Ex. 12, Lista de integração

Enunciado: é dada a função f tabelada:

x	0.0	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2.0
$f(x)$	1.0	0.5	0.0	-0.5	0.0	0.5	1.0	1.5	1.0

1) Determine o polinômio de grau ≤ 2 que interpola $F(t) = \int_0^t f(x)\,dx$ em $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$ usando o método de n-Simpson para avaliar $F(t)$

2) Determine o polinômio interpolador de F de grau 3 nos pontos 0, 0.5, 1 e 2.

Correção do exercício

Vamos calcular primeiro $F(0)$, $F(0,5)$, $F(1)$, $F(2)$

$F(0) = 0$

$$F(1) = \int_0^1 f(x) \simeq \frac{h}{3}\left[f(0) + 4f(0,25) + 2f(0,5) + 4f(0,75) + f(1)\right]$$

usando a fórmula de Simpson composta com $n=2$,
$[a,b] = [0,1]$, $h = \frac{(b-a)}{2n} = 0.25$, $x_0 = 1$, $x_1 = 0.25$, $x_2 = 0.5$, $x_3 = 0.75$, $x_4 = 1$

$$F(2) = \int_0^2 f(x) \simeq \frac{h}{3}\left[f(0) + 4f(0.25) + 2f(0.5) + 4f(0,75) + 2f(1) + 4f(1.25) + 2f(1.5) + 4f(1,75) + f(2)\right]$$

com $n = 4$, $[a,b] = [0,2]$, $h = \frac{(b-a)}{2n} = 0,25$

$$F(0.5) = \int_0^{0.5} f(x) \simeq \frac{h}{3}\left[f(0) + 4f(0,25) + f(0,5)\right]$$

com $n = 1$, $[a,b] = [0, 0.5]$, $h = \frac{(b-a)}{2n} = 0,25$

Calculamos

$$F(1) \simeq \frac{1}{12}\left[1 + 2 + 0 - 2 + 0\right] = \frac{1}{12}$$

$$F(2) \simeq \frac{1}{12}\left[1 + 2 + 0 - 2 + 0 + 2 + 2 + 6 + 1\right] = 1$$

$$F(0.5) \simeq \frac{1}{12}\left[1 + 2 + 0\right] = \frac{1}{4}$$

Vamos usar um polinómio interpolador na forma de Newton

x_i	$F(x_i)$	1ª diferença dividida	2ª dif. div.	3ª dif. div.
0.5	$\frac{1}{4}$			
		$\frac{0-\frac{1}{4}}{0-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$		
0	0		$\frac{\frac{1}{12}-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = -\frac{5}{6}$	
		$\frac{\frac{1}{12}-0}{1-0} = \frac{1}{12}$		$\frac{\frac{5}{12}+\frac{5}{6}}{2-\frac{1}{2}} = \frac{5}{6}$
1	$\frac{1}{12}$		$\frac{\frac{11}{12}-\frac{1}{12}}{2-0} = \frac{5}{12}$	
		$\frac{1-\frac{1}{12}}{2-1} = \frac{11}{12}$		
2	1			

- O polinomio interpolador relativamente a $\{0, 0.5, 1, 2\}$ é

$$P_3^0(x) = f[x_0] + (x-x_0)f[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2] + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)f[x_0,x_1,x_2,x_3]$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{(x-0.5)}{2} - \frac{5}{6}x(x-0.5) + \frac{5}{6}x(x-0.5)(x-1)$$

$$= \frac{5}{6}x^3 - \frac{25}{12}x^2 + \frac{4}{3}x$$

- O polinomio interpolador de $\{0, 1, 2\}$ é

$$P_3^1(x) = 0 + \frac{1}{12}(x-0) + \frac{5}{12}(x-0)(x-1)$$

$$= \frac{x}{12} + \frac{5}{12}x(x-1)$$