2021-1, "STATPHYS", AULA 10

OBJETIVOS: DISCUTIR INVARIÂNCIA POR ESCALA (AUTO-SIMILARIDADE) E LEIS DE POTÊNCIA

COMPORTAMENTO DE ESCALA

VIMOS QUE UMA DENSIDADE ρ "PRÓXIMA" DE UMA DENSIDADE ESTÁVEL ρ^* PODE SER EXPRESSA COMO

$$\rho(x) = \rho^*(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n \theta_n(x) \quad ,$$

ONDE $\{\theta_n\}$ É UMA BASE DO "ESPAÇO DE PERTURBAÇÕES" FORMADA POR AUTOFUNÇÕES $DT_2[\theta_n(x)] = \lambda_n \theta_n(x)$ DA LINEARIZAÇÃO EM TORNO DE ρ^*

$$DT_2[\eta(x)] = 2 \cdot 2^{1/\alpha} \int d\xi \, \rho^*(2^{1/\alpha} x - \xi)\, \eta(\xi)$$

DA TRANSFORMAÇÃO DE RENORMALI-

ZAÇÃO

$$\rho'(x) = T_2[\rho(x)] = 2^{1/\alpha}\int d\xi\, \rho(2^{1/\alpha}x - \xi)\rho(\xi).$$

É INTERESSANTE ANALISAR O EFEI-TO DE T_2 NA FUNÇÃO GERADORA DE CUMULANTES!

$$\Psi[\rho'(x), k] = \log \phi'(k) =$$

$$= \log\left\{\int dx\, e^{ikx}\rho'(x)\right\} =$$

$$= \log\left\{\int dx\, e^{ikx}\left[2^{1/\alpha}\int d\xi\, \rho(2^{1/\alpha}x - \xi)\rho(\xi)\right]\right\}$$

$$= \log\left\{\int du\, e^{i\frac{k}{2^{1/\alpha}}u}\left[\int d\xi\, \rho(u-\xi)\rho(\xi)\right]\right\} =$$

$$= \log\left[\phi\left(\frac{k}{2^{1/\alpha}}\right)\cdot\phi\left(\frac{k}{2^{1/\alpha}}\right)\right]$$ CONVOLUÇÃO!

$$= 2\log\phi\left(\frac{k}{2^{1/\alpha}}\right) = 2\cdot\Psi\left[\rho(x), \frac{k}{2^{1/\alpha}}\right]$$

DADAS T_2 E ρ^*, QUALQUER ρ É CARACTERIZADA POR $\{v_n\}$. "ABUSANDO" DE Ψ,

$$\boxed{\psi(\nu_1', \nu_2', \dots, K) = 2 \cdot \psi(\nu_1, \nu_2, \dots, K/2^{1/\alpha})}.$$

SABEMOS QUE $\nu_j' = \lambda_j \nu_j$. PORÉM, PARA "DESTACARMOS" O FATOR DE ESCALA $\boxed{\lambda = 2}$, VAMOS INTRODUZIR EXPOENTES a_j TAIS QUE $\boxed{\lambda_j = \lambda^{a_j}}$ E $\boxed{\lambda^{a_K} = 2^{1/\alpha}}$. POR "ELEGÂNCIA" (O QUE IMPORTA É A RAZÃO ENTRE OS PARÂMETROS), $K \to K \cdot 2^{1/\alpha}$ E TEMOS

$$\boxed{\psi(\lambda^{a_1}\nu_1, \lambda^{a_2}\nu_2, \dots, \lambda^{a_K} K) = \lambda \cdot \psi(\nu_1, \nu_2, \dots, K)}.$$

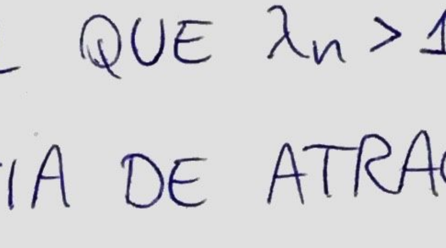
ASSIM, A FUNÇÃO GERADORA DE CUMULANTES, VISTA COMO UM FUNCIONAL DOS "PARÂMETROS DE ACOPLAMENTO" (COUPLING PARAMETERS) $\{\nu_n\}$ SOFRE UMA TRANSFORMAÇÃO GENERALIZADA DE ESCALA SOB UMA RENORMALI

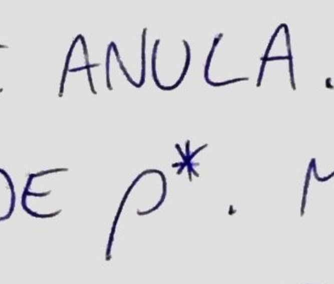
ZAÇÃO.

ANALISEMOS DOIS CASOS PARTICULARES DESSE FATO:

(i) POUCOS (DOIS) PARÂMETROS RELEVANTES "PEQUENOS"

A SUPERFÍCIE CRÍTICA É O SUBESPAÇO DO ESPAÇO DE PARÂMETROS EM QUE CADA PARÂMETRO RELEVANTE v_n (TAL QUE $\lambda_n > 1$) SE ANULA. ELA É A BACIA DE ATRAÇÃO DE ρ^*. MAS HÁ ALGO IMPORTANTE DE DENSIDADES PRÓXIMAS DA SUPERFÍCIE CRÍTICA.





OS PARÂMETROS IRRELEVANTES (E OS MARGINAIS) DEVEM AFETAR ψ DE

FORMA NEGLIGENCIÁVEL. SE IMAGINARMOS A EXISTÊNCIA DE APENAS DOIS PARÂMETROS RELEVANTES "PEQUENOS" (O QUE EXPRESSA PROXIMIDADE DE UM PONTO CRÍTICO EM TRANSIÇÕES DE FASE!), DEVE VALER

$$\boxed{F(\lambda^{a_1} v_1, \lambda^{a_2} v_2, \lambda^{a_K} K) = \lambda F(v_1, v_2, K)}$$

PARA ALGUMA FUNÇÃO F ("NOVO NOME" DE ψ) UNIVERSAL (VALE PARA QUALQUER ρ PRÓXIMA DA SUPERFÍCIE CRÍTICA).

(ii) $\alpha = 2$, TEOREMA CENTRAL DO LIMITE

ABUSANDO NOVAMENTE DE ψ,

DISTRIBUIÇÕES DE VARIÂNCIA FI-
NITA CARACTERIZADAS POR SEUS
CUMULANTES SATISFAZEM, $n=2$,

$$\boxed{\psi(c_1, c_2, \ldots, K) \xrightarrow{T_2} \frac{1}{2}\psi(c_1', c_2', \ldots, 2^{1/\alpha}K)}.$$

MAS SABEMOS COMO OS CUMULAN-
TES SE TRANSFORMAM!

X₁, X₂ I.I.D.

- $c_n(X_1+X_2) = c_n(X_1) + c_2(X_2) \Longrightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{c_n' = 2c_n}$$

- $c_n(\beta X) = \beta^n c_n(X) \Longrightarrow \boxed{c_n' = \beta^n c_n}$

$$\boxed{c_n' = 2^{1-n/\alpha} \cdot c_n}$$

$\beta = \dfrac{1}{2^{1/\alpha}}$

$$\psi(c_1, c_2, \ldots, K) \xrightarrow{T_2} \frac{1}{2}\psi\left[2^{1-1/\alpha}c_1, 2^{1-2/\alpha}c_2, \ldots, 2^{1/\alpha}K\right]$$

APÓS m TRANSFORMAÇÕES,

$$\boxed{\begin{array}{c} \Psi(c_1, c_2, \ldots, K) \\ \Big\downarrow (T_2)^m \\ \dfrac{1}{2^m}\Psi\left[2^{m(1-1/\alpha)}c_1, 2^{m(1-2/\alpha)}c_2, \ldots, 2^{m/\alpha}K\right] \end{array}}.$$

SE $c_1 = 0$, $\alpha = 2$, E m FOR "GRANDE",

$$\Psi(c_1, c_2, \ldots, K) \underset{(T_2)^m}{\sim} \frac{1}{2^m}\Psi(0, c_2, 0, 0, \ldots, 2^{m/2}K)$$

$$= \frac{1}{2^m}\log e^{-\frac{c_2}{2}(2^{m/2}K)^2}$$

$$= -\frac{c_2}{2}K^2$$

2º CUMULANTE É A VARIÂNCIA!

GAUSS!!!

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$\phi_X(K) = e^{i\mu K - \sigma^2 K^2/2}$

LEIS DE POTÊNCIA (POWER LAWS)

FUNÇÕES $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ HOMOGÊNEAS DE GRAU K

$$\boxed{F(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^K F(x_1, \ldots, x_n)}$$

EXIBEM UM TIPO DE SIMETRIA CENTRAL EM TERMODINÂMICA (GRANDEZAS EXTENSIVAS SÃO HOMOGÊNEAS DE GRAU UM, ENQUANTO AS INTENSIVAS TÊM GRAU ZERO).

PARA $n>1$, AS FUNÇÕES HOMOGÊNEAS NÃO PRECISAM SER POLINÔMIOS/POTÊNCIAS (OBSERVE

$$F(x,y) = \frac{x^3 - 7xy^2}{x+y} \cos\left(\frac{x}{y}\right)$$), MAS

NÃO HÁ OUTRA ALTERNATIVA QUANDO $n=1$:

$$F(\lambda x) = \lambda^K F(x) \xRightarrow{\partial/\partial\lambda} x.F'(\lambda x) = K\lambda^{K-1}F(x) \Rightarrow$$

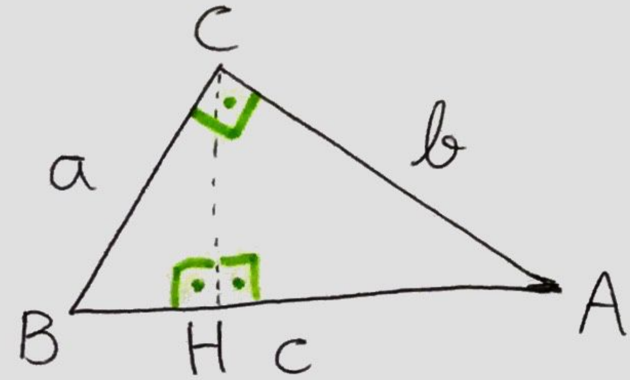
$$\xRightarrow{\lambda=1} x F'(x) = K F(x) \Rightarrow \frac{dF}{F} = K\frac{dx}{x}$$

$$\therefore \boxed{F(x) = C.x^K}.$$

CTE ARBITRÁRIA POSITIVA

GRANDEZAS QUE SEGUEM LEIS DE POTÊNCIA SÃO DITAS <u>INVARIANTES POR ESCALA</u> OU <u>LIVRES DE ESCALA</u>, POIS NÃO HÁ UM "TAMANHO CARACTERÍSTICO DO SISTEMA" E "MÚLTIPLAS ESCALAS" REGEM TAIS GRANDEZAS.

COMO UMA MOTIVAÇÃO GEOMÉTRICA, VAMOS DEMONSTRAR O TEOREMA DE PITÁGORAS!



$\Delta ABC \sim \Delta ACH \sim \Delta CBH$

E: ÁREA!

$E_{CBH} = m \cdot a^2$

HIPOTENUSA, "LINEAR"

FATOR "DA FORMA"

$$E_{ACH} = m\left(\frac{b}{a}\cdot a\right)^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 m a^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 E_{CBH}$$

$\frac{b}{a}\cdot a \equiv \lambda . a$ $\qquad$ $\left(\frac{b}{a}\right)^2 E_{CBH} \equiv \lambda^2 . E_{CBH}$

$$ma^2 + mb^2 = mc^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2.$$

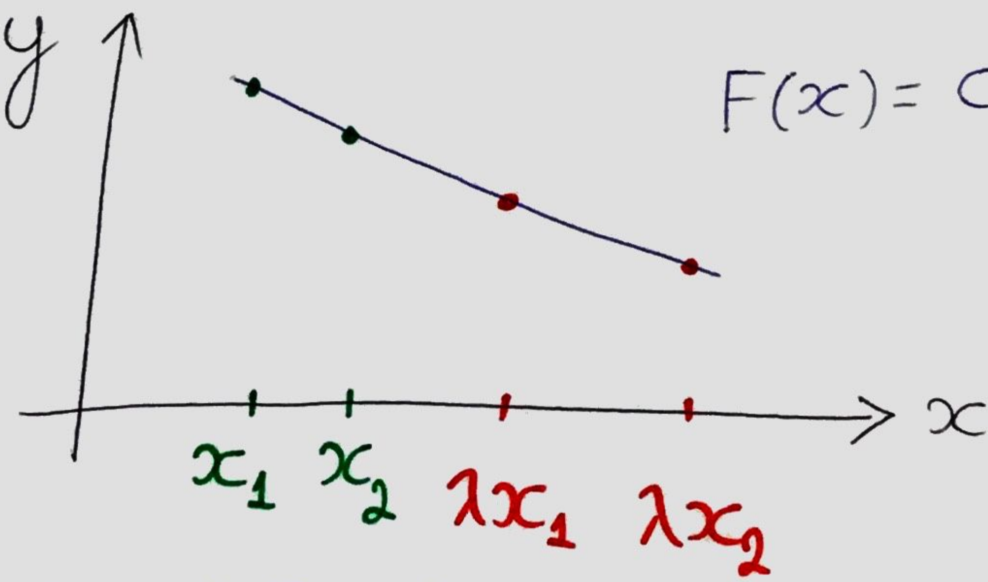
<u>TODAS</u> AS GRANDEZAS LINEARES NOS TRIÂNGULOS "SENTEM" O MESMO FATOR DE ESCALA λ.

EM UMA LEI DE POTÊNCIA, <u>TODOS</u> OS PONTOS DO DOMÍNIO "ESCALAM" DA MESMA FORMA, <u>INDEPENDENTEMENTE</u> DE x.

$$F(x) = C \cdot x^{K} \Rightarrow F(\lambda x) = C \cdot \lambda^{K} x^{K}$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{F(\lambda x)}{F(x)} = \lambda^{K}}$$

→ <u>NÃO</u> DEPENDE DE x!



$$F(x) = C \cdot x^{-D}$$

$$\frac{F(\lambda x_1)}{F(x_1)} = \frac{F(\lambda x_2)}{F(x_2)}$$

OU

$$\frac{F(\lambda x_2)}{F(\lambda x_1)} = \frac{F(x_2)}{F(x_1)}$$

INFINDÁVEL AUTO-SIMILARIDADE

CONTRASTE: $f(x) = C . e^{-x/\xi}$

$$\frac{f(\lambda x)}{f(x)} = \frac{e^{-x/\xi}}{e^{-\lambda x/\xi}} = e^{-\frac{x}{\xi}(1-\lambda)}$$

DEPENDE DE x