



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*  
*Departamento de Engenharia Mecânica*

*PME-3210 - Mecânica dos Sólidos I*

*Aula #08*

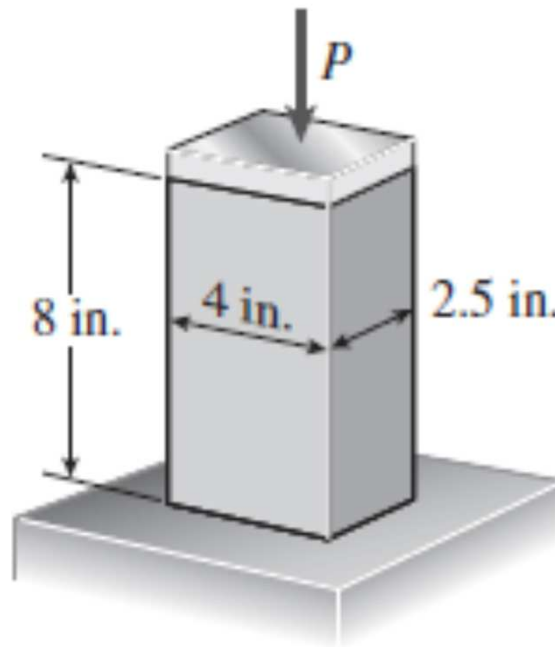
*Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.*

*26/04/2022*



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*  
*Departamento de Engenharia Mecânica*

**Problem 2.6-3** A standard brick (dimensions 8 in.  $\times$  4 in.  $\times$  2.5 in.) is compressed lengthwise by a force  $P$ , as shown in the figure. If the ultimate shear stress for brick is 1200 psi and the ultimate compressive stress is 3600 psi, what force  $P_{\max}$  is required to break the brick?

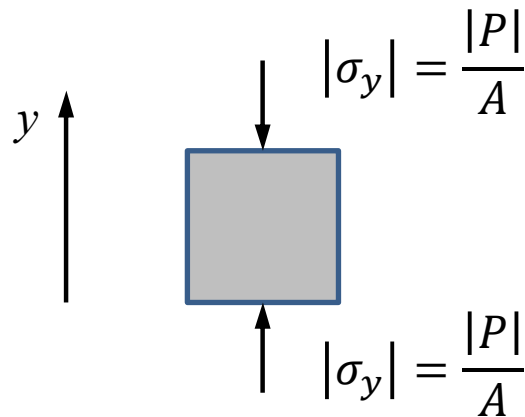




**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Solução:

O estado de tensões em um ponto qualquer do bloco (longe das extremidades) é um estado uniaxial de tensão como indicado na figura:



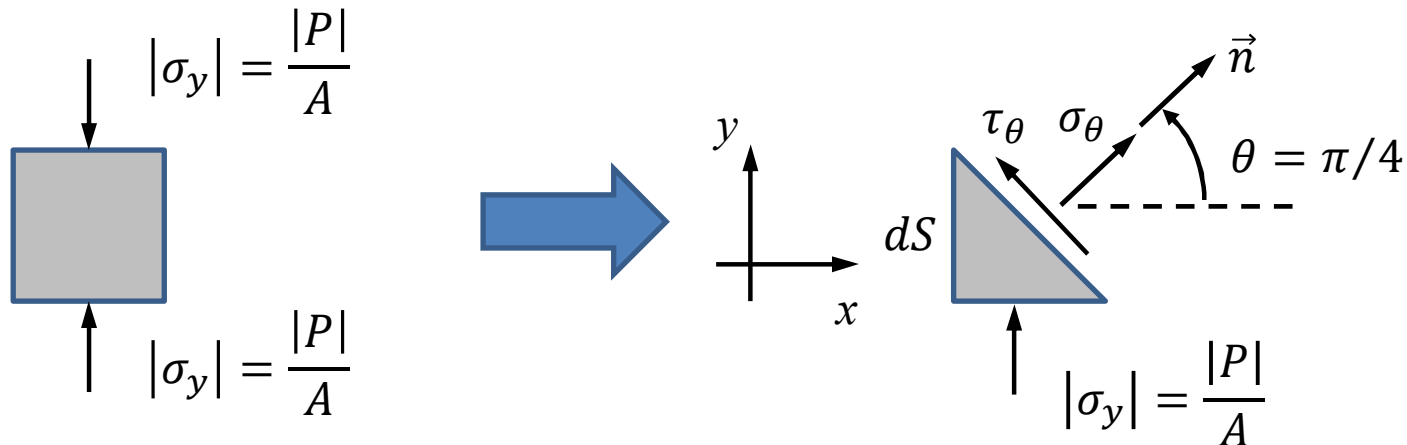
$$|\sigma_y| = \frac{|P|}{A}$$

$$A = 4 \times 2.5 = 10 \text{ in}^2$$

Apesar de não haver tensões cisalhantes nos planos indicados, elas surgirão em planos inclinados e, como vimos, as máximas tensões cisalhantes irão surgir em planos que formam  $45^\circ$  com a direção de aplicação da força.



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**



Impondo o equilíbrio de forças no elemento infinitesimal nas duas direções, teremos:

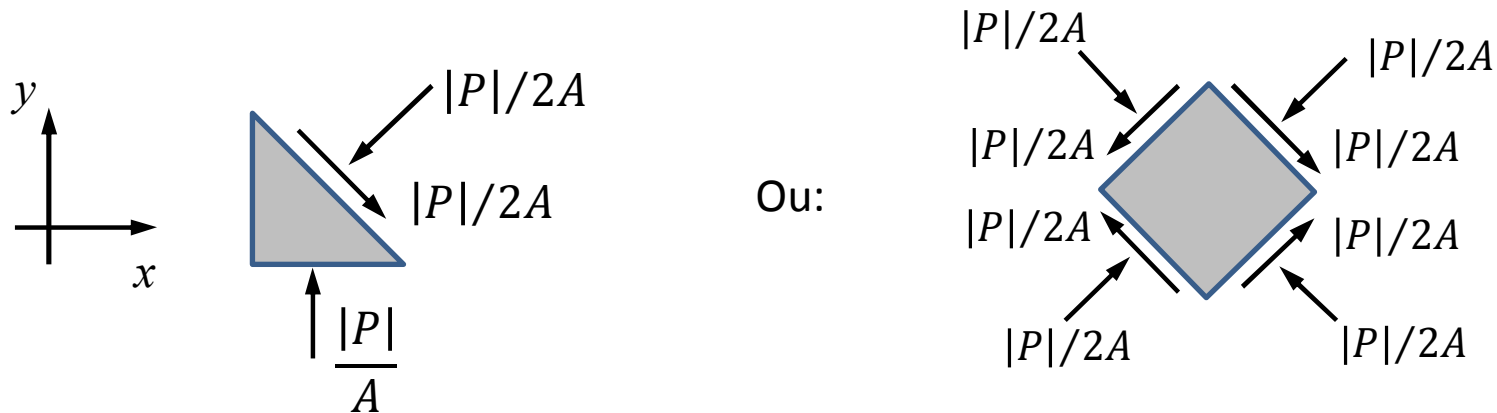
$$\sum F_x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\sigma_\theta \sqrt{2} dS) \frac{\sqrt{2}}{2} - (\tau_\theta \sqrt{2} dS) \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\sigma_\theta \sqrt{2} dS) \frac{\sqrt{2}}{2} + (\tau_\theta \sqrt{2} dS) \frac{\sqrt{2}}{2} = -|\sigma_y| dS$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Resulta:  $\sigma_\theta = \tau_\theta = -\frac{|\sigma_y|}{2} = -\frac{|P|}{2A}$



Devemos ter: 
$$\left[ \begin{array}{l} |\sigma_{c,máx}| = \frac{|P|}{A} \leq 3600 \text{ psi} \Leftrightarrow |P| \leq 36 \text{ kips} \\ |\tau_{máx}| = \frac{|P|}{2A} \leq 1200 \text{ psi} \Leftrightarrow |P| \leq 24 \text{ kips} \end{array} \right.$$

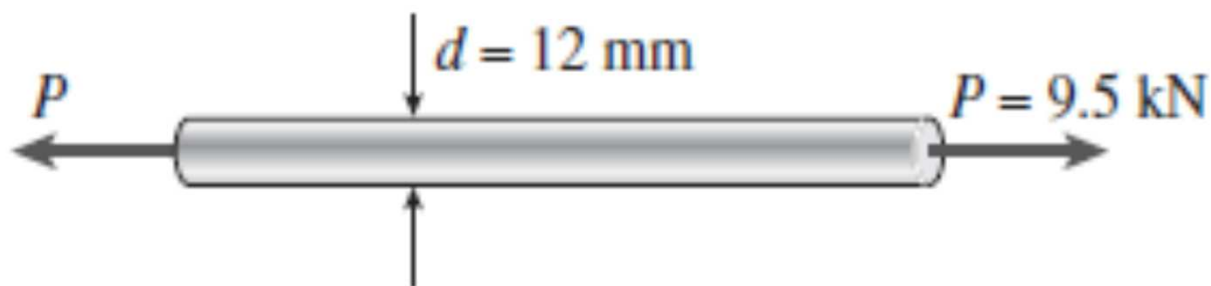
Logo:  $P_{máx} = 24 \text{ kips}$  (falha é governada pelo cisalhamento do bloco)



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*  
*Departamento de Engenharia Mecânica*

**Problem 2.6-6** A steel bar with diameter  $d = 12$  mm is subjected to a tensile load  $P = 9.5$  kN (see figure).

- (a) What is the maximum normal stress  $\sigma_{\max}$  in the bar?
- (b) What is the maximum shear stress  $\tau_{\max}$ ?
- (c) Draw a stress element oriented at  $45^\circ$  to the axis of the bar and show all stresses acting on the faces of this element.





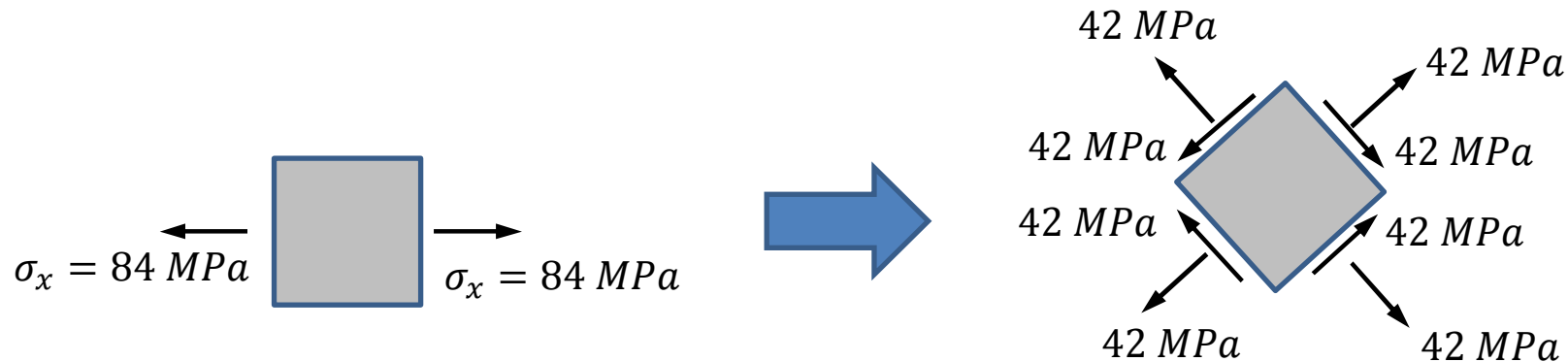
**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

**Solução:**

Aproveitando as conclusões do problema anterior:

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{P}{A} = \frac{9500 \text{ N}}{36\pi \text{ mm}^2} \cong 84 \text{ MPa}$$

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{P}{2A} \cong 42 \text{ MPa}$$



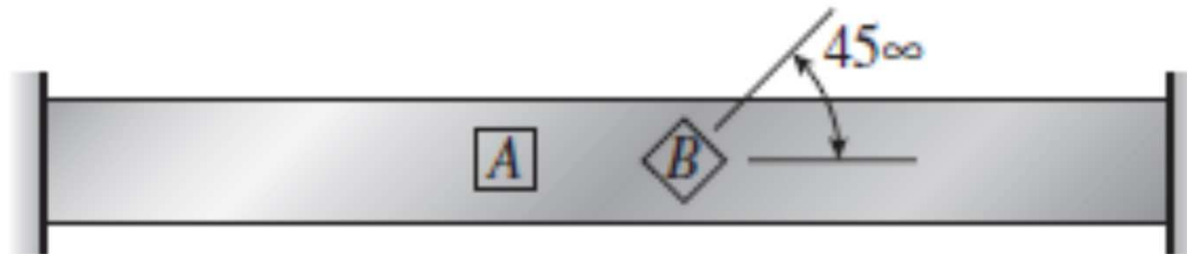


*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*  
*Departamento de Engenharia Mecânica*

**Problem 2.6-8** A copper bar with a rectangular cross section is held without stress between rigid supports (see figure). Subsequently, the temperature of the bar is raised  $50^{\circ}\text{C}$ .

Determine the stresses on all faces of the elements *A* and *B*, and show these stresses on sketches of the elements.

(Assume  $\alpha = 17.5 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$  and  $E = 120 \text{ GPa}$ .)





***Escola Politécnica da Universidade de São Paulo***  
***Departamento de Engenharia Mecânica***

**Solução:**

Se a barra estivesse totalmente livre para expandir (ou seja, sem a presença de esforços aplicados), a variação de seu comprimento na direção longitudinal seria dado por:

$$\Delta L = L_0 \alpha \Delta T \Leftrightarrow \varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L_0} = \alpha \Delta T = 17,5 \times 10^{-6} \times 50 = 8,75 \times 10^{-4}$$

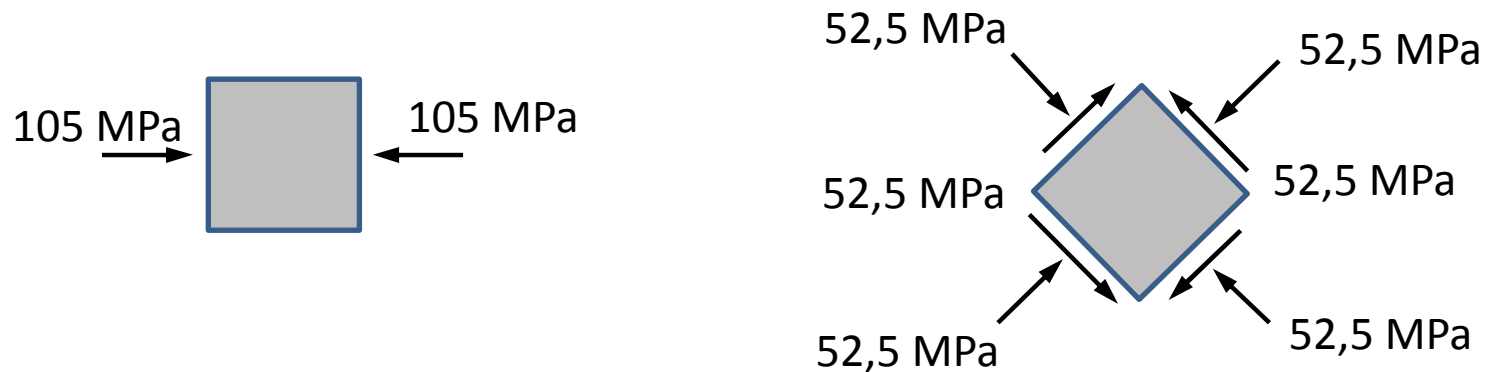
Como a barra está impedida de se alongar (por ter suas extremidades engastadas), surge uma tensão de compressão cujo efeito é de anular o alongamento  $\varepsilon_x$  (associado à expansão livre). Assim:

$$\sigma_x = -E \varepsilon_x = -E \alpha \Delta T = -105 \text{ MPa}$$

Representando o estado tensional nos elementos indicados, teremos:



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**



Observação:

Quando temos tensões decorrentes de variações de temperatura associadas a tensões decorrentes de esforços aplicados, a lei de Hooke (para estados uniaxiais de tensão) fica dada por:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} + \alpha \Delta T$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

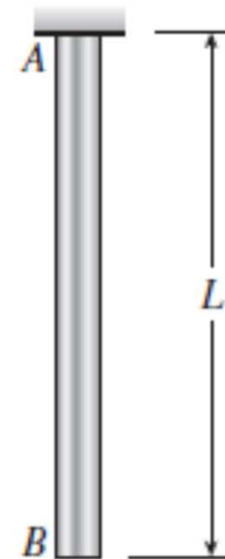
**Problem 2.11-1** A bar  $AB$  of length  $L$  and weight density  $\gamma$  hangs vertically under its own weight (see figure). The stress-strain relation for the material is given by the Ramberg-Osgood equation (Eq. 2-71):

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{\sigma_0 \alpha}{E} \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m$$

Derive the following formula

$$\delta = \frac{\gamma L^2}{2E} + \frac{\sigma_0 \alpha L}{(m+1)E} \left( \frac{\gamma L}{\sigma_0} \right)^m$$

for the elongation of the bar.





**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

**Solução:**

O esforço de tração que age em uma seção transversal que dista  $x$  da extremidade B nada mais é que o peso da estrutura abaixo do plano de corte:

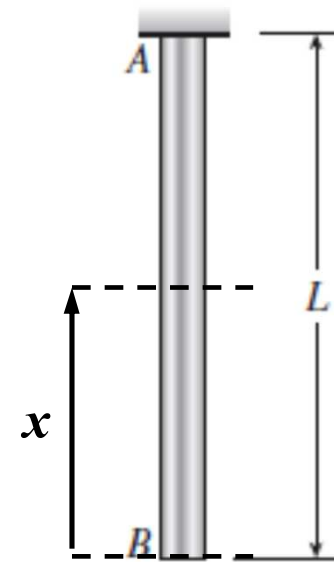
$$N(x) = \gamma Ax$$

Logo, a tensão normal atuante nesta seção vale:

$$\sigma_x = \frac{N(x)}{A} = \gamma x$$

...e o alongamento correspondente será:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_0 \alpha}{E} \left( \frac{\sigma_x}{\sigma_0} \right)^m = \frac{\gamma x}{E} + \frac{\sigma_0 \alpha}{E} \left( \frac{\gamma x}{\sigma_0} \right)^m$$





**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Logo, o alongamento total da barra será:

$$\delta = \int_0^L \varepsilon_x dx = \int_0^L \left( \frac{\gamma x}{E} + \frac{\sigma_0 \alpha}{E} \left( \frac{\gamma x}{\sigma_0} \right)^m \right) dx \quad \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow \delta = \frac{\gamma L^2}{2E} + \frac{\sigma_0 \alpha}{E} \left( \frac{\gamma}{\sigma_0} \right)^m \int_0^L x^m dx \quad \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow \delta = \frac{\gamma L^2}{2E} + \frac{\sigma_0 \alpha}{E} \left( \frac{\gamma}{\sigma_0} \right)^m \frac{L^{m+1}}{m+1} \quad \longleftrightarrow$$

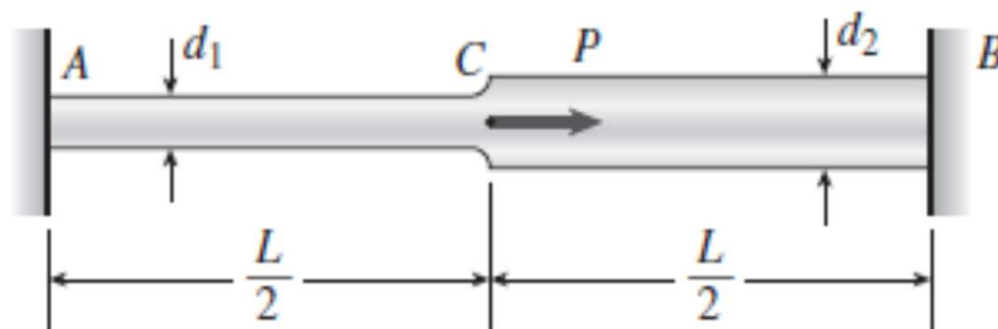
$$\longleftrightarrow \delta = \frac{\gamma L^2}{2E} + \frac{\sigma_0 \alpha L}{E(m+1)} \left( \frac{\gamma L}{\sigma_0} \right)^m$$



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*  
*Departamento de Engenharia Mecânica*

**Problem 2.12-2** A stepped bar  $ACB$  with circular cross sections is held between rigid supports and loaded by an axial force  $P$  at midlength (see figure). The diameters for the two parts of the bar are  $d_1 = 20$  mm and  $d_2 = 25$  mm, and the material is elastoplastic with yield stress  $\sigma_Y = 250$  MPa.

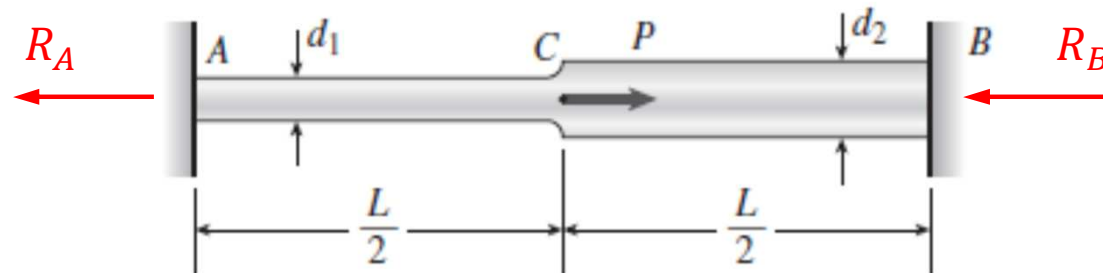
Determine the plastic load  $P_P$ .





**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Solução:



Equilíbrio:  $R_A + R_B = P$

Mas, ao atingirmos a carga plástica  $P_p$ , teremos:

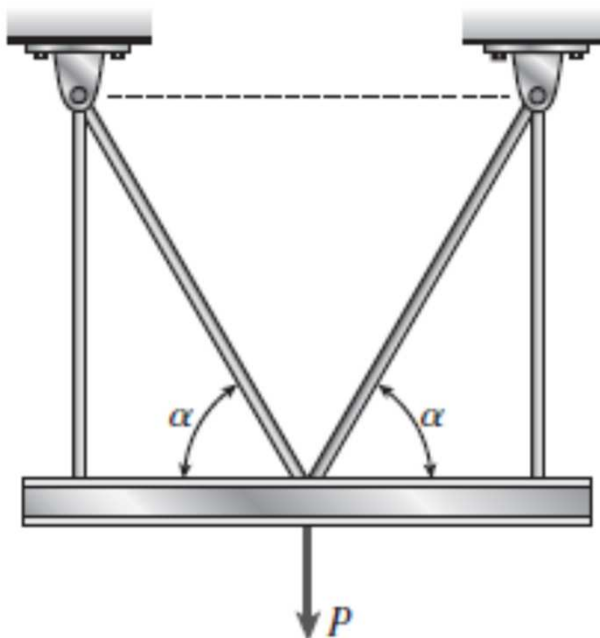
$$\left[ \begin{array}{l} R_A = \sigma_y \frac{\pi d_1^2}{4} = 250 \frac{\pi (20)^2}{4} = 78,54 \text{ kN} \\ R_B = \sigma_y \frac{\pi d_2^2}{4} = 250 \frac{\pi (25)^2}{4} = 122,78 \text{ kN} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow P_p = 201,32 \text{ kN}$$



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*  
*Departamento de Engenharia Mecânica*

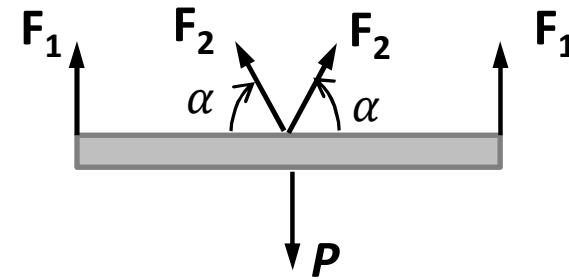
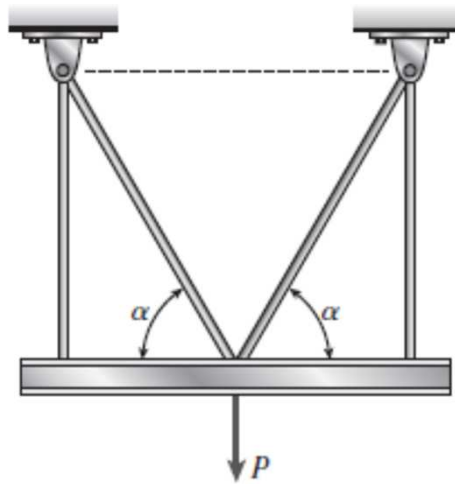
**Problem 2.12-4** A load  $P$  acts on a horizontal beam that is supported by four rods arranged in the symmetrical pattern shown in the figure. Each rod has cross-sectional area  $A$  and the material is elastoplastic with yield stress  $\sigma_Y$ . Determine the plastic load  $P_P$ .





*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*  
*Departamento de Engenharia Mecânica*

Solução:



Equilíbrio:  $2(F_1 + F_2 \operatorname{sen} \alpha) = P$

Mas, ao atingirmos a carga plástica  $P_p$ , teremos:  $F_1 = F_2 = \sigma_y A$

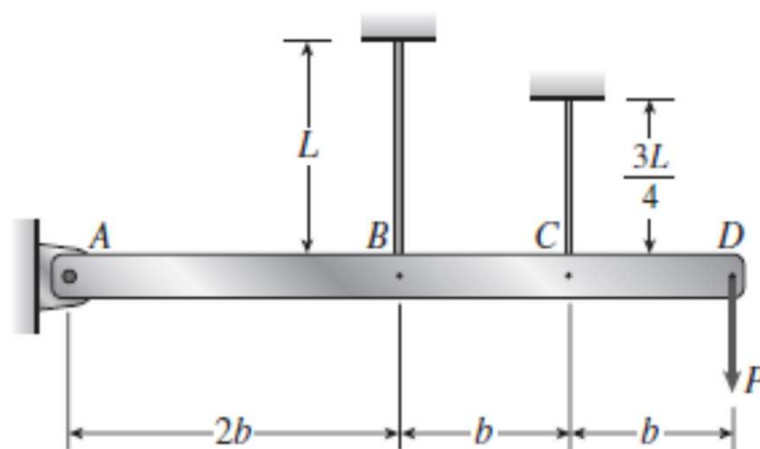
Logo:  $P_p = 2\sigma_y A(1 + \operatorname{sen} \alpha)$



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*  
*Departamento de Engenharia Mecânica*

**Problem 2.12-9** The structure shown in the figure consists of a horizontal rigid bar  $ABCD$  supported by two steel wires, one of length  $L$  and the other of length  $3L/4$ . Both wires have cross-sectional area  $A$  and are made of elastoplastic material with yield stress  $\sigma_Y$  and modulus of elasticity  $E$ . A vertical load  $P$  acts at end  $D$  of the bar.

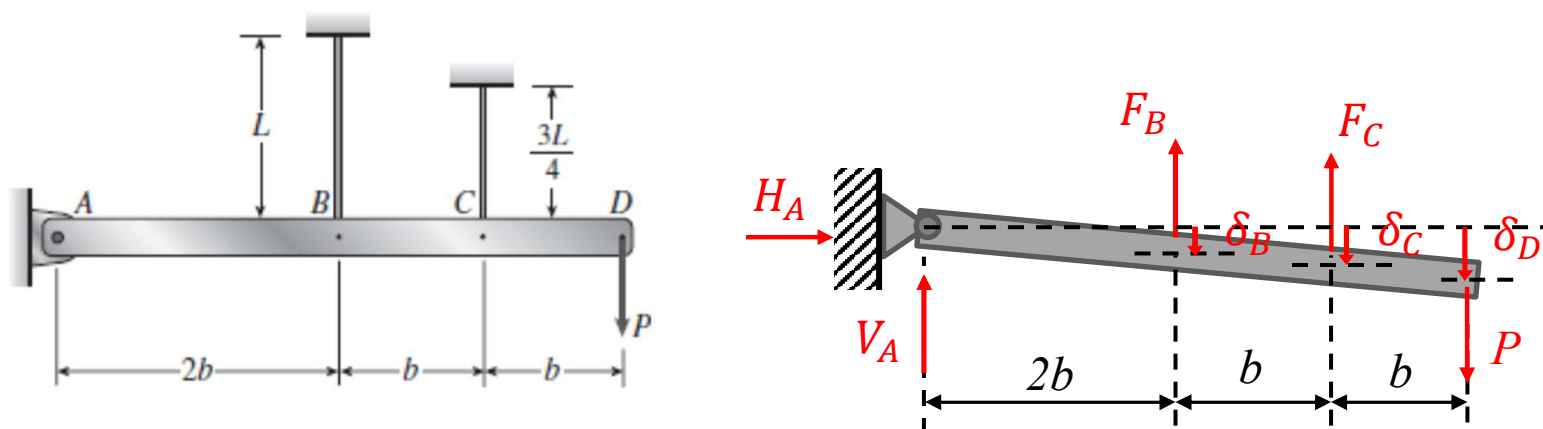
- (a) Determine the yield load  $P_Y$  and the corresponding yield displacement  $\delta_Y$  at point  $D$ .
- (b) Determine the plastic load  $P_P$  and the corresponding displacement  $\delta_P$  at point  $D$  when the load just reaches the value  $P_P$ .
- (c) Draw a load-displacement diagram with the load  $P$  as ordinate and the displacement  $\delta_D$  of point  $D$  as abscissa.





**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Solução:



Equilíbrio de momentos (pólo em A):

$$4bP = F_B 2b + F_C 3b \quad \longleftrightarrow \quad P = \frac{F_B}{2} + \frac{3F_C}{4}$$

Semelhança de triângulos:  $\frac{\delta_B}{2b} = \frac{\delta_C}{3b} = \frac{\delta_D}{4b} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{cases} \delta_B = \frac{\delta_D}{2} \\ \delta_C = \frac{3\delta_D}{4} \end{cases}$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

a) Enquanto os dois fios permanecerem no regime elástico-linear, vale:

$$\left[ \begin{array}{l} F_B = k_B \delta_B = \left( \frac{EA}{L} \right) \delta_B = \left( \frac{EA}{2L} \right) \delta_D \\ F_C = k_C \delta_C = \left( \frac{4EA}{3L} \right) \delta_C = \left( \frac{EA}{L} \right) \delta_D \end{array} \right.$$

$$\text{Logo: } P = \frac{F_B}{2} + \frac{3F_C}{4} \Leftrightarrow P = \left( \frac{EA}{4L} \right) \delta_D + \left( \frac{3EA}{4L} \right) \delta_D = \left( \frac{EA}{L} \right) \delta_D$$

O escoamento tem início no fio mais solicitado (fio C) e ocorre quando:

$$F_C = \left( \frac{EA}{L} \right) \delta_D = \sigma_Y A \Leftrightarrow \delta_{DY} = \frac{\sigma_Y L}{E}$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Logo, a carga de início de escoamento será:  $P_Y = \left(\frac{EA}{L}\right) \delta_{DY} = \sigma_Y A$

b) A carga plástica ocorre quando:

$$F_B = F_C = \sigma_Y A$$

Logo, da equação de equilíbrio, teremos:  $P_p = \frac{F_B}{2} + \frac{3F_C}{4} = \frac{5}{4} \sigma_Y A$

No limiar de atingir a carga plástica o fio menos solicitado (fio B) estará terminando a fase elástica. Logo:

$$F_B = \left(\frac{EA}{2L}\right) \delta_D = \sigma_Y A \Leftrightarrow \delta_{Dp} = 2 \frac{\sigma_Y L}{E}$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

c) Com os resultados dos itens (a) e (b), podemos traçar o diagrama  $P = P(\delta)$ :

