Lista de Exercícios IV

① Determine o propagador de partícula livre em uma dimensão $K(xt, x't')$ usando integrais de trajetória.

(a) Escreva a única trajetória clássica que liga (x', t') a (x, t) e calcule $S_{\rm cl}(xt, x't')$.

(b) Mostre que se $y(t) = x(t) - x_{\rm cl}(t)$, então

$$S[x(t)] = S[x_{\rm cl}(t) + y(t)] = \frac{m}{2}\int_{t'}^{t} dt\ [\dot{x}_{\rm cl}^2(t) + \dot{y}^2(t)].$$

(c) Mostre que agora podemos escrever

$$K(xt, x't') = F(t - t')\ \exp\left(\frac{i}{\hbar}S_{\rm cl}(xt, xt')\right)$$

onde

$$F(t-t') = \text{Lim}\ \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\tau}\right)^{\kappa/2}\int_{-\infty}^{\infty} dy_{\kappa-1}...dy_1\ \exp\left(\frac{im}{2\hbar\tau}\sum_{k=0}^{\kappa-1}(y_{k+1} - y_k)^2\right)$$

(d) Mostre que a forma quadrática anterior pode ser diagonalizada levando ao resultado

$$F(t) = \text{Lim}\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\tau\det\Lambda}}$$

onde Λ é uma matriz que tem autovalores λ_k.

(e) Mostre que $\det\Lambda = 1 + \kappa$

(f) Encontre a expressão final para o propagador $K(xt, x't')$.

② Calcule o propagador $\langle x_t t_f | x_i t_i\rangle$ para uma partícula de massa m sujeita a um potencial harmônico unidimensional

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

onde ω é a frequência de oscilação, usando integrais de trajetória, ou seja, avalie

$$\langle x_t t_f | x_i t_i\rangle = \int \mathcal{D}x(t)\ e^{\frac{i}{\hbar}\int L(t)dt}.$$

③ Calcule o propagador $\langle x_t t_f | x_i t_i \rangle$ para uma partícula de massa m sujeita a um potencial linear

$$V(x) = ax$$

onde a é a constante, usando integrais de trajetória, ou seja, avalie

$$\langle x_t t_f | x_i t_i \rangle = \int \mathcal{D}x(t)\; e^{\frac{i}{\hbar}\int L(t)dt},$$

Calcule a função de onda $\varphi(x,t)$ e a densidade de probabilidade $|\varphi(x,t)|^2$ de uma partícula submetida a esse potencial que inicialmente encontra-se no estado

$$\varphi(x_0, 0) = \left(\frac{1}{\pi\sigma}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(i\frac{p_0 x_0}{\hbar} - \frac{x_0^2}{2\sigma^2}\right),$$

compare o resultado com o caso da evolução de uma partícula livre (veja lista 3).

④ Considere uma rotação de um ângulo θ em torno do eixo $\vec{n}$ (versor de módulo 1) que pode ser descrita pela matriz:

$$R_n(\theta) = \exp\left(-i\theta\, \vec{T}\cdot\vec{n}\right),$$

(a) Mostre que $\mathrm{Tr} R_n(\theta) = 1 + 2\cos\theta$

(b) Use o fato que as componentes de um vetor $\vec{V}$ sobre essa rotação se transformam como $V_i' = [R_n(\theta)]_{ij} V_j = V_i + \theta\epsilon_{ijk} n_j V_k + O(\theta^2)$ para determinar uma representação para os operadores hermitianos T_i.

(c) Mostre que $(\vec{T}\cdot\vec{n})^3 = \vec{T}\cdot\vec{n}$.

(d) Use o resultado do item (c) para mostrar que

$$e^{-i\theta(\vec{T}\cdot\vec{n})} = I - i\,\sin\theta\,(\vec{T}\cdot\vec{n}) - (1-\cos\theta)\,(\vec{T}\cdot\vec{n})^2$$

⑤ Seja $T_y(a)$ um operador de translação de a paralela ao eixo Oy:

$$T_y(a)\,\vec{r} = \vec{r} + a\hat{y}\,.$$

Se $R_x(\theta)$ é uma rotação de ângulo θ em torno de Ox, mostre que

$$R_x(\theta)\,T_y(a)\,R_x(-\theta)$$

é uma translação ao longo de um eixo de deverá ser determinado. Use isso para deduzir a relação de comutação

$$[J_x, P_y] = i\,P_z$$

⑥ Considere um grupo G cujos elementos g são parametrizados por N coordenadas θ_a, $a = 1, ..., N$, $g(\theta = 0)$ é o elemento neutro do grupo. As variáveis θ_a são denotadas coletivamente por $\theta = \{\theta_a\}$. A lei de composição é dada por uma função f infinitamente diferenciável

$$g(\bar{\theta})g(\theta) = g(f(\bar{\theta}, \theta)).$$

Novamente aqui f é uma notação coletiva para o conjunto de N funções f: $f(\bar{\theta}, \theta) = \{f_a(\bar{\theta}_b, \theta_c)\}$. Seja um conjunto de matrizes unitárias $U(\theta_a)$ cuja lei de multiplicação é

$$U(\bar{\theta})U(\theta) = U(f(\bar{\theta}, \theta)).$$

As matrizes U formam uma representação do grupo G.

(a) Mostre que $f_a(\bar{\theta}, \theta = 0) = \bar{\theta}_a$ e que $f_a(\bar{\theta} = 0, \theta) = \theta_a$. Mostre que para $\bar{\theta}, \theta \to 0$ $f_a(\bar{\theta}, \theta)$ tem a forma

$$f_a(\bar{\theta}, \theta) = \theta_a + \bar{\theta}_a + f_{abc}\bar{\theta}_b\theta_c + O(\theta^3, \theta^2\bar{\theta}, \theta\bar{\theta}^2, \bar{\theta}^3).$$

(b) Mostre que nas vizinhanças de $U(\theta) = I$, para $\theta \to 0$ podemos escrever

$$U(\theta) = I - i\theta_a T_a - \frac{1}{2}\theta_b\theta_c T_{bc} + O(\theta^3).$$

(c) Calcule o produto $U(\bar{\theta})U(\theta)$ até ordem $(\bar{\theta}^2, \theta^2)$ e mostre que a igualdade

$$U(\bar{\theta})U(\theta) = U(f(\bar{\theta}, \theta)),$$

para os termos $\bar{\theta}_a \theta_b$ implica que

$$T_{bc} = T_b T_c - i f_{abc} T_a$$

(d) Utilize a simetria de T_{ab} para deduzir

$$[T_b, T_c] = i C_{abc} T_a$$

com $C_{abc} = -C_{acb}$. Exprima C_{abc} em função de f_{abc}. Essas relações constituem a álgebra de Lie do grupo definido pela lei de composição $f(\bar{\theta}, \theta)$