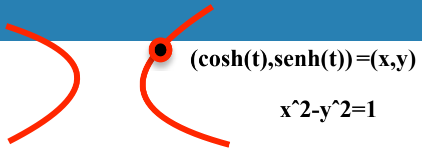
Conteúdos referentes a limites e funções contínuas

Universidade de São Paulo

São Carlos - SP, Brasil

1^o **Semestre de 2020**

Funções hiperbólicas



t=dobro da área no primeiro quadrante entre o eixo x, eixo y e a hiperbole.

O gráfico da função $cosh(x)$ aparece a cada vez que uma corda é pendurada entre dois pontos A e B (sujeita a ação da gravidade e tensão interna). A curva resultante é chamada catenária (no latim significa "corrente"). Por ex. fio entre dois postes, modelagem na arquitetura. Ver figuras de monumentos no final.

Usando a base e, definimos:

$$senh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$sech(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \; cosech(x) = \frac{2}{e^x - e^{-x}}, \; coth(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

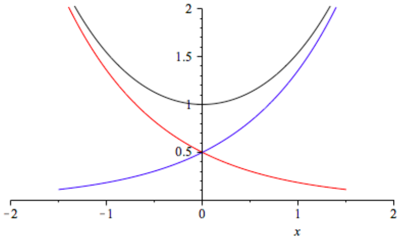


Figura: Some as alturas de 1/2 exp(x) em azul com 1/2 exp(-x) em vermelho para obter cosh(x) em preto.

Tabela: Algumas relações e semelhanças a menos de sinal

Hiperbólicas	Trigonométricas
$cosh^2(x) - senh^2(x) = 1$	$cos^2(x) + sen^2(x) = 1$
$1 - tanh^2(x) = \dfrac{1}{cosh^2(x)}$	$1 + tan^2(x) = \dfrac{1}{cos^2(x)}$
$coth^2(x) - 1 = \dfrac{1}{senh^2(x)}$	$cot^2(x) + 1 = \dfrac{1}{sen^2(x)}$

Exercício:

Mostre as igualdades hiperbólicas do lado esquerdo da tabela.

(1) Da tabela acima podemos concluir porque se usa nomes semelhantes.

(2) Por que hiperbólicas?

Exercício:

(a) Encontre domínio, imagem destas funções.

(b) Calcule cosh(0) e senh(0).

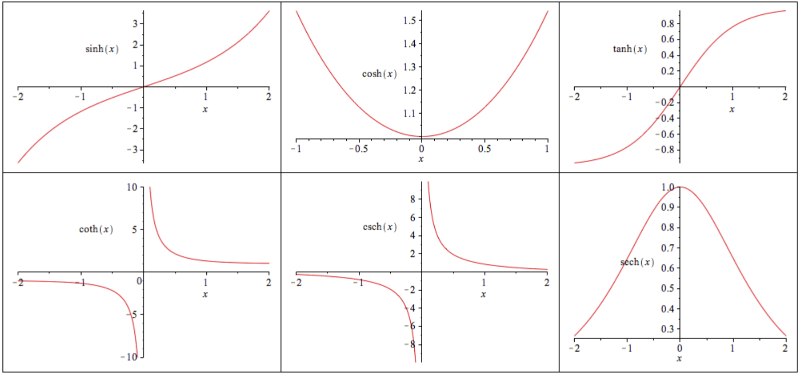
(c) Mostre que $tanh(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.

(d) Mostre que $cosh(x)$ é uma função par e que $senh(x)$ e $tanh(x)$ são ímpares.

(e) Encontre limites no infinito e assíntotas. Depois compare seus resultados com os gráficos abaixo.

(f) Funções inversas, faça os gráficos. Mostre que:
$arcosh(x) = ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, se $x \geq 1$.

Gráficos das funções hiperbólicas.



Outras funções inversas. Verifique alguma delas.

$$\mathrm{arsenh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}),\ x \in \mathbb{R}.$$

$$\mathrm{artanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),\ |x| < 1.$$

$$\mathrm{arcoth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right),\ |x| > 1.$$

Outras relações. Verifique algumas.

$$cosh(x) + senh(x) = e^x$$

$$cosh(x) - senh(x) = e^{-x}$$

$$senh(x+y) = senh\ x\ cosh\ y + cosh\ x\ senh\ y$$

$$cosh(x+y) = cosh\ x\ cosh\ y + senh\ x\ senh\ y$$

$$senh\ 2x = 2senh\ x\ cosh\ x$$

$$cosh\ 2x = cosh^2\ x + senh^2\ x$$

Exemplos de catenárias:

Ponte Juscelino Kubitschek (ponto turístico em Brasília) a qual foi utilizada a equação modelo:

$$-180cosh\left(\frac{x}{-180}\right)$$

Figura: Fonte $https : //pt.wikipedia.org/wiki/Ponte_Juscelino_Kubitschek$

- Gateway Arch localizado às margens do rio Missisipi, em St. Louis (EUA), tem a forma de uma catenária invertida, que é uma estrutura muito estável.

Figura: Fonte TripAdvisor

• Arcos na Basílica da Sagrada Família em Barcelona.

• Linhas de transmissão elétrica aéreas para ferrovias (bondes, metrôs de superfícies, etc.)

• Natureza: contorno de asas de borboletas, colmeias, teias de aranha, etc.