Tópico 3 - Oscilador Harmônico

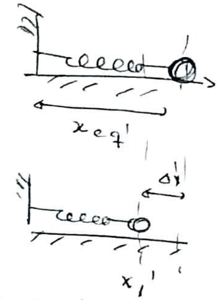
Oscilações correspondem à vibrações localizadas quando um sistema é perturbado de uma posição de equilíbrio estável. A característica mais evidente é o movimento periódico.

O movimento ondulatório está intimamente associado ao movimento oscilatório. As ondas sonoras, por exemplo, são provocadas quando uma corda vibrante (a de um violino por exemplo) é perturbada ou pela vibração da membrana de um tambor. Em cada caso, o sistema vibrante imprime oscilações nas moléculas de ar que estiverem nas suas vizinhanças e estas oscilações se propagam através do ar (ou dentro de outro meio como água ou sólido).

As oscilações correspondem a vibrações localizadas, ao passo que ondas estão associadas à propagação.

Neste tópico do curso, consideraremos as oscilações num sistema formado pelo Oscilador Harmônico (massa + mola) unidimensional. Diversos aspectos serão considerados: Amortecimento pela força viscosa, força externas (oscilante neste caso) por ex e ressonância, forças periódicas com diferentes frequências e também forças impulsivas. Alguns desses casos necessitarão de uma "nova"/ complementar fundamental teórica.

Em termos mais concretos, o oscilador Harmônico é composto de uma massa $\underline{m}$ acoplada à uma mola presa à parede. Quando deslocada de sua posição de equilíbrio, esse sistema inicia um movimento oscilatório.



Conforme vimos anteriormente, podemos entender as oscilações por meio de uma energia potencial $U(x')$ que está associada à uma força restauradora

$$F(x') = -K(x' - x'_{eq}).$$

Passando para o sistema de referência na posição de equilíbrio da mola $x \longrightarrow x' - x'_{eq}$, $U(x)$ e $F(x)$ são dadas por:

$$U(x) = \frac{Kx^2}{2} \quad \text{e} \quad F(x) = -Kx,$$

de forma que para um dado valor de energia total (mecânica E) o sistema oscila entre os pontos de retorno x_1 e x_2 que satisfazem a condição

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = E \qquad \text{onde } E = \frac{Kx_1^2}{2} = \frac{Kx_2^2}{2},$$

$$x_1 = \pm x_2$$

Dessa forma, a equação de movimento (3)

para o oscilador harmônico na representação da "energia" é dada por

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{kx^2}{2}\right)} \quad e$$

$$\sqrt{\frac{k}{m}} \int_0^t dt' = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} \quad \text{onde } E = \frac{kA^2}{2}$$

Integrando a equação acima, obtemos

$$x(t) = A \cos\left(\theta_0 + \sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) \quad \text{onde}$$

daqui por diante $\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}$ de forma que

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta_0) \qquad (1)$$

à frequência de oscilação $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ associamos o período $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, que independe da amplitude $\underline{\underline{A}}$ de oscilação.

A velocidade instantânea $v(t) = \frac{dx}{dt}$ é dada por $v(t) = \omega_0 A \cos(\omega t + \theta_0)$, que está "fora de fase" com relação à posição.

Outra maneira de estudarmos este problema (que faremos daqui por diante)

é partindo da equação de movimento (4)

(2ª lei de Newton) dada por

$$\left(\ddot{x} \equiv \frac{d^2x}{dt^2}\right) \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \iff m\ddot{x} + kx = 0$$

Lembrando que $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, a solução da equação de movimento é dada por $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, onde $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são dadas por: $x(t) = A' \operatorname{sen} \omega_0 t + B \cos \omega_0 t$

De uma forma análoga a Eq. (1) podemos escrever a equação acima sob a forma

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{onde}$$

$$A\cos\varphi = B$$

$$-A\operatorname{sen}\varphi = A'$$

$$\text{ou} \quad A = \sqrt{A'^2 + B^2} \quad e \quad \operatorname{tg}\varphi = -\frac{A'}{B}$$

Ajuste das condições iniciais

As constantes (A' e B) ou equivalentemente A e φ podem ser obtidas a partir das condições iniciais $x(0)$ e $v(0)$

Dado $x(0) = A\cos(\varphi)$ e $v(t) = -A\omega_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$

$v(0) = -A\omega_0 \operatorname{sen}\varphi$

segue que

$$x(0)^2 + \frac{v(0)^2}{\omega_0^2} = A^2 \quad \text{e}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{v(0)}{\omega_0 x(0)} \quad , \text{ de forma que}$$

$$x(t) = \sqrt{x(0)^2 + \frac{v(0)^2}{\omega_0^2}}\,\cos(\omega t + \varphi) \quad \text{e}$$

$$v(t) = -\omega_0 \sqrt{x(0)^2 + \frac{v(0)^2}{\omega_0^2}}\,\operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

A energia cinética e potencial do oscilador num instante de tempo $\underline{t}$ qualquer são dadas por

$$T(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m\,\omega_0^2 A^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \varphi)$$

$$U(t) = \frac{k}{2} x^2 = \frac{m}{2}\,\omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \quad ,$$

de forma que $T(t) + U(T) = \underbrace{\frac{1}{2} m\,\omega_0^2 A^2}_{\text{cte (em t)}}$! (conforme esperado, em analogia ao que foi dito anteriormente). Ou seja, a quantidade de energia cinética perdida a cada instante de tempo foi convertida em energia potencial (e vice-versa).

Encerramos a análise do oscilador harmônico calculando o valor médio da energia cinética e potencial por período de oscilação.

A média temporal de uma dada função $f(t)$ qualquer num período é dada por $\bar{f} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$,

de forma que $\bar{T}_c = \frac{1}{T}\int_0^T \operatorname{sen}^2(\omega_0 t + \varphi)\,dt \left(\frac{1}{2} m\,\omega_0^2 A^2\right)$

$$\bar{T}_c = \frac{1}{4} m\,\omega_0^2 A^2 .$$

Procedendo analogamente para a energia potencial encontramos $\bar{u} = \frac{1}{4} m\,\omega_0^2 A^2$, ou seja, a energia cinética e energia potencial calculadas num período são metades da energia total. Isto não quer dizer que metade da energia está sob a forma de energia cinética e potencial em todos os instantes de tempo!!!

Oscilações Amortecidas

As oscilações harmônicas estudadas até aqui têm lugar em sistemas conservativos. Na prática sempre há dissipação de energia. Em particular, o amortecimento pode ser tratado como dependente da velocidade

$-bv$ ($+b>0$ significa que ele atua no sentido de se opor ao movimento e assim diminuir a velocidade). Dessa forma, uma partícula movendo-se na presença de uma força restauradora $-kx$ e resistiva $-b\dot{x}$ tem a equação de movimento dada por

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0,$$

ou ainda reescrita como

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \iff \ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

onde $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ e $\gamma = \frac{b}{m}$.

A solução (o movimento da partícula) dependerá da relação entre ω_0^2 e γ e essencialmente temos 3 casos (de amortecimento)

- Subcrítico: $\frac{\gamma}{2} < \omega_0$
- Crítico: $\frac{\gamma}{2} = \omega_0$
- Supercrítico: $\frac{\gamma}{2} > \omega_0$.

Em todos os casos, a partícula atingirá o repouso depois de um certo tempo, porém o movimento será diferente em cada um dos casos. A solução/equação de movimento $x(t)$ é encontrada supondo uma solução do tipo $x(t) = Ae^{pt}$, onde A e p são parâmetros a serem determinados. Dado que $\dot{x}(t) = Ape^{pt}$ e $\ddot{x} = Ap^2e^{pt}$, temos:

$$(p^2 + \gamma p + \omega_0^2)Ae^{pt} = 0,$$

onde o termo exponencial deve se anular em $t \to \infty$ ($p<0$). Dessa forma

$$p = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}$$

Portanto, em analogia ao que dissemos anteriormente,

• se $\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2 > 0$, a solução / deslocamento será dado por

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[A\, e^{\sqrt{(\frac{\gamma}{2})^2-\omega_0^2}\,t} + B\, e^{-\sqrt{(\frac{\gamma}{2})^2-\omega_0^2}\,t}\right]$$

Tal caso é conhecido como amortecimento super-crítico. Esse movimento não é periódico mais, prevalecendo o amortecimento.

• se $\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2 < 0$, a solução será dada por

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[A\, e^{i\omega_1 t} + B\, e^{-i\omega_1 t}\right],$$

onde $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$.

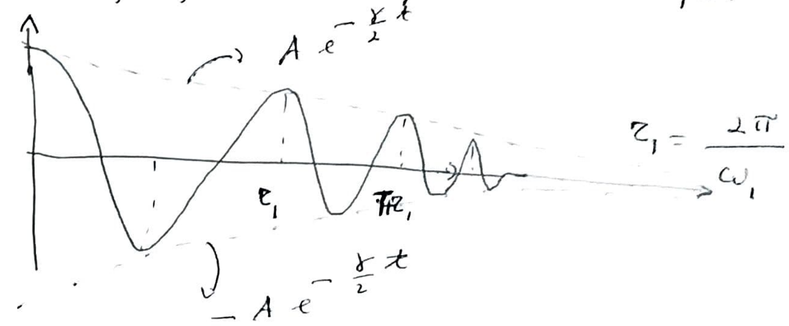
A equação acima descreve uma solução oscilatória seguida de decaimento e ainda pode ser reescrita da seguinte forma

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[A\cos(\omega_1 t + \varphi_1)\right],$$

note que a "frequência" de oscilação $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$ é menor que a frequência natural do oscilador ω_0. Embora o movimento seja oscilatório, ele não é periódico, uma vez que o oscilador nunca passa pelo mesmo ponto duas vezes com a

mesma velocidade (a velocidade sempre diminui). Além disso, a máxima amplitude do movimento neste caso diminui com o tempo com o fator $e^{-\frac{\gamma}{2}t}$.

Esquematicamente o comportamento de $x(t)$ em função do tempo é dado por



Em particular, a razão entre as amplitudes de oscilação entre dois máximos consecutivos (ocorrendo em T e $T+\tau_1$, respectivamente) é dada por

$$\frac{A e^{-\frac{\gamma}{2}T}}{A e^{-\frac{\gamma}{2}(T+\tau_1)}} = e^{\frac{\gamma}{2}\tau_1}$$

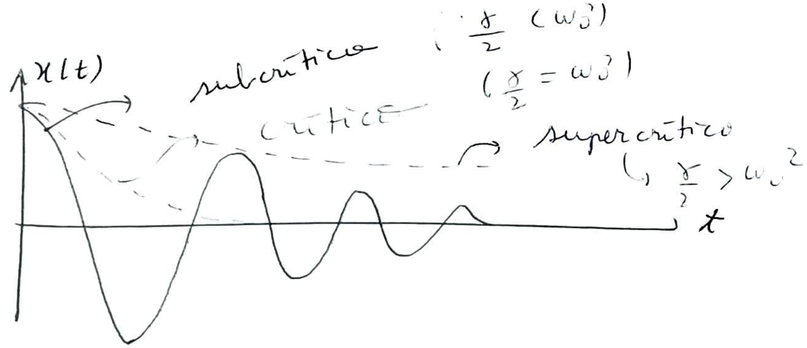
Amortecimento crítico

Neste caso em que $\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 = \omega_0$, é conhecido como amortecimento crítico, e a solução é dada por

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(A+Bt).$$

Note que neste caso também não há oscilação, prevalecendo o amortecimento. Este tipo de amortecimento decai mais rapidamente que o caso super-crítico e subcrítico sendo importante em objetos com sistemas oscilatórios (galvanômetro, por exemplo) quando se deseja que o sistema retorne "o mais rápido" possível ao equilíbrio.

Comparando cada um dos casos temos:



Balanço Energético

A energia mecânica do oscilador num instante de tempo t qualquer é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) + \frac{1}{2} k x^2(t)$$

Tomando a derivada temporal da energia com relação ao tempo temos.

$$\frac{dE}{dt} = m\dot{x}(t)\ddot{x}(t) + kx(t)\dot{x}(t)$$

$$= \dot{x}(t)\left[m\ddot{x} + kx(t)\right]$$

Uma vez que $m\ddot{x} + kx(t) = -b\dot{x}(t)$

temos

$$\frac{dE}{dt} = -m\gamma\dot{x}^2.$$

Como $\gamma > 0$ e $\dot{x}^2 > 0$, segue que a variação instantânea da energia total é sempre ≤ 0 (como esperado), ou seja ela se dissipa, anulando-se nos instantes em que $\dot{x}(t) = 0$.

Oscilações forçadas

Até agora estudamos oscilações livres, em que o oscilador harmônico "recebe" uma energia inicial (através do deslocamento e velocidade iniciais) e depois é solto, evoluindo livremente. Vimos que o período de oscilação é determinado pela própria natureza do oscilador.

Considere agora o efeito produzido por

força periódica sobre o oscilador. 12

O período desta força não coincidirá em geral com o período próprio do oscilador, de forma que as oscilações produzidas chamam-se oscilações forçadas. A força externa "supre" continuamente a energia do oscilador, compensando a dissipação.

Seja $f(t) = F_0 \cos \omega t$ a força externa com frequência ω (a frequência natural do oscilador amortecido é $\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}$)

Neste caso, temos a seguinte equação de movimento

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

Precisamos encontrar então $x(t)$ e $v(t)$ dados $x(0)$ e $v(0)$ conhecidos.

Conforme mencionamos anteriormente, um método de resolução de equações diferenciais não homogêneas, consiste em encontrarmos as soluções $x_h(t)$ (solução da equação homogênea)

e $x_p(t)$ (uma dada solução particular). 13

Um método simples é "chutarmos" a forma da particular com base no termo inhomogêneo. Como $F(t) = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$, esperamos que $x_p(t)$ seja algo do tipo $x_p(t) = A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t$.

Podemos ainda resolver (encontrar a solução) usando a notação complexa. Seja $z(t) = x(t) + i y(t)$, nosso interesse é

$x(t) = \operatorname{Re}[z(t)]$ (já que $F(t) = \operatorname{Re}\left[\frac{F_0}{m} e^{i\omega t}\right]$)

Neste caso

$$\ddot{z} + \gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

Assumindo que $z(t) = z_0 e^{i\omega t}$ (mesma frequência que a força externa).

temos que $x_p(t) = \operatorname{Re}[z(t)]$ e então:

$$-\omega^2 z_0 e^{i\omega t} + i\omega z_0 \gamma e^{i\omega t} + \omega_0^2 z_0 e^{i\omega t} = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

$$= + (-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2) z_0 e^{i\omega t} = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

de forma que $z_0 = \frac{F_0}{m} \frac{1}{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2}$

$$z_0 = \frac{F_0}{m[(\omega_0^2-\omega^2)+i\gamma\omega]} \cdot \frac{(\omega_0^2-\omega^2)-i\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)-i\gamma\omega}$$

$$= \frac{F_0}{m[(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2]}\,(\omega_0^2-\omega^2) \; +$$

real

$$- i\,\frac{F_0}{m} \cdot \frac{\gamma\omega}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2]}$$

Complexa

Portanto

$$x_p(t) = \mathrm{Re}\left[z_0\, e^{i\omega t}\right]$$

$$= \frac{F_0}{m}\left[\frac{(\omega_0^2-\omega^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2} - \frac{i\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}\right] \times$$

$$\left[\cos\omega t + i\,\mathrm{sen}\,\omega t\right]$$

$$= \frac{F_0}{m[(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2]}\left[(\omega_0^2-\omega^2)\cos\omega t + \gamma\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t\right]$$

que ainda pode ser reescrito como

$$x_p(t) = \frac{F_0}{m}\,\tilde{A}\cos(\omega t - \varphi)$$

onde $\tilde{A}\cos\varphi = + \dfrac{(\omega_0^2-\omega^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}$

$$\tilde{A}\,\mathrm{sen}\,\varphi = + \frac{\gamma\omega}{(\gamma^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}$$

e portanto $\mathrm{tg}\,\varphi = + \dfrac{\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)}$ (*)

e $\tilde{A}^2 = \dfrac{(\omega_0^2-\omega)^2+\gamma^2\omega^2}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2]^2}$ e

então $\tilde{A} = \dfrac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}}$ de

forma que

$$x_p(t) = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}}\cos(\omega t - \varphi)$$

Finalmente, obtemos

$$x(t) = x_p(t) + x_h(t) =$$

$$= e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[\tilde{A}\cos(\omega_1 t + \varphi_1)\right] +$$

$$\frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}}\cos(\omega t - \varphi).$$

Alguns comentários:

1) A quantidade $\underline{\underline{\varphi}}$, dada em (*) pg. 15, representa a diferença de fase entre a força externa ("driving force") e movimento resultante.

$$\text{Se } \omega \ll \omega_0 \Rightarrow \varphi \approx 0.$$

$$\text{Se } \omega \to \omega_0 \Rightarrow \varphi \approx +\pi/2$$

$$\text{Se } \omega \to \infty \Rightarrow \varphi \approx \pi$$

2) $x_h(t)$ representa a solução "transiente" pois desaparece quando $t \to \infty$ ou equivalentemente quando $t \gg \frac{2}{\gamma}$, prevalecendo o comportamento previsto pela solução particular $x_p(t)$. Esta representa a "solução estacionária".

Usando o método alternativo (baseado no Wronskiano) vamos achar $x_p(t)$ para o oscilador harmônico sujeito à uma força externa qualquer. 17

Dadas a equação diferencial

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = F(t),$$

encontramos (para o caso subcrítico)

$$x_1(t) = A\, e^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos\omega_1 t$$

$$x_2(t) = B\, e^{-\frac{\gamma}{2}t}\,\text{sen}\,\omega_1 t\,.$$

de forma que $W(t; x_1, x_2)$ vale

$$W(t, x_1, x_2) = x_1(t)\,\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)\,x_2(t)$$

onde

$$\dot{x}_2(t) = -\left[\frac{\gamma}{2}\,\text{sen}\,\omega_1 t - \omega_1\cos\omega_1 t\right] B\, e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

$$\dot{x}_1(t) = -\left[\frac{\gamma}{2}\cos\omega_1 t + \omega_1\,\text{sen}\,\omega_1 t\right] A\, e^{-\frac{\gamma}{2}t}.$$

Note que basta considerarmos as formas $e^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos\omega_1 t$ e $e^{-\frac{\gamma}{2}t}\,\text{sen}\,\omega_1 t$ para $x_1(t)$ e $x_2(t)$, pois A e B serão ajustados a partir das condições iniciais. Portanto

$$W(t; x_1, x_2) = e^{-\gamma t}\,\omega_1$$

Dessa forma $x_p(t) = u_1(t)\,x_1(t) + u_2(t)\,x_2(t)$

onde 18

$$u_1'(t) = -\frac{x_2(t)\,F(t)}{m\left[e^{-\gamma t}\,\omega_1\right]} \iff -\frac{e^{-\frac{\gamma}{2}t}\,\text{sen}\,\omega_1 t\; F(t)}{m\omega_1\, e^{-\gamma t}}$$

$$u_2'(t) = \frac{x_1(t)\,F(t)}{m\, e^{-\gamma t}\,\omega_1} \iff \frac{e^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos\omega_1 t\; F(t)}{m\omega_1\, e^{-\gamma t}}$$

e portanto

$$u_1(t) = -\frac{1}{m\omega_1}\int_0^t F(t')\, e^{\frac{\gamma}{2}t'}\,\text{sen}\,\omega_1 t'\, dt'$$

$$u_2(t) = \frac{1}{m\omega_1}\int_0^t F(t')\, e^{\gamma/2\, t'}\cos\omega_1 t'\, dt'$$

e finalmente

$$x_p(t) = \frac{1}{m\omega_1}\left[-\int_0^t F(t')\, e^{-\frac{\gamma}{2}(t-t')}\cos\omega_1 t\;\text{sen}\,\omega_1 t'\, dt' + \int_0^t F(t')\, e^{-\frac{\gamma}{2}(t-t')}\,\text{sen}\,\omega_1 t\,\cos\omega_1 t'\, dt'\right]$$

que ainda pode ser reagrupado como

$$x_p(t) = \frac{1}{m\omega_1}\int_0^t F(t')\, e^{-\frac{\gamma}{2}(t-t')}\,\text{sen}\left[\omega_1(t-t')\right] dt',$$

válida para qualquer força externa $F(t')$

Considerando finalmente $F(t') = \frac{F_0}{m}\cos \omega t'$, obtemos

$$x_p(t) = \frac{F_0}{m\omega_1}\int_0^t e^{-\frac{\gamma}{2}(t-t')}\cos \omega t' \,\text{sen}\left[\omega_1(t-t')\right] dt'$$

Uma vez que estamos interessados no limite de $t \to \infty$ obtemos:

$$x_p(t) = \frac{4\omega_1 F_0}{m\omega_1}\left[\frac{(\gamma^2 - 4\omega^2 + 4\omega_1^2)\cos \omega t + 4\gamma\omega \,\text{sen}\,\omega t}{(\gamma^2 + 4(\omega-\omega_1)^2)(\gamma^2 + 4(\omega+\omega_1)^2)}\right]$$

Lembrando que $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}$ segue que

$4(\omega_1^2 - \omega^2) = 4\left(\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4} - \omega^2\right)$ de forma que

o numerador do termo $\cos \omega t$ vale $4(\omega_0^2 - \omega^2)$

Por outro lado o denominador pode ser reescrito como:

$$\gamma^2 + 4(\omega-\omega_1)^2 = \gamma^2 + 4\left[\omega^2 - 2\omega\omega_1 + \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}\right]$$
$$= 4\left[\omega^2 + \omega_0^2 - 2\omega\omega_1\right]$$

Analogamente

$$\gamma^2 + 4(\omega+\omega_1)^2 = 4\left[\omega_0^2 + \omega^2 + 2\omega\omega_1\right]$$

de forma que

$$\left[\gamma^2 + 4(\omega-\omega_1)^2\right]\left[\gamma^2 + 4(\omega+\omega_1)^2\right] = 16\left[(\omega_0^2+\omega^2)^2 - 4\omega^2\omega_1^2\right]$$
$$= 16\left[\omega_0^4 + \omega^4 + 2\omega_0^2\omega^2 - 4\omega^2\left(\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}\right)\right] = 16\left[\omega^4 + \omega_0^4 - 2\omega^2\omega_0^2 + \gamma^2\omega^2\right]$$

$$x_p(t) = \frac{4F_0}{m}\,\frac{4(\omega_0^2 - \omega^2)\cos \omega t + 4\gamma\omega\,\text{sen}\,\omega t}{16\left[(\omega^2-\omega_0^2)^2 + \gamma^2\omega^2\right]}$$

$$= \frac{F_0}{m}\,\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)\cos \omega t + \gamma\omega\,\text{sen}\,\omega t}{\left[(\omega^2-\omega_0^2)^2 + \gamma^2\omega^2\right]}$$

o que coincide com a expressão obtida na página (14) para $F(t) = F_0 \cos \omega t$.

Fenômeno da ressonância

Basicamente temos três regimes para analisarmos o papel da frequência dado um γ.

1) $\omega << \omega_0$ (frequência da "fonte externa"/"driving externo" muito menor que a frequência natural

2) $\omega >> \omega_0$

3) Ressonância $\omega \to \omega_0$

Considerando apenas a solução estacionária

$x_p(t) = A\cos(\omega t - \varphi)$ $\left(\text{onde } A = \dfrac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}} \right)$

e substituindo em $\ddot{x}_p + \omega_0^2 x_p + \gamma \dot{x}_p = \dfrac{F_0}{m}\cos\omega t$,

temos $-\omega^2 x_p + \omega_0^2 x_p - \gamma\omega x_p = \dfrac{F_0}{m}\cos\omega t$.

Se $\omega << \omega_0 \Rightarrow \omega_0^2 x_p \simeq \dfrac{F_0}{m}\cos\omega t$,

de forma que o deslocamento ocorre no mesmo sentido da força externa e é dominado pela força restauradora.

Por outro lado $\omega >> \omega_0$ temos que

$-\omega^2 x_p - \gamma\omega x_p \simeq \dfrac{F_0}{m}\cos\omega t$, de forma que

o deslocamento está fora de fase com a força externa. Neste caso, uma vez que $kx << m\ddot{x}$ ($\omega_0^2 x_p << \ddot{x}_p$), pode-se dizer que o deslocamento é dominado pela massa.

3) Fenômeno da Ressonância ($\omega \to \omega_0$)

À medida que a frequência ω da fonte externa se aproxima da frequência natural das oscilações ω_0, a amplitude de oscilação $A(\omega)$ aumenta. Para encontrarmos o valor de ω_R que maximiza

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}},$$ encontramos:

$$\left(\frac{dA}{d\omega}\right)\Bigg|_{\omega=\omega_R} = 0 \Leftrightarrow -\frac{F_0}{m}\,\frac{-4(\omega_0^2-\omega_R^2)\omega_R + 2\gamma^2\omega_R}{\left[(\omega_0^2-\omega_R^2)^2+\gamma^2\omega_R^2\right]^{3/2}} = 0$$

Assim: $-4\omega_0^2 + 4\omega_R^2 + 2\gamma^2 = 0$

$$\omega_R^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}$$

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/2}$$

Note que quando $\gamma \to 0 \Rightarrow$ a frequência de ressonância aproxima-se da frequência natural

ω_R diminui à medida que γ cresce.

É importante analisarmos a 3 frequências envolvidas:

1) Oscilações livres sem amortecimento

$$\omega_0^2 = k/m$$

2) Oscilações livres com amortecimento

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \gamma^2/4$$

3) Oscilações "forçadas" com amortecimento,

$$\omega_R^2 \cong \omega_0^2 - \gamma^2/2$$

de forma que $\omega_0 > \omega_1 > \omega_R$ e

$\omega_R \to \omega_0$ à medida que γ diminui.

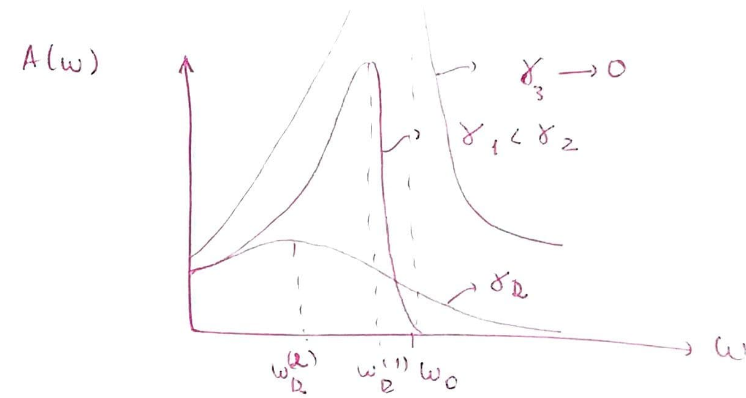
A amplitude máxima $A(\omega_R)$ vale:

$$A(\omega_R) = \frac{F_0}{m\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}},$$

de onde concluímos que quanto menor γ, maior será o máximo $A(\omega_R)$.

No limite em que $\gamma \to 0$, $\omega_R \to \omega_0$ e

$A(\omega_R) \longrightarrow \infty$, conforme ilustrado na figura abaixo:



Em outras palavras,

Quando $\gamma \ll 1$, a curva de ressonância aproxima-se do caso do oscilador harmônico sem amortecimento ($\gamma_3 \to 0$). Porém a ressonância pode ser completamente destruída se $\gamma \gg 1$.

Tais pontos podem ser descritos introduzindo-se o "fator de qualidade" Q, definido por

$$Q \equiv \frac{\omega_R}{\gamma} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/2}}{\gamma} = \sqrt{\frac{\omega_0^2}{\gamma^2} - \frac{1}{2}}$$

Quando $\gamma \gg 1 \Rightarrow Q \longrightarrow 0$.

$\gamma \ll 1 \Rightarrow Q \longrightarrow \infty$.

Em termos do fator de qualidade, a amplitude de oscilação na região da ressonância comporta-se como:

Podemos ainda estudar os efeitos da ressonância também para a energia cinética e/ou energia potencial.

Mais especificamente, uma vez que

$$T(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}_p^2(t)$$

[estamos interessados apenas na solução estacionária $x_p(t)$]

temos

$$T(t) = \frac{F_0^2 \omega^2}{2\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2\right]} \operatorname{sen}^2(\omega t-\varphi)$$

Conforme mencionamos anteriormente, é conveniente calcular $\overline{T}(t)$ médio sobre um período de oscilação, uma vez que $T(t)$ varia no tempo. Neste caso:

$$\overline{T} = \left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^{-1} \int_0^{2\pi/\omega} \operatorname{sen}^2(\omega t-\varphi)\, dt \times \left[\frac{F_0^2\omega^2}{2[(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2]}\right]$$

$$= \frac{F_0^2\omega^2}{4\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2\right]}$$

de forma que a frequência de ressonância da energia cinética ω_R' é tal que $\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial \omega}\right)\Big|_{\omega=\omega_R'}$

de onde obtemos $\omega_R' = \omega_0$ $\Rightarrow$ a ressonância na energia cinética média, em que esta é máxima, ocorre quando $\omega_R' \to \omega_0$

Se analisássemos a frequência onde a energia potencial é máxima, encontraríamos também o valor $\omega_R'' = \omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/2}$

(Isto pode ser entendido uma vez que a energia potencial é proporcional ao quadrado da amplitude).