Exercício 17, Lista zeros de funções.

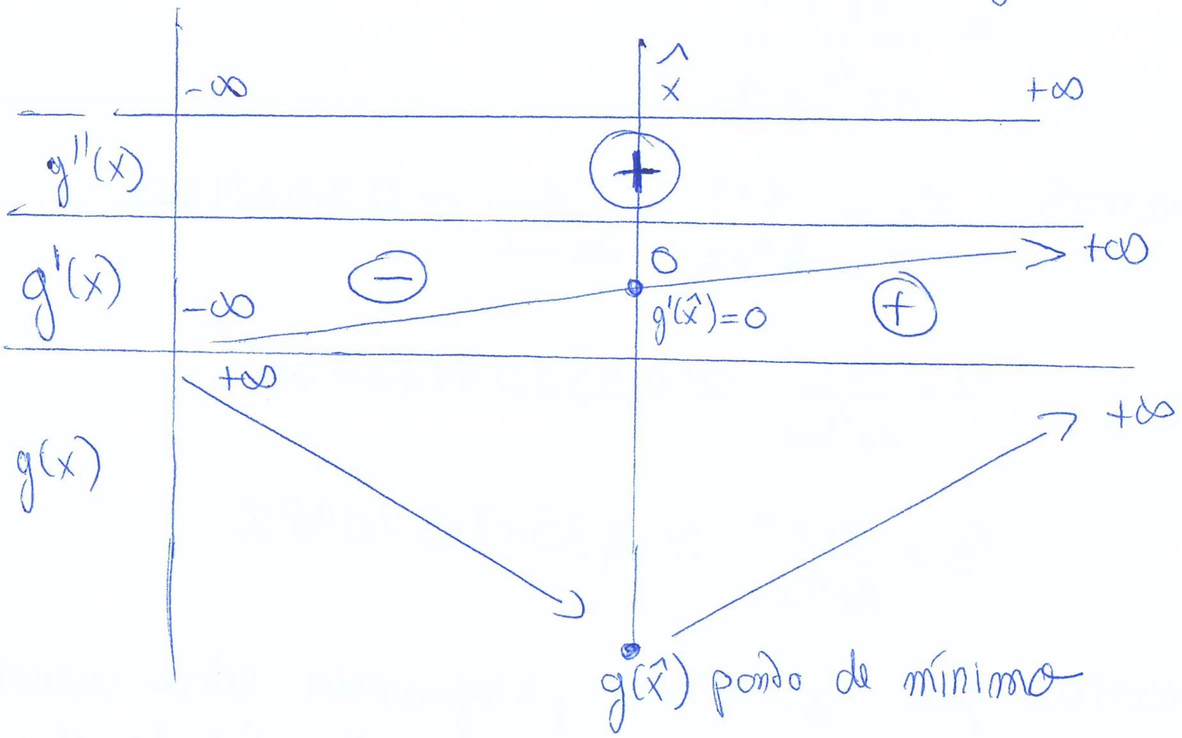
(a) Mostre que $g(x) = x^2 + e^{-x}$ tem um único ponto de mínimo positivo.

- $g(x) = x^2 + e^{-x}$
- $g'(x) = 2x - e^{-x}$
- $g''(x) = 2 + e^{-x} > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^2$
- $g'(\hat{x}) = 0 \iff 2\hat{x} = e^{-\hat{x}} > 0 \Rightarrow \hat{x} > 0 \Rightarrow e^{-\hat{x}} < 1$

$$\Rightarrow \frac{e^{-\hat{x}}}{2} < \frac{1}{2}$$

então se $\hat{x}$ é uma raiz de g', $\hat{x}$ satisfaz $\boxed{0 < \hat{x} < \frac{1}{2}}$

- Vamos escrever a tabela de variações de g



Como g é decrescente em $(-\infty, \hat{x}]$ e g crescente em $[\hat{x}, +\infty)$, $\hat{x}$ é um ponto de mínimo de g. O ponto de mínimo é único pois g é estritamente decrescente em $(-\infty, \hat{x}]$, e g é estritamente crescente em $[\hat{x}, +\infty)$

(b) Calcule uma aproximação para $\hat{x}$ utilizando o método de Newton (Calcule 3 iterações a partir de $x_0 = 1$). Mostre que o método de Newton é convergente para esta escolha

Solução: Cuidado, estamos procurando uma raiz de g', e não uma raiz de g!

Newton: $$x_{k+1} = x_k - \frac{g'(x_k)}{g''(x_k)} = x_k - \frac{2x_k - e^{-x_k}}{2 + e^{-x_k}}$$

$$= \frac{x_k e^{-x_k} + e^{-x_k}}{2 + e^{-x_k}}$$

$$= \frac{x_k + 1}{2e^{x_k} + 1}$$

Calculamos $x_1 = \frac{x_0 + 1}{2e^{x_0} + 1} = \frac{2}{2e + 1} \simeq 0{,}310724807$

$$x_2 = \frac{x_1 + 1}{2e^{x_1} + 1} \simeq 0{,}351511125856$$

$$x_3 = \frac{x_2 + 1}{2e^{x_2} + 1} \simeq 0{,}35173370481$$

Observamos que $x_3 > x_2 > x_1$, a sequencia esta crescente. a partir de x_1

• Para mostrar que o método de Newton é convergente para esta escolha, vamos aplicar um teorema do curso (teorema de convergência global do método de Newton)

$$\begin{cases} f(x) = g'(x) = 2\cancel{x} - e^{-x} \\ f'(x) = g''(x) = 2 + e^{-x} > 0 \quad , \forall x \in \mathbb{R}^2 \\ f''(x) = g'''(x) = -e^{-x} < 0 \quad , \forall x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

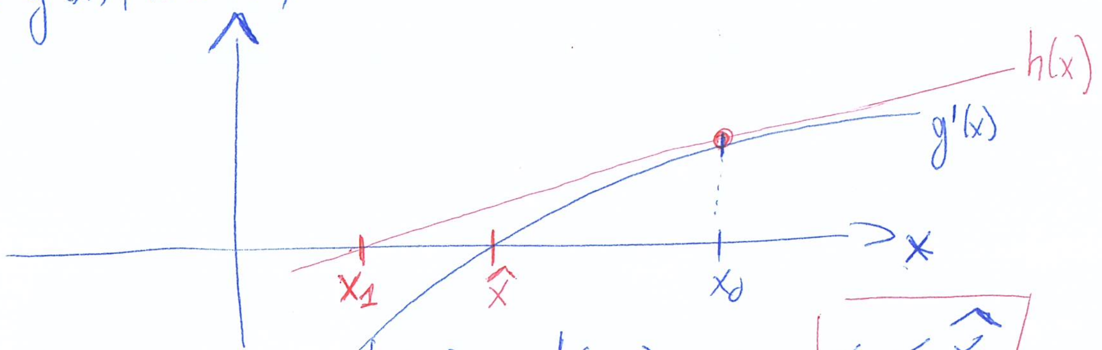
então g' é concava e crescente em $\mathbb{R}^2$.

Já sabemos que $0 < \hat{x} < \frac{1}{2}$, então poderíamos escolher $[a,b] = [0, \frac{1}{2}]$ ou $[a,b] = [0, 1]$. Vamos escolher $[a,b] = [0,1]$.

As condições do teorema são satisfeitas, então deveríamos escolher x_0 tal que $f(x_0) f''(x_0) \geq 0 \Leftrightarrow f(x_0) \leq 0$, pois $f''(x) < 0$.

Mas claramente temos $f(x_0) > 0$ se $x_0 = 1$, pois $0 < \hat{x} < \frac{1}{2}$, e $f = g'$ é crescente. Então $x_0 = 1$ não foi uma escolha apropriada. Do outro lado, podemos verificar se x_1 satisfaz $f(x_1) f''(x_1) \geq 0 \Leftrightarrow f(x_1) \leq 0$.

De fato, é possível mostrar que $h(x) \geq g'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$, onde $h(x) = g''(x_0)(x - x_0) + g'(x_0)$ é a equação da tangente ao gráfico de $g'(x)$ no ponto x_0. A propriedade $h(x) \geq g'(x), \forall x \in \mathbb{R}^2$, vem da concavidade de g'



Isso mostra que $0 = h(x_1) \geq g'(x_1) \Rightarrow \boxed{x_1 < \hat{x}}$

Então x_k é crescente a partir de $k=1$, e $x_k \to \hat{x}$ tal que $g'(\hat{x}) = 0$

c) Sem determinar o valor da solução, verifique se o valor determinado no item (b) dista menos que 10^{-3} do ponto de mínimo. Justifique.

Solução: A iteração de Newton é $x_{k+1} = F(x_k) = \dfrac{x_k + 1}{2e^{x_k} + 1}$

Vamos aplicar o ~~teorema~~ Algo de ponto fixo com precisão pré-fixada para sequencias crescentes.

Vamos definir $\phi(x) = F(x) - x = -\dfrac{g'(x)}{g''(x)} = \dfrac{-2x + e^{-x}}{2 + e^{-x}}$

Vamos calcular $\phi(x_3 + \delta)$, com $\delta = 10^{-3}$, pois x_k é crescente a partir de $k = 1$. Se $\phi(x_3 + \delta) < 0$, então $\hat{x} \in [x_3, x_3 + \delta]$ (Ver algoritmo no curso)

Como $g''(x) = 2 + e^{-x} > 0$, $\phi(x_3 + \delta) < 0 \Leftrightarrow g'(x_3 + \delta) > 0$

Vamos calcular então $g'(x_3 + \delta) = 2(x_3 + \delta) - e^{-(x_3 + \delta)}$

$$g'(x_3) = g'(0{,}3517337048\,1) \simeq -1{,}74 \times 10^{-8} < 0$$

$$g'(x_3 + \delta) = g'(0{,}3527337048\,1) \simeq 2{,}7 \times 10^{-3} > 0$$

$$\Rightarrow \hat{x} \in [x_3, x_3 + \delta]$$