MAP 3122: Exercício de integração numérica

Consideramos a integral

$$L = \int_0^{\pi} x \sin x dx.$$

Nesse problema, os cálculos dos $T_k(m)$ devem ser feitos usando truncamento a 7 decimais.

1. Calcule o valor exato da integral L (sem usar calculadora).
2. Seja $T_0(m)$ a fórmula dos trapézios composta para m intervalos em $[0, \pi]$ que aproxima L. Calcule $T_0(m)$ para $m = 1, 2, 4$. (escreve também a expressão explícita de $T_0(m)$ para cada m).
3. Escreva a tabela de Romberg para a aproximação de L usando os valores $m = 1, 2, 4$. Qual é a melhor aproximação de L nessa tabela (justifique)?
4. Calcule o erro cometido (exato) ao aproximar L usando a melhor aproximação de L da tabela de Romberg.
5. Qual é o valor mínimo de m que devemos escolher para aproximar L com uma precisão ε usando apenas $T_0(m)$? Calcule esse valor mínimo de m quando a precisão ε é igual ao erro calculado no item 4.

Dica: o erro cometido E ao calcular a integral duma função f num intervalo $[a, b]$ usando $T_0(m)$ satisfaz

$$E \leq \frac{(b-a)^3}{12m^2} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$

1) $L = \int_0^{\pi} x \sin x \, dx$

$= \left[-x\cos x\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x = \pi$

↑ usando integração por partes

2) Calculemos a fórmula dos trapézios $T_0(m)$ para $m = 1, 2, 4$.

$T_0(1) = \frac{\pi}{2}\left[0 \sin(0) + \pi \sin\pi\right] = 0$

$T_0(2) = \frac{\pi}{4}\left[0\sin(0) + 2\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} + \pi\sin\pi\right] = \frac{\pi}{4}^2 \simeq 2,4674011$

$T_0(4) = \frac{\pi}{8}\left[0\sin(0) + 2\cdot\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4} + 2\cdot\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} + 2\cdot\frac{3\pi}{4}\sin\frac{3\pi}{4} + \pi\sin\pi\right]$

$= \frac{\pi}{8}\left[\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \pi + \frac{3\pi}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right] = \frac{\pi}{8}^2\left[1+\sqrt{2}\right] \simeq 2,9784166$

3) Agora podemos escrever a tabela de Romberg

$T_1(m) = \frac{4T_0(2m) - T_0(m)}{3}$ $\quad$ $T_2(m) = \frac{16\,T_1(2m) - T_1(m)}{15}$

m	$T_0(m)$	$T_1(m)$	$T_2(m)$
1	0 →	3,2898681 →	3,13934756
2	2,4674011 →	3,1487551	
4	2,9784166		

$|T_1(2) - L| \simeq 7,16 \times 10^{-3}$ $\quad$ $|T_2(1) - L| \simeq 2,245 \times 10^{-3}$

Então $T_2(1)$ é a melhor aproximação

4) O erro cometido "exato" é

$$|T_2(1) - L| = 2{,}245 \times 10^{-3} = \varepsilon$$

5) O erro usando a fórmula dos trapézios $T_0(m)$ é

$$|E| \leq \frac{(b-a)^3}{12m^2} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| \quad , \text{ com } [a,b] = [0,\pi]$$

Temos $\begin{cases} f(x) = x \sin x \\ f'(x) = \sin x + x \cos x \\ f''(x) = 2\cos x - x \sin x \end{cases}$

então $\max_{[0,\pi]} |f''(x)| \leq \max_{[0,\pi]} |2\cos x - x \sin x| \leq \max_{[0,\pi]} (2 + |x|) \leq 2 + \pi$

Observação: Talvez poderíamos obter uma estimativa melhor estudando as variações de $f''(x)$ em $[0, \pi]$

Então $|E| \leq \frac{\pi^3}{12m^2}(2+\pi) \leq \varepsilon \Rightarrow m \geq \left(\frac{\pi^3(2+\pi)}{12\varepsilon}\right)^{1/2}$

Usando $\varepsilon = 2{,}245 \times 10^{-3}$ obtemos $m \geq 76{,}9263$

Então precisamos de $m = 77$ para obter a precisão ε.