Física III 2022 (IQ) – Aula 4

Objetivos de aprendizagem

- Fazer uso de coordenadas cartesianas, polares, cilíndricas ou esféricas para descrever adequadamente diferentes distribuições de carga
- Integrar a carga contida em regiões do espaço com densidades de carga descritas por funções dependentes da posição em 1, 2, e 3 dimensões.

O "elemento de carga" dq

- 1D: densidade linear λ $\quad dq = \lambda\, ds$
- 2D: densidade superficial σ $\quad dq = \sigma\, da$
- 3D: densidade volumétrica ρ $\quad dq = \rho\, dV$

$$q = \int_{\text{região}} dq$$

(obs.: em geral são distribuições contínuas, mas pode-se generalizar para distribuições discretas com uso da função "delta de Dirac" – mas não vamos usar isso em Física 3)

Obs.: notação do “elemento de carga” (apostila)

- 1D: densidade linear λ
- 2D: densidade superficial σ
- 3D: densidade volumétrica ρ

$$\left.\begin{aligned} dq &= \lambda\, ds \\ d^2 q &= \sigma\, da \\ d^3 q &= \rho\, dV \end{aligned}\right\} \quad q = \int^{(1)} \dots \int^{(n)}_{\text{região}} d^n q$$

Abreviação: $q = \int_{\text{região}} dq$

Exemplo 1

- Barra (fina) de comprimento L com $\lambda(x) = \alpha(1 - 3x/L)$

$\alpha > 0$

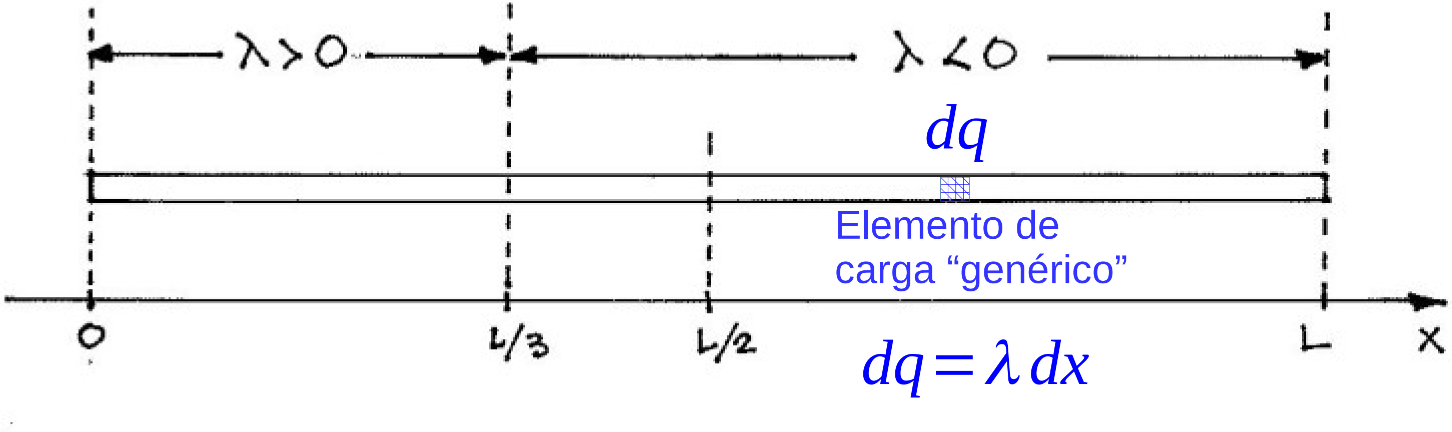


Figura 6.1:

Discutir forma da função/fazer gráfico (Desmos)
→ Qual é a carga total da barra?

Carga total

$$q=\int_{(L)} dq=\int_0^L \lambda(x)\,dx=\int_0^L \alpha(1-3x/L)\,dx$$

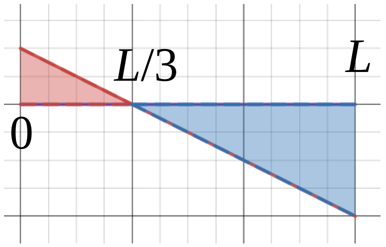
Integração em partes da região

- Lado esquerdo/Lado direito

  $(0 \rightarrow L/2; L/2 \rightarrow L)$

- Região de carga positiva/negativa

  $(0 \rightarrow L/3; L/3 \rightarrow L)$



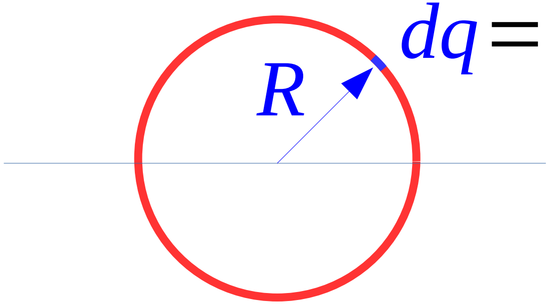
- ...

Outro exemplo linear

- Anel com densidade linear $\lambda(\theta)=\alpha\cos(\theta)$

$$ds=R\,d\theta$$

$$dq=\lambda\,ds=\lambda R d\theta$$



Qual é a carga total desse anel?

E da metade direita? $\left(\frac{-\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

...

Exemplo 2

- Placa retangular (ab) com $\sigma(x,y)=\alpha(1+x/a)$

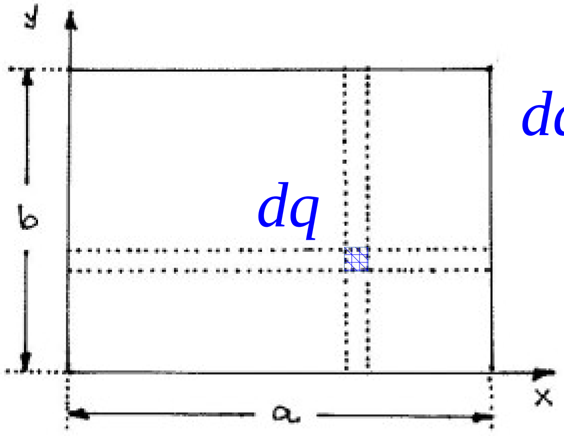


Figura 6.2:

$dq=\sigma dxdy$

$$q=\int_0^b dy\int_0^a dx\ \sigma$$

ou

$$q=\int_0^a dx\int_0^b dy\ \sigma$$

Ordem da integração

Exemplo 2 – placa triangular

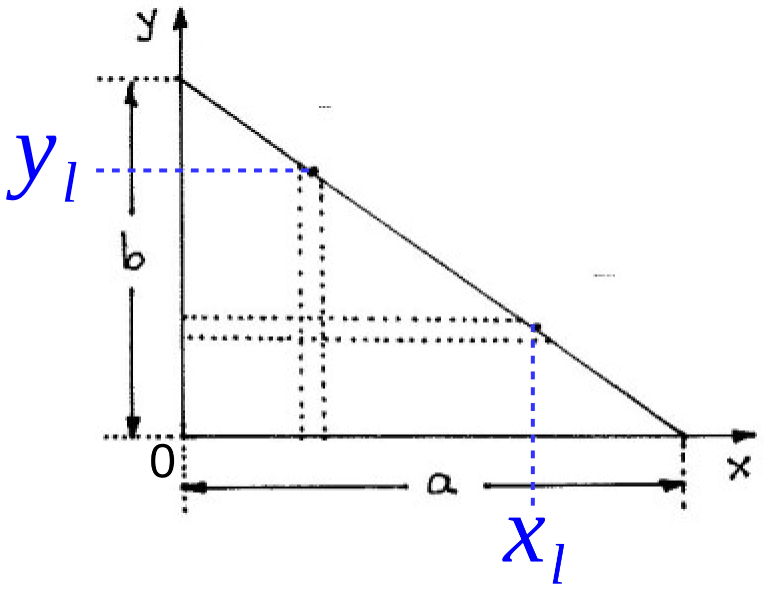


Figura 6.3:

- Neste caso o limite de integração depende da "outra" coordenada.

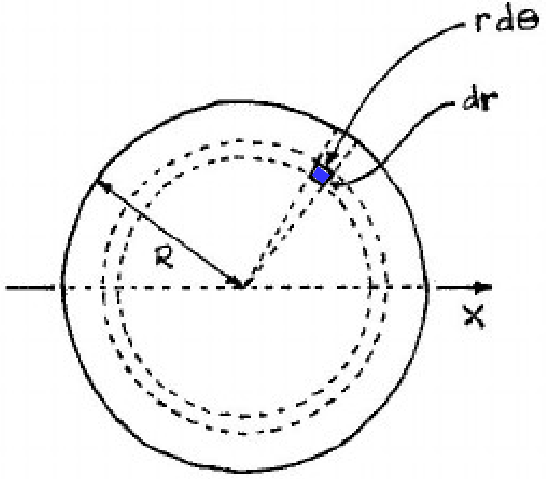
$$\int_0^{x_l} dx \quad \text{ou} \quad \int_0^{y_l} dy$$

$$x_l = a - \frac{a}{b} y \qquad y_l = b - \frac{b}{a} x$$

(obs.: calcular carga total e depois voltar no slide 3)

Exemplo 3

- Disco de raio R com densidade superficial $\sigma = \alpha(1 - 2r/R)$



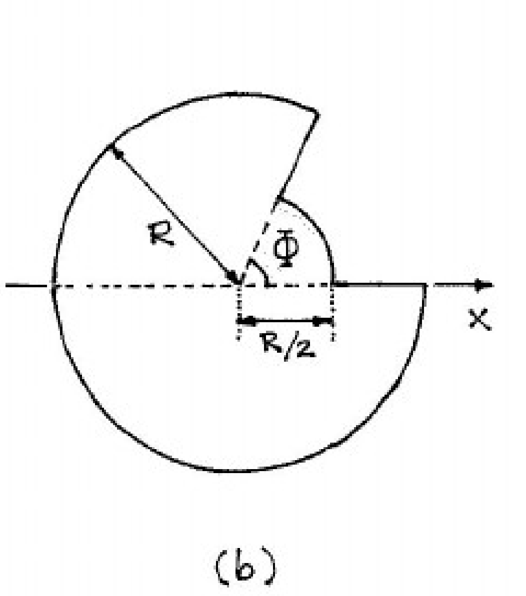
(a)

$$dq = \sigma da = \sigma r dr\, d\theta$$

$$q = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\theta\, \alpha\, r\, (1 - 2r/R)$$

Exemplo 4

- Mesmo disco, faltando um “pedaço”, com $\sigma = \alpha(1 - 2r/R)$



$$(dq = \sigma da = \sigma r dr\, d\theta)$$

- Qual é o ângulo do pedaço faltante tal que a carga total é nula?

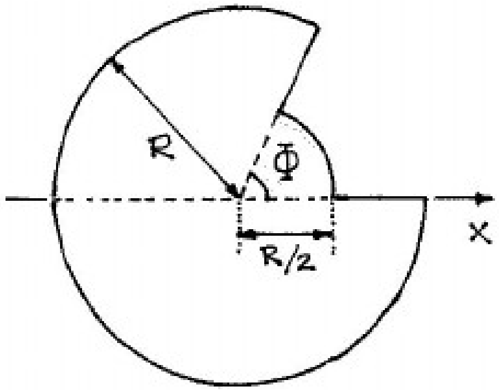
$q(\Phi) = ?$

Como integrar?

Exemplo 4

- Mesmo disco, faltando um “pedaço”, com $\sigma = \alpha(1 - 2r/R)$

$$(dq = \sigma\, da = \sigma r dr\, d\theta)$$



- Qual é o ângulo do pedaço faltante tal que a carga total é nula?

$$q = \int_0^{R/2} dr \int_0^{\phi} d\theta\, \alpha\, r\,(1 - 2r/R) + \int_0^{R} dr \int_{\phi}^{2\pi} d\theta\, \alpha\, r\,(1 - 2r/R)$$

Distribuição de carga do átomo de H

- Quântica: $\rho \propto |\psi|^2$

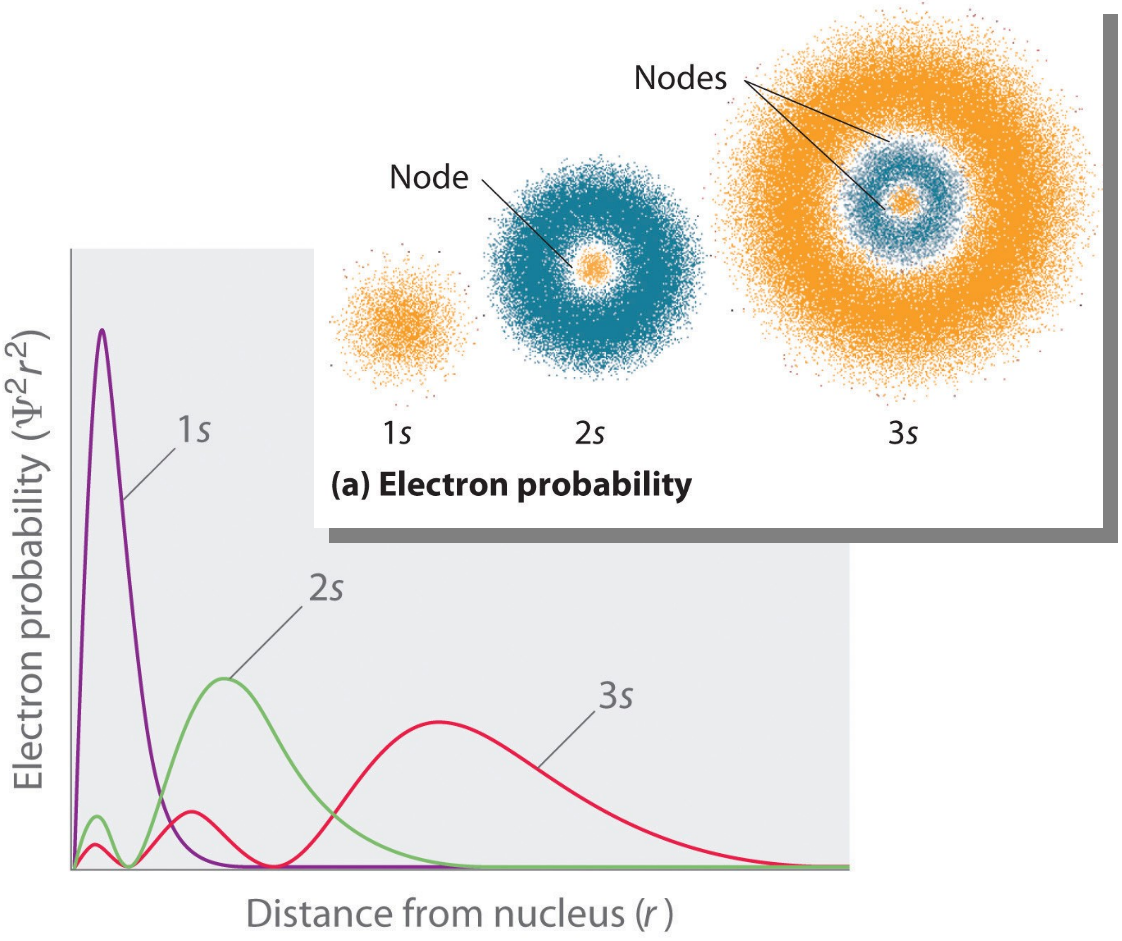
$$\rho^-(r) = -\rho_0^- \, e^{-(2r/a_0)}$$ (1s)

Desmos. $$\rho_0^- = \frac{e}{\pi \alpha_0^3}$$

- Raio de Bohr:

$$a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0 h^2}{m_e e^2}$$

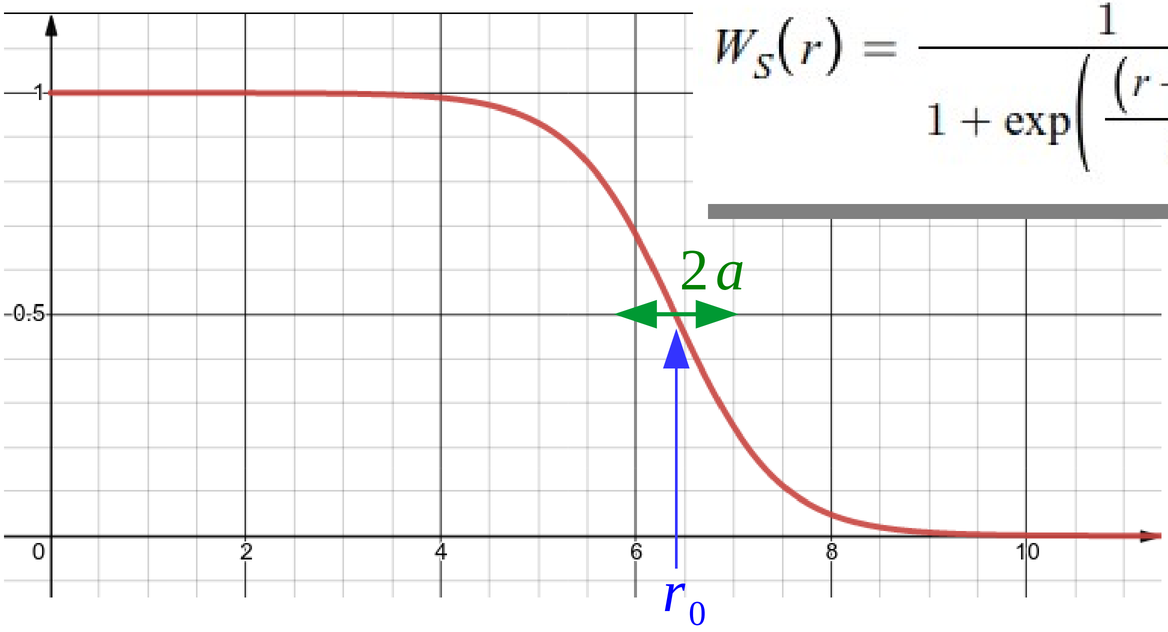
$$= \ 0{,}529 \times 10^{-10} \ m$$



Núcleo de ^{197}Au (Z=79)

- Função de Woods-Saxon:

$$W_S(r) = \frac{1}{1+\exp\left(\frac{(r-r_0)}{a}\right)} \quad \{r>0\}$$



Densidade de carga

$\rho = \rho_0 W_S(r)$

Desmos