theta$$

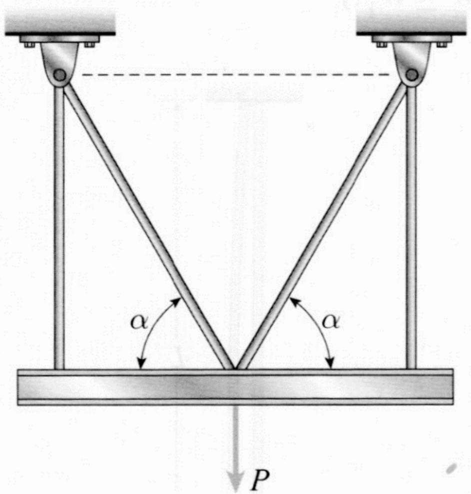
ii) Carga de escoamento

$$F_y = \sigma_y A \quad \Rightarrow P_y = 2\,\sigma_y\,A\,\mathrm{sen}\,\theta$$

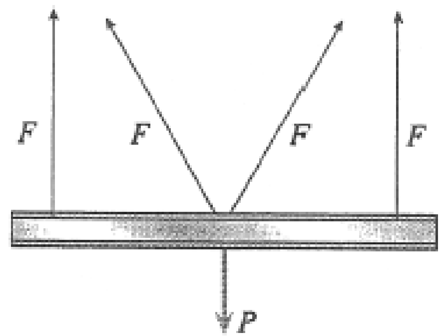
iii) Para uma estrutura isostática a carga de escoamento e a carga plástica coincidem

$$P_p = P_y$$

2.12-4 Uma carga P age numa viga horizontal sustentada por quatro hastes arranjadas na forma simétrica ilustrada na figura. Cada haste tem área de seção transversal A e é feita de um material elastoplástico, tendo tensão de escoamento σ_Y. Determine a carga plástica P_P.



i) DCL na situação limite:



$$F = F_y = \sigma_y\, A$$

ii) Equilíbrio na situação limite:

$$P = 2\,F\,(1 + \operatorname{sen}\alpha)$$

iii) Carga Plástica:

$$P_p = 2\,\sigma_y\,A\,(1 + \operatorname{sen}\alpha)$$

Referência:

Gere, J.M., Goodno, B.J. Mecânica dos Materiais – Tradução da 7ª edição norte-americana. Cengage Learning, 2010, 860p, Capítulo 2.