

## Métodos de Aproximação em Física

Na Física em muitas ocasiões é mais útil uma resposta aproximada do que a solução exata de um problema. Muitas vezes queremos entender o comportamento físico de problemas cuja a solução exata é complicada e obscura. Nesses casos aproximações são tipicamente mais simples e ajudam no entendimento do problema. Em outras ocasiões, em particular em cálculos computacionais numéricos, é muito útil conhecer comportamentos assintóticos não só para entender o que ocorre nesses limites, como também para checar os resultados numéricos. Finalmente, em muitos casos os resultados aproximados, dadas as incertezas experimentais, são largamente suficientes para fazer previsões teóricas que podem ser confrontadas com experimentos.

Vamos dar um exemplo simples para ilustrar esse último caso. Imagine um corpo em queda livre sob ação da força da gravidade (assumindo aceleração constante  $g$ , o que é uma boa aproximação se a distância percorrida é relativamente pequena!), começando do repouso. A distância  $y$  que é percorrida no tempo  $t$  será

$$y = \frac{1}{2} g t^2,$$

logo

$$t = \sqrt{\frac{2y}{g}}.$$

O intervalo de tempo  $\Delta t = t_f - t_i$  que o corpo leva para percorrer uma distância  $d$  de  $y_i = L$  até  $y_f = d + L$  é

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2}{g}} (\sqrt{y_f} - \sqrt{y_i}) = \sqrt{\frac{2}{g}} (\sqrt{L+d} - \sqrt{L}).$$

Se medirmos  $L$ ,  $d$  e  $\Delta t$  experimentalmente, podemos determinar  $g$  pois

$$g = 2 \left( \frac{\sqrt{L+d} - \sqrt{L}}{\Delta t} \right)^2$$

o que é uma expressão exata sob as condições que consideramos.

Consideremos agora a diferença  $\sqrt{L+d} - \sqrt{L}$ . Na pratica  $L$  é tipicamente muito maior que  $d$ , tomemos como exemplo  $L = 100$  cm e  $d = 1$  cm. Nossa

fórmula depende da diferença entre dois números próximos. Há uma forma simples de avaliar essa diferença até qualquer precisão necessária. Antes de discutir como fazer isso formalmente, note que  $\sqrt{1+x}$  pode ser escrito como uma série infinita

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \dots$$

para  $-1 < x < 1$ . Mais ainda se truncarmos a série em um ponto qualquer o erro que cometeremos será da ordem do termo seguinte da série. Ex.  $x = 0.5$ ,  $\sqrt{1+0.5} \approx 1.2247$ , até o termo linear (quadrático) a série nos dá como resposta 1.25 (1.2188) e o termo seguinte da série é  $-0.031$  (0.0078). Podemos usar isso para escrever

$$\sqrt{L+d} - \sqrt{L} = \sqrt{L} \left( \sqrt{1 + \frac{d}{L}} - 1 \right).$$

A quantidade adimensional  $d/L$  faz o papel de  $x$  na nossa expansão de forma que

$$\begin{aligned} \sqrt{L} \left( \sqrt{1 + \frac{d}{L}} - 1 \right) &= \sqrt{L} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{d}{L} \right) - \frac{1}{8} \left( \frac{d}{L} \right)^2 + \frac{1}{16} \left( \frac{d}{L} \right)^3 + \dots - 1 \right] \\ &= \sqrt{L} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d}{L} \right) - \frac{1}{8} \left( \frac{d}{L} \right)^2 + \frac{1}{16} \left( \frac{d}{L} \right)^3 + \dots \right], \end{aligned}$$

logo se  $d/L \ll 1$  os termos sucessivos da série decrescem rapidamente e o primeiro termo  $\frac{1}{2} \frac{d}{L}$ , que depende linearmente dessa razão, será o termo dominante e fornecerá uma aproximação útil. No exemplo em questão  $d/L = 0.01$ , se considerarmos apenas o primeiro termo  $\sqrt{L+d} - \sqrt{L} \approx 5 \times 10^{-3}$ , como o segundo termo,  $\frac{1}{8} \left( \frac{d}{L} \right)^2 = 1.25 \times 10^{-5}$ , estaremos cometendo um erro de apenas 1 parte em  $10^5$ . Em muitos casos essa precisão é mais do que suficiente. Intervalos de tempo  $\Delta t$  em experimentos de corpos em queda livre são normalmente medidos com uma precisão da ordem de 1 parte em  $10^3$ , logo não ganhamos nada se determinarmos  $\sqrt{L+d} - \sqrt{L}$  com maior precisão! Por outro lado, se melhorarmos a medida de tempo, podemos saber quantos termos da série precisamos calcular para obter o resultado na precisão adequada. Físicos no seu cotidiano fazem aproximações matemática justificadas livremente e não tem temor de descartar termos desprezíveis. A capacidade de

fazer as aproximações adequadas pode ser a diferença entre ficar perdido no meio de uma álgebra impenetrável e muitas vezes não conseguir chegar a lugar algum e resolver um problema físico! Além disso aproximações em séries, como a que vimos aqui, são muitas vezes úteis para extrair o comportamento físico principal de um sistema.

## 1 Série Binomial

A série que vimos acima é um exemplo da chamada série binomial

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}x^k + \dots \quad (1)$$

que é válida para  $-1 < x < 1$ , para qualquer valor de  $n$ . Evidentemente se  $n$  for inteiro a série é finita e termina com o termo em  $x^n$ . Veja que essa série é exata, a aproximação ocorre quando truncamos a série em algum ponto. No caso, por exemplo, em que queiramos considerar uma precisão até a  $\mathcal{O}(x^2)$  (ordem  $x^2$ ) escrevemos

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \mathcal{O}(x^3),$$

onde o termo  $\mathcal{O}(x^3)$  indica que termos da ordem  $x^3$  e superiores não estão sendo considerados. Note que essa série também pode ser aplicada se  $|x| > 1$ , usando

$$\begin{aligned} (1+x)^n &= x^n \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n \\ &= x^n \left[1 + n \left(\frac{1}{x}\right) + \frac{n(n-1)}{2!} \left(\frac{1}{x}\right)^2 + \dots\right]. \end{aligned} \quad (2)$$

### Exemplos:

1.  $(1001)^{\frac{1}{3}} = (1000 + 1)^{\frac{1}{3}} = 1000^{\frac{1}{3}}(1 + 0.001)^{\frac{1}{3}} = 10[1 + (\frac{1}{3})0.001 + \dots] \approx 10(1.0003) = 10.003$
2.  $2 - \frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}}$  para  $|x| \ll 1$

$$2 - \frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 2 - \left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots\right) - \left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots\right) = -\frac{3}{4}x^2$$

Note que nesse caso os termos lineares cancelaram de forma que precisamos ir para ordem mais alta para obter um resultado não nulo, no caso até a ordem  $x^2$ . Para obter o resultado correto é fundamental expandir todos os termos até a mesma ordem.

## 2 Série de Taylor

Podemos representar uma função arbitraria  $f(x)$  por uma série de potências de  $x$ :

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \quad (3)$$

Vemos claramente que  $a_0 = f(0)$ . Admitindo que  $f(x)$  é diferenciável em qualquer ordem então

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = a_1 + 2a_2x + \dots$$

vemos que  $a_1 = f'(x)|_{x=0} = f'(0)$ . Continuando o processo, encontramos facilmente que

$$a_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k f(x)}{dx^k} \Big|_{x=0} = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) \Big|_{x=0} = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0), \quad (4)$$

onde  $f^{(k)}(x)$  é a  $k$ -ésima derivada de  $f(x)$ .

A série de potências para  $f(x)$ , conhecida pelo nome de **série de Taylor**<sup>1</sup>, pode então ser expressa formalmente como

$$\boxed{f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + \dots} \quad (5)$$

Essa série, se convergente, permite encontrar boas aproximações para  $f(x)$  quando  $x$  for pequeno (isto é, próximo de zero). O intervalo de convergência dessa série depende da função  $f(x)$ , como vocês verão nos cursos de Cálculo.

<sup>1</sup>De fato essa é a **série de Taylor** da função  $f(x)$  entorno do ponto  $x = 0$ , podemos generalizar essa expansão para as vizinhanças de  $x = a$  simplesmente fazendo a substituição  $0 \rightarrow a$  e  $x \rightarrow x - a$  no lado direito da Eq. (5).

Para  $e^x$ , por exemplo, a série é convergente no intervalo  $-\infty < x < \infty$ .

**Exemplos:**

1.

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$

2.

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots$$

3.

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \dots$$

As expansões acima convergem para todos os valores de  $x$  mas são particularmente úteis perto de  $x \rightarrow 0$ .

### 3 Diferenciais

Considere  $f(x)$ , a função da variável independente  $x$ . Frequentemente precisamos fazer uma aproximação simples para estimar a mudança em  $f(x)$  causada por uma mudança  $x \rightarrow x + \Delta x$ .

Vamos definir  $\Delta f \equiv f(x + \Delta x) - f(x)$ , a mudança em  $f(x)$  que queremos estimar. Expandindo em série de Taylor  $f(x)$  em torno de  $x$

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{1}{2!}f''(x)\Delta x^2 + \dots,$$

onde, por exemplo,  $f'(x) = df/dx$  é a derivada de  $f(x)$  calculada no ponto  $x$ , etc. Ignorando termos da ordem  $(\Delta x)^2$  e superiores, ficamos com a aproximação linear

$$\Delta f \equiv f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x.$$

Essa aproximação fica mais precisa a medida que  $\Delta x \rightarrow 0$ , pois os termos da série que desprezamos, nesse caso, ficam cada vez menores. No entanto, **para valores finitos de  $\Delta x$  a expressão**

$$\Delta f \approx f'(x)\Delta x, \tag{6}$$

**tem que ser considerada com uma aproximação.**

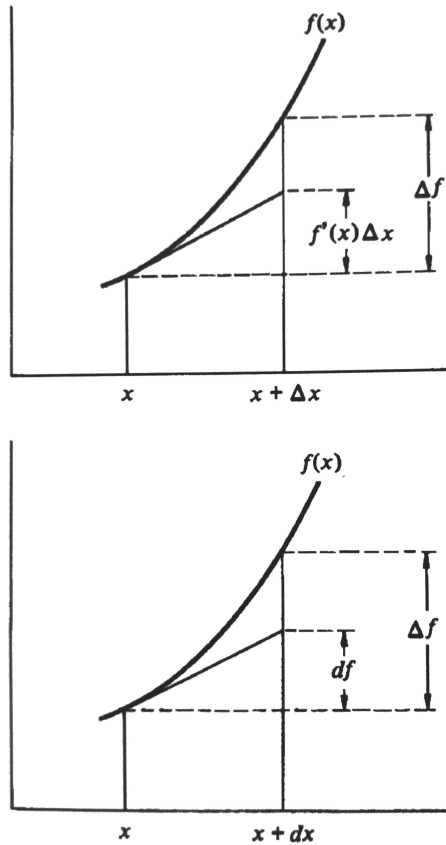


Figura 1: Diferença entre  $\Delta f$  e a diferencial  $df$ .

Na Fig. 1 comparamos  $\Delta f \equiv f(x + \Delta x) - f(x)$  com a extrapolação linear  $f'(x)\Delta x$ . Vemos claramente que  $\Delta f$ , a mudança na função  $f(x)$  com  $x \rightarrow x + \Delta x$  que procuramos, é em geral diferente de  $f'(x)\Delta x$ . Usamos o símbolo  $dx \equiv \Delta x$ , que chamamos de **diferencial de  $x$** , para denotar o incremento em  $x$ . Assim  $dx$  pode ser o que quisermos (grande, pequeno, positivo, negativo). Definimos  $df$ , **a diferencial de  $f$** , por

$$df \equiv f'(x) dx. \quad (7)$$

Essa notação está ilustrada na parte inferior da Fig. 1. Note que embora  $\Delta x$  e  $dx$  seja a mesma coisa,  $\Delta f$  e  $df$  não são quantidades diferentes! No entanto quando a aproximação linear for justificável em um problema, podemos

usar  $df$  para representar nossa estimativa de  $\Delta f$ . Podemos sempre fazer isso quando eventualmente tomarmos o limite  $dx \rightarrow 0$ . Vejamos alguns exemplos.

**Exemplos:**

1.  $d(\cos \theta) = -\sin \theta d\theta$
2.  $d(x e^{x^2}) = (e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2}) dx$
3. seja  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$  o volume de uma esfera de raio  $r$ . Podemos calcular a mudança de volume que ocorre se mudarmos  $r \rightarrow r + \Delta r$ :

$$\Delta V = V(r+\Delta r) - V(r) = \frac{4}{3}\pi(r+\Delta r)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(3r^2\Delta r + 3r\Delta r^2 + \Delta r^3),$$

cuja aproximação linear na variação  $\Delta r$  é

$$\Delta V \approx 4\pi r^2 \Delta r.$$

Em termos de mudança percentual de volume

$$\frac{\Delta V}{V} = 3 \left( \frac{\Delta r}{r} \right) + 3 \left( \frac{\Delta r}{r} \right)^2 + \left( \frac{\Delta r}{r} \right)^3,$$

se  $r = 1 \text{ km} = 10^3 \text{ m}$  e  $\Delta r$  for 100 m, o fator linear fornece uma variação de 3 partes em 10, o quadrático 3 partes em 100 e finalmente o cúbico 1 parte em 10000 ! Nesse caso é evidente que o primeiro termo só não será suficiente se precisamos determinar essa variação com uma precisão melhor que  $\sim 4\%$ . Para  $\Delta r$  ainda menores a aproximação linear é largamente suficiente. Por outro lado  $dV = 4\pi r^2 dr$ , o que mostra que  $dV$  seria uma ótima aproximação para  $\Delta V$  nesse caso.

Uma aplicação comum de diferenciais é a chamada mudança de variável na integração. Por exemplo, considere a integral

$$\int_a^b x e^{x^2} dx.$$

Uma substituição muito útil é  $y = x^2$ . Nesse caso

$$x = \sqrt{y} \rightarrow dx = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{y}} dy,$$

$$\int_a^b x e^{x^2} dx = \int_{a^2}^{b^2} \sqrt{y} e^y \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{y}} dy = \int_{a^2}^{b^2} e^y \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2}(e^{b^2} - e^{a^2}).$$