

# AULA 5

---

## Mecânica Quântica I



Formalismo da Mecânica Quântica (Contínuos)

Há um aspecto que merece atenção especial: o deslocamento de todas as coordenadas. Para construir um operador unitário que faça isso é necessário agrupar as 3 componentes das coordenadas e dos momentos de cada partícula em operadores vetoriais

$$\vec{x}_1 = (q_1, q_2, q_3) \quad \vec{x}_2 = (q_4, q_5, q_6) \quad \text{etc.}$$

Assim  $\vec{x}_n, \vec{p}_n$   $n=1, 2, \dots, N$  são os novos operadores

O deslocamento pelo vetor  $\vec{a}$  deve então ser produzido pelo operador unitário  $T(\vec{a})$  que generaliza  $T(a)$  com

$$\boxed{T(\vec{a})^\dagger \vec{x}_n T(\vec{a}) = \vec{x}_n + \vec{a}} \quad (1) \quad \vec{a} \text{ o mesmo } \forall n$$

Como os operadores de momento individual comutam entre si então

$$T(\vec{a}) = \prod_{n=1}^N e^{-i \frac{\vec{p}_n \cdot \vec{a}}{\hbar}} = e^{-i \frac{\vec{P} \cdot \vec{a}}{\hbar}} \quad (2)$$

onde  $\vec{P} = \sum_{n=1}^N \vec{p}_n$  (momento total do sistema)

### Relações de Incerteza

As relações de incerteza de Heisenberg p/ coord e mom. é um exemplo das relações que valem p/ todos os pares de observáveis incompatíveis

Definimos: a incerteza da medida do observável  $A$ ,  $\Delta A$ , é dada por

$$\Delta A = \sqrt{\langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2} \quad (3)$$

suponha que temos 3 operadores tais que  
 $[A, B] = iC$  onde  $C = C^\dagger$

se definirmos:

$$\bar{A} = A - \langle A \rangle$$

$$(\Delta A)^2 = \langle \bar{A}^2 \rangle$$

$$\bar{A} |\phi\rangle = |\phi_A\rangle$$

$$\bar{B} = B - \langle B \rangle, \text{ assim}$$

$$(\Delta B)^2 = \langle \bar{B}^2 \rangle$$

$$\bar{B} |\phi\rangle = |\phi_B\rangle$$

assim

$$\begin{aligned} (\Delta A \Delta B)^2 &= \langle \phi | \bar{A}^2 | \phi \rangle \langle \phi | \bar{B}^2 | \phi \rangle \\ &= \langle \phi_A | \phi_A \rangle \langle \phi_B | \phi_B \rangle \geq |\langle \phi_A | \phi_B \rangle|^2 \end{aligned}$$

desigualdade de Schwarz

$$\Rightarrow (\Delta A \Delta B)^2 \geq |\langle \bar{A} \bar{B} \rangle|^2$$

$$\text{mas } \bar{A} \bar{B} = (A - \langle A \rangle)(B - \langle B \rangle) = AB - A\langle B \rangle - B\langle A \rangle + \langle A \rangle \langle B \rangle$$

$$= \frac{1}{2} [\bar{A}, \bar{B}] + \frac{1}{2} \{ \bar{A}, \bar{B} \} = \frac{i}{2} C + \frac{1}{2} \{ \bar{A}, \bar{B} \}$$

$$[\bar{A}, \bar{B}] = \bar{A} \bar{B} - \bar{B} \bar{A}$$

$$\{ \bar{A}, \bar{B} \} = \bar{A} \bar{B} + \bar{B} \bar{A}$$

operadores hermitianos



$$\Rightarrow (\Delta A \Delta B)^2 \geq |\langle \bar{A} \bar{B} \rangle|^2$$

$$\geq \left| \frac{i}{2} \langle C \rangle + \frac{1}{2} \langle \{ \bar{A}, \bar{B} \} \rangle \right|^2$$

$$\geq \frac{1}{4} |\langle \{ \bar{A}, \bar{B} \} \rangle + i \langle C \rangle|^2$$

Como valores esperados são números reais e o valor absoluto de um # complexo é  $\geq$  a sua parte imaginária (seu) então

$$\boxed{(\Delta A \Delta B) \geq \frac{1}{2} |\langle C \rangle| = \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle|} \quad (4)$$

forma geral das relações de incerteza.

ex:

$$\Delta p_i \Delta q_j \geq \frac{1}{2} \hbar \delta_{ij}$$

### III - Equações de Movimento

(a) Descrição de Schrödinger

O princípio de superposição requer que a evolução temporal seja uma transformação linear

Assumimos que a evolução temporal será representada por um operador unitário parametrizado por um parâmetro  $t$

Se  $|\psi; 0\rangle$  é o estado do sistema em  $t=0$  então

$$|\psi; t\rangle = L_t |\psi; 0\rangle \quad (1) \text{ e o estado do sistema no instante } t$$

$\uparrow$   
operador linear

Considere um observável  $A$  independente do tempo com espectro  $(a', a'', \dots)$ . O valor esperado como função de  $t$  é

$$\begin{aligned}\langle \psi; t | A | \psi; t \rangle &= \sum_a \langle \psi; t | a \rangle a \langle a | \psi; t \rangle \\ &= \sum_a a |\langle \psi; t | a \rangle|^2 \quad (2)\end{aligned}$$

em geral as probabilidades  $|\langle \psi; t | a \rangle|^2$  mudam com o tempo, mas por hipótese, os auto-valores não!

$$\begin{aligned}\langle \psi; t | A | \psi; t \rangle &= \langle \psi; 0 | L_t^\dagger A L_t | \psi; 0 \rangle \\ &= \sum_{a_t} a_t |\langle \psi; 0 | a_t \rangle|^2\end{aligned}$$

$\{|a_t\rangle\}$  são auto-vetores de  $L_t^\dagger A L_t$  com autovalores  $\{a_t\}$  mas o espectro não pode mudar com o tempo. Qualquer transformação unitária de um operador hermitiano deixa seu espectro invariante. Esse é o fato que justifica assumir que  $L_t$  seja um operador unitário.

Logo existe  $U(t', t)$  tal que

$$|\psi; t'\rangle = U(t', t) |\psi; t\rangle \quad (2)$$

Considere inicialmente um sistema isolado de forma que a origem do tempo não tenha significado físico. Nesse

Caso

$$U(t', t) \equiv U(t' - t) \quad (3)$$

Esses operadores precisam obedecer a lei de

Composição

$$U(t - t') U(t' - t_0) = U(t - t_0) \quad (4)$$

(4)



se  $t_0 = t$   $U(0) = \mathbb{1}$  (5a)

assim  $\Rightarrow U(t-t') U(t'-t) = \mathbb{1}$

$\Rightarrow U^{-1}(t-t') = U(t'-t) = U^\dagger(t-t')$  (5b)

$U(t_2) U(t_1) = U(t_2+t_1)$  (5c)

assim para uma variação infinitesimal  $\delta t$

temos  $U(\delta t) = \mathbb{1} + \delta U(\delta t)$ ,  $\delta t \rightarrow 0$ ,  $U(\delta t) \rightarrow \mathbb{1}$

$\Rightarrow U(\delta t) = \mathbb{1} - i \Delta(\delta t)$

$\Delta(\delta t)$  deve ser um operador hermitiano infinitesimal.  
de forma que  $U$  seja unitário em 1ª ordem em  $\Delta$ :

$U^\dagger(\delta t) U(\delta t) = (1+i\Delta)(1-i\Delta) = 1 + \mathcal{O}(\Delta^2)$

$= (1+\delta U^\dagger)(1+\delta U) = 1 + \delta U + \delta U^\dagger + \mathcal{O}(\delta U^2)$

$\Rightarrow \delta U + \delta U^\dagger = 0 \Rightarrow \delta U = i \times \text{operador hermitiano.}$

A lei de composição<sup>(5c)</sup> leva a

$[1-i\Delta(\delta t_1)][1-i\Delta(\delta t_2)] = 1-i\Delta(\delta t_1+\delta t_2)$

$\Delta(\delta t_1) + \Delta(\delta t_2) = \Delta(\delta t_1+\delta t_2) \Rightarrow \Delta(\delta t) \propto \delta t$

$\boxed{U(\delta t) = 1 - i \frac{\delta t}{\hbar} H}$  (6)  $H$  não depende de  $t$ .

$U(t+\delta t) = U(t) U(\delta t)$

$$\begin{aligned}
 U(t+\delta t) - U(t) &= U(t)(U(\delta t) - 1) \\
 &= (U(\delta t) - 1)U(t) \quad (\text{usando (6)}) \\
 &= -i \frac{\delta t}{\hbar} H U(t) \quad (7)
 \end{aligned}$$

tomando o lim  $\delta \rightarrow 0$   $\frac{U(t+\delta t) - U(t)}{\delta t} = \frac{\partial U(t)}{\partial t} \quad (8)$

$$i\hbar \frac{\partial U(t)}{\partial t} = H U(t) \quad (9a)$$

$$U(t) = e^{-i\frac{Ht}{\hbar}} \quad U(0) = \mathbb{1} \quad (9b)$$

operador de translação no tempo.

$H$  não depende de  $t$

A equação de Schrödinger vem de (2) e (9a)

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi; t\rangle &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t) |\psi; 0\rangle \\
 &= H U(t) |\psi; 0\rangle = H |\psi; t\rangle \quad (10)
 \end{aligned}$$

Como sabemos os autoestados de  $H$  tem importância especial  
Para encontrá-los precisamos resolver a equação de autovalores

$$(H - E) |\psi_E; 0\rangle = 0 \quad (11)$$

Equação de Schrödinger indep. do tempo

$$|\psi_E; t\rangle = e^{-i\frac{Ht}{\hbar}} |\psi_E; 0\rangle = e^{-i\frac{Et}{\hbar}} |\psi_E; 0\rangle \quad (12)$$

estados estacionários



$$\langle \psi_E; t | A | \psi_E; t \rangle = \langle \psi_E; 0 | e^{+i\frac{Ht}{\hbar}} A e^{-i\frac{Ht}{\hbar}} | \psi_E; 0 \rangle$$

$$= e^{\frac{i(E-E')t}{\hbar}} \langle \psi_E; 0 | A | \psi_E; 0 \rangle$$

qualquer observável A independente do tempo tem um elemento de matriz entre estados estacionários cujo dependência temporal aparece só na fase!

Consideremos agora um sistema de  $N$ -partículas descrito por um Hamiltoniano que tem a forma familiar da Mecânica Clássica quando as forças não dependem da velocidade

$$H = \sum_{n=1}^N \frac{\vec{p}_n^2}{2m_n} + V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) \quad (13)$$

$\vec{x}_i = (q_1, q_2, q_3) \rightarrow$  operadores  
 $\vec{r}_i = (q_1', q_2', q_3') \rightarrow$  autovalores

$\vec{x}_n$  operador das coord.  
 $\vec{r}_n$  autovalores deste operador

Vamos agora colocar a equação de Schrödinger (10) na representação das coordenadas. Lembremos que

$$\langle \vec{r}_1 \dots \vec{r}_N | (\vec{p}_n)^p | \psi; t \rangle = \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \vec{r}_n} \right)^p \psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N; t)$$

assim:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \vec{r}_1 \dots \vec{r}_N | \psi; t \rangle = \sum_{n=1}^N \langle \vec{r}_1 \dots \vec{r}_N | \frac{\vec{p}_n^2}{2m_n} | \psi; t \rangle$$

$$+ \langle \vec{r}_1 \dots \vec{r}_N | V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) | \psi; t \rangle$$

usando (10) e (13)



$$\langle \vec{r}_1 \dots \vec{r}_N | \psi; t \rangle = \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N; t) \equiv \psi(t)$$

$$\left[ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t) = \left[ \sum_{n=1}^N \frac{1}{2m_n} \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \vec{r}_n} \right)^2 + V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \right] \psi(t) \right] \quad (14)$$

obs:

$$\langle \vec{r}_1 \dots \vec{r}_N | V(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N) | \psi; t \rangle = \int d\vec{r}'_1 \dots d\vec{r}'_N \langle \vec{r}_1 \dots \vec{r}_N | V(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N)$$

$$| \vec{r}'_1 \dots \vec{r}'_N \rangle \langle \vec{r}'_1 \dots \vec{r}'_N | \psi; t \rangle$$

onde

$$\langle \vec{r}_1 \dots \vec{r}_N | V(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N) | \vec{r}'_1 \vec{r}'_2 \dots \vec{r}'_N \rangle = V(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N) \langle \vec{r}_1 \dots \vec{r}_N | \vec{r}'_1 \dots \vec{r}'_N \rangle$$

$$= V(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N) \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}'_1) \dots \delta(\vec{r}_N - \vec{r}'_N)$$

$$\langle \vec{r}'_1 \dots \vec{r}'_N | \psi; t \rangle = \psi(\vec{r}'_1, \dots, \vec{r}'_N; t)$$

logo

$$\langle \vec{r}_1 \dots \vec{r}_N | V(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N) | \psi; t \rangle = \int d\vec{r}'_1 \dots d\vec{r}'_N V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}'_1) \dots$$

$$\delta(\vec{r}_N - \vec{r}'_N) \cdot \psi(\vec{r}'_1, \dots, \vec{r}'_N; t) = V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N; t)$$

$$= V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \psi(t)$$

O produto escalar de quaisquer duas soluções da Equação de Schrödinger é independente do tempo

$$\langle \psi_1; t | \psi_2; t \rangle \equiv \langle \psi_1; 0 | \psi_2; 0 \rangle \quad (15)$$

A norma é um caso particular de (15)

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \psi; t | \psi; t \rangle = \frac{\partial}{\partial t} \int d\vec{r}_1 \dots d\vec{r}_N \langle \psi; t | \vec{r}_1 \dots \vec{r}_N \rangle \langle \vec{r}_1 \dots \vec{r}_N | \psi; t \rangle$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \int d\vec{r}_1 \dots d\vec{r}_N |\psi(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N, t)|^2 = \frac{\partial}{\partial t} \int d\vec{r}_1 \dots d\vec{r}_N w(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) \quad (16)$$

Usando uma notação enxuta p/  $E_F$  de Schrödinger na base das coord.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle F | \psi \rangle = \langle F | H | \psi \rangle \quad (17a)$$

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \psi | F \rangle = \langle \psi | H | F \rangle \quad (17b)$$

e para  $E_F$  (16)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \psi | F \rangle \langle F | \psi \rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(F, t)|^2 \quad (16') \quad \left( \begin{array}{l} \text{para ser entendido} \\ \text{na notação completa} \\ \text{aínda} \end{array} \right)$$

$$i\hbar \left( \frac{\partial}{\partial t} \langle \psi | F \rangle \right) \psi(F, t) + i\hbar \psi^*(F, t) \left( \frac{\partial}{\partial t} \langle F | \psi \rangle \right) = -\langle \psi | H | F \rangle \psi(F, t)$$

$$+ \psi^*(F, t) \langle F | H | \psi \rangle \quad (17)$$

$$H = V + T$$

(1)  $\langle F | V(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N) | \psi \rangle = V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \langle F | \psi \rangle$  :  $V$  é diagonal na representação das coordenadas não constitui para o lado direito de (17)

$$(2) \langle F | K | \psi \rangle = \frac{1}{2m_n} \langle F | \vec{p}_n^2 | \psi \rangle = \frac{1}{2m_n} \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \vec{r}_n} \right)^2 \psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t)$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m_n} \frac{\partial}{\partial \vec{r}_n} \frac{\partial}{\partial \vec{r}_n} \psi(\vec{r}, t)$$

$$(3) \langle \psi | K | F \rangle = \frac{1}{2m_n} \langle \psi | \vec{p}_n^2 | F \rangle = \frac{\psi^*(\vec{r}, t)}{2m_n} \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial \vec{r}_n} \right)^2$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m_n} \frac{\partial}{\partial \vec{r}_n} \frac{\partial}{\partial \vec{r}_n} \psi^*(\vec{r}, t)$$



$$\therefore \psi^*(\vec{r}, t) \langle \vec{r} | K | \psi \rangle = -\psi^*(\vec{r}, t) \frac{\hbar^2}{2m_n} \frac{\partial}{\partial \vec{r}_n} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}_n} \psi(\vec{r}, t)$$

$$\langle \psi | K | \psi \rangle \psi(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m_n} \frac{\partial}{\partial \vec{r}_n} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}_n} \psi^*(\vec{r}, t) \cdot \psi(\vec{r}, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int d\vec{r}_1 \dots d\vec{r}_N w(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N, t) = - \int d\vec{r}_1 \dots d\vec{r}_N \sum_{n=1}^N \frac{1}{i\hbar} \left[ \frac{\hbar^2}{2m_n} \frac{\partial}{\partial \vec{r}_n} \cdot \right.$$

$$\left. \left( \psi^* \frac{\partial}{\partial \vec{r}_n} \psi - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial \vec{r}_n} \right) \right]$$

logo em uma região infinitesimal do espaço de configuração temos:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} w(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N, t) + \sum_{n=1}^N \frac{\partial}{\partial \vec{r}_n} \cdot \vec{j}_n(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = 0 \right] \quad (18)$$

onde

$$\vec{j}_n = \frac{\hbar}{2m_n i} \left( \psi^* \frac{\partial}{\partial \vec{r}_n} \psi - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial \vec{r}_n} \right) \quad (19)$$

Equação de Continuidade

para um estado estacionário, i.e.  $\frac{\partial w}{\partial t} = 0$ , a equação de continuidade se reduz à condição que a corrente tem divergente nulo

$$\sum_n \frac{\partial}{\partial \vec{r}_n} \cdot \vec{j}_n = 0$$

Até agora discutimos a evolução temporal de estados puros. E misturas? Voltamos ao formalismo de matriz densidade ou operador estatístico.

Seja  $\{|a\rangle\}$  a base que diagonalize um certo operador estatístico  $\rho$  em  $t=0$ .

$$\rho(0) = \sum_a |a\rangle p_a \langle a| \quad (20)$$

em um tempo posterior  $|a\rangle \rightarrow e^{-\frac{iHt}{\hbar}} |a\rangle$

$$\boxed{\rho(t) = e^{-\frac{iHt}{\hbar}} \rho(0) e^{\frac{iHt}{\hbar}}} \quad (21)$$

$p_a$  não muda com  $t$ .

logo

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -\frac{iH}{\hbar} e^{-\frac{iHt}{\hbar}} \rho(0) e^{\frac{iHt}{\hbar}} + \frac{i}{\hbar} e^{-\frac{iHt}{\hbar}} \rho(0) e^{\frac{iHt}{\hbar}} H$$

$$= -\frac{i}{\hbar} H \rho(t) + \frac{i}{\hbar} \rho(t) H = \cancel{\frac{i}{\hbar}} -\frac{i}{\hbar} [H, \rho]$$

$$\therefore \boxed{i\hbar \frac{d\rho(t)}{dt} = [H, \rho(t)]} \quad (22)$$

Equações de Movimento  
da Matriz Densidade.

Para finalizar a descrição de Schrödinger vamos considerar agora um sistema exposto a forças dependente do tempo  $H=H(t)$ .

Nesse caso a origem do tempo não é mais arbitrária. A dependência temporal de  $H$  quebra explicitamente essa simetria.

$$U(t', t) \neq U(t' - t)$$



A lei de composição é agora

$$U(t'', t') U(t', t) = U(t'', t) \quad (23)$$

podemos mostrar que nesse caso (lista 2)

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t') = H(t) U(t, t')} \quad (24)$$

a forma para a Eq. de Schrödinger dependente de  $t$  é a mesma

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi; t\rangle = H(t) |\psi; t\rangle} \quad (25)$$

Note que o produto escalar de duas soluções das Eqs. continua independente do tempo!

Mas  $[H(t), H(t')] \neq 0$  a solução não é mais trivial!

Voltaremos aqui mais adiante.

(b) Descrição de Heisenberg.

Embora as descrições de Schrödinger e Heisenberg sejam equivalentes, a de Heisenberg é mais útil para mostrar simetrias e leis de conservação, e é indispensável para sistemas com muitos graus de liberdade.

Schrödinger:  $\begin{cases} \text{estados evoluem com } t \\ \text{observáveis não evoluem com } t \end{cases}$

↙  
a não ser que seja explicitamente dependente de  $t$   
eg  $H(t)$

Heisenberg :  $\begin{cases} \text{estados não evoluem com } t \\ \text{observáveis evoluem com } t. \end{cases}$

Assume que  $H$  não depende de  $t$  :  $U(t) = e^{-\frac{iHt}{\hbar}}$

Seja  $\{|\psi_b; t\rangle\}$  um conj completo de soluções de Eq. de Schrödinger,  $|\psi_b; t=0\rangle = |\psi_b\rangle$

Seja  $A$  um observável independente de  $t$ .

$$\langle \psi_b; t | A | \psi_b; t \rangle = \langle \psi_b | e^{\frac{iHt}{\hbar}} A e^{-\frac{iHt}{\hbar}} | \psi_b \rangle$$

- Os kets que descrevem a evolução temporal de estados puros estão fixos no espaço de Hilbert

$$- A_H(t) = e^{\frac{iHt}{\hbar}} A_S e^{-\frac{iHt}{\hbar}} \quad (1)$$

$$|\psi, t\rangle_S = U(t) |\psi\rangle_H \quad (2)$$

$$\frac{dA_H(t)}{dt} = \frac{iH}{\hbar} A_H(t) - \frac{i}{\hbar} A_H(t) H = -\frac{i}{\hbar} [A_H, H]$$

Equação de Movimento  
de Heisenberg.

$$\boxed{i\hbar \frac{dA_H(t)}{dt} = [A_H(t), H]} \quad (3)$$

$$H_H = e^{\frac{iHt}{\hbar}} H_S e^{-\frac{iHt}{\hbar}} = H_S = H$$

$\Rightarrow$  observáveis que comutam com  $H$  são constantes de movimento

$\Rightarrow$  qualquer const. de movimento pode ser diagonalizada simultaneamente com  $H$  (seu autoestado simultâneo)



Um ket  $|\alpha\rangle_S$  que é estacionário na representação de Schrödinger transforma-se no ket

$$|\alpha(t)\rangle_H = U^\dagger(t) |\alpha\rangle_S \quad (4)$$

Um observável que é explicitamente dependente do tempo na representação de Schrödinger  $B_S(t)$  na representação de Heisenberg

$$i\hbar \frac{d}{dt} B_H(t) = i\hbar \frac{\partial B_H(t)}{\partial t} + [B_H(t), H] \quad (5)$$

Se  $H_S = H_S(t)$  Generalização

$$A_H(t, t') = U^\dagger(t, t') A_S U(t, t') \quad (6)$$

$$\text{Se } H_S = \sum \frac{p_n^2}{2m_n} + V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = U^\dagger H U = H_H = H$$

$$\text{mas } p_j = p_j(t) \quad V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t)$$

$$i\hbar \frac{dq_i}{dt}(t) = [q_i(t), H_H]$$

$$\begin{aligned} [q_i(t), p_j(t)] &= U^\dagger q_i U U^\dagger p_j U - U^\dagger p_j U U^\dagger q_i U \\ &= U^\dagger q_i p_j U - U^\dagger p_j q_i U = U^\dagger [q_i, p_j] U = i\hbar \delta_{ij} \end{aligned}$$

$$[q_i(t), p_j^2(t)] = i\hbar 2 p_j(t) \delta_{ij}$$

$$\bullet i\hbar \frac{dq_i}{dt}(t) = [q_i(t), H] = \frac{1}{2m_i} [q_i(t), p_i^2] = \frac{i\hbar}{m_i} p_i(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$\bullet i\hbar \frac{dp_i}{dt}(t) = [p_i(t), H] = [p_i(t), V] = U^\dagger [p_i, V] U = U^\dagger \frac{\hbar}{i} \frac{\partial V}{\partial q_i} U$$

$$\left[ \frac{dp_i(t)}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \right] \quad (7)$$

$$\left[ \frac{dq_i(t)}{dt} = \frac{p_i(t)}{m_i} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \right] \quad (8)$$

(14)