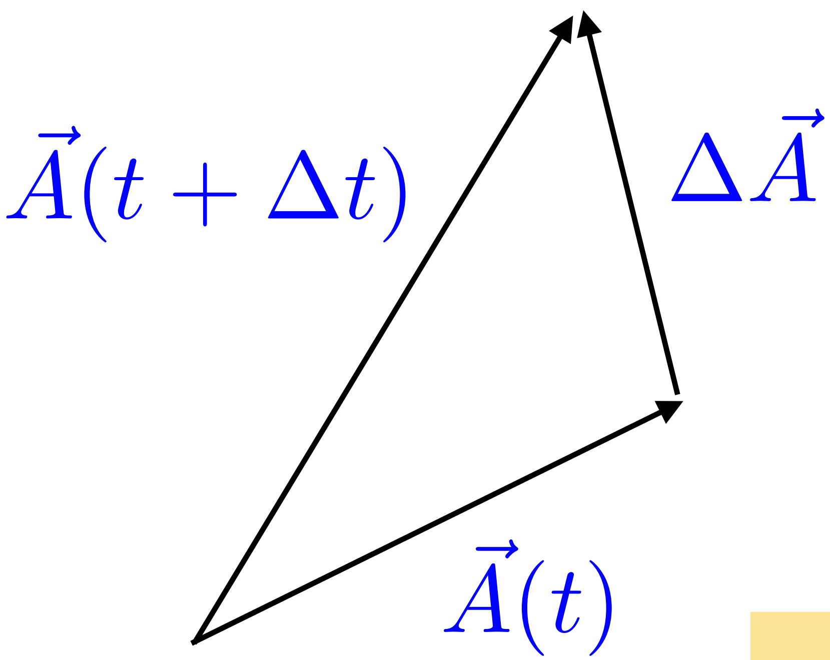
Matemática –
a Linguagem da Física IV

Física I – Módulo I – Noções Básicas

Considere um vetor $\vec{A}(t)$ que muda com o tempo

A mudança em $\vec{A}(t)$ no intervalo t e t+Δt é



$$\Delta\vec{A}(t) = \vec{A}(t+\Delta t) - \vec{A}(t)$$

Em completa analogia com o que fizemos para $\vec{r}$ definimos a derivada de $\vec{A}$ por

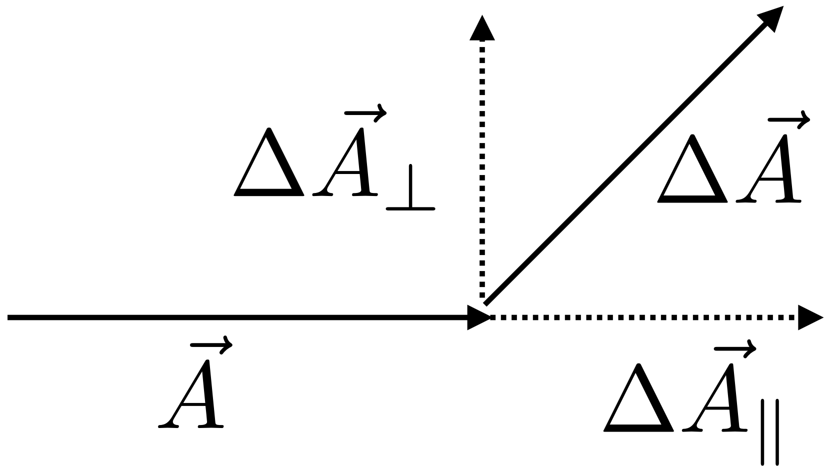
$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\vec{A}(t+\Delta t) - \vec{A}(t)}{\Delta t}$$

novo vetor:

pequeno, grande e apontar em qualquer direção !

Taxa de Variação de um Vetor

$\vec{A}$ **pode mudar de magnitude & direção**

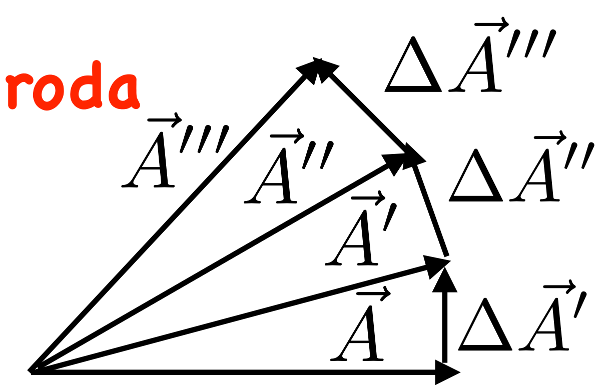


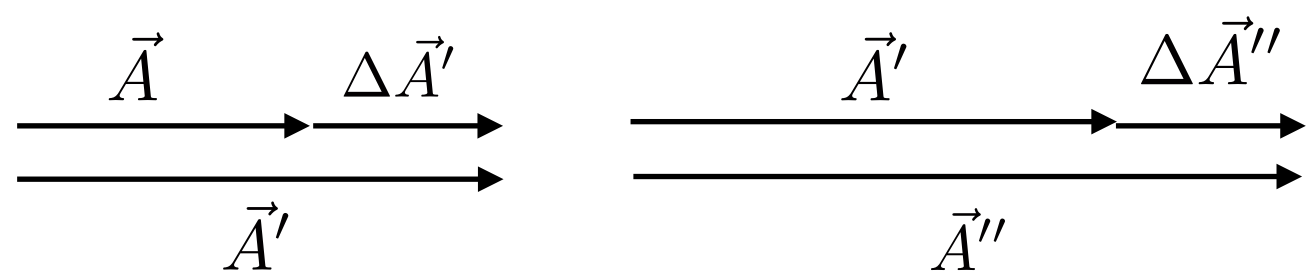
$$\Delta\vec{A} = \Delta\vec{A}_\perp + \Delta\vec{A}_\parallel$$

$\Delta\vec{A}_\parallel$ **só muda a magnitude de** $\vec{A}$ **(não muda sua direção)**

$\Delta\vec{A}_\perp$ **muda a direção de** $\vec{A}$ **(não muda a magnitude)**

$\vec{A}$ **roda**





$\vec{A}$ **aumenta de tamanho**

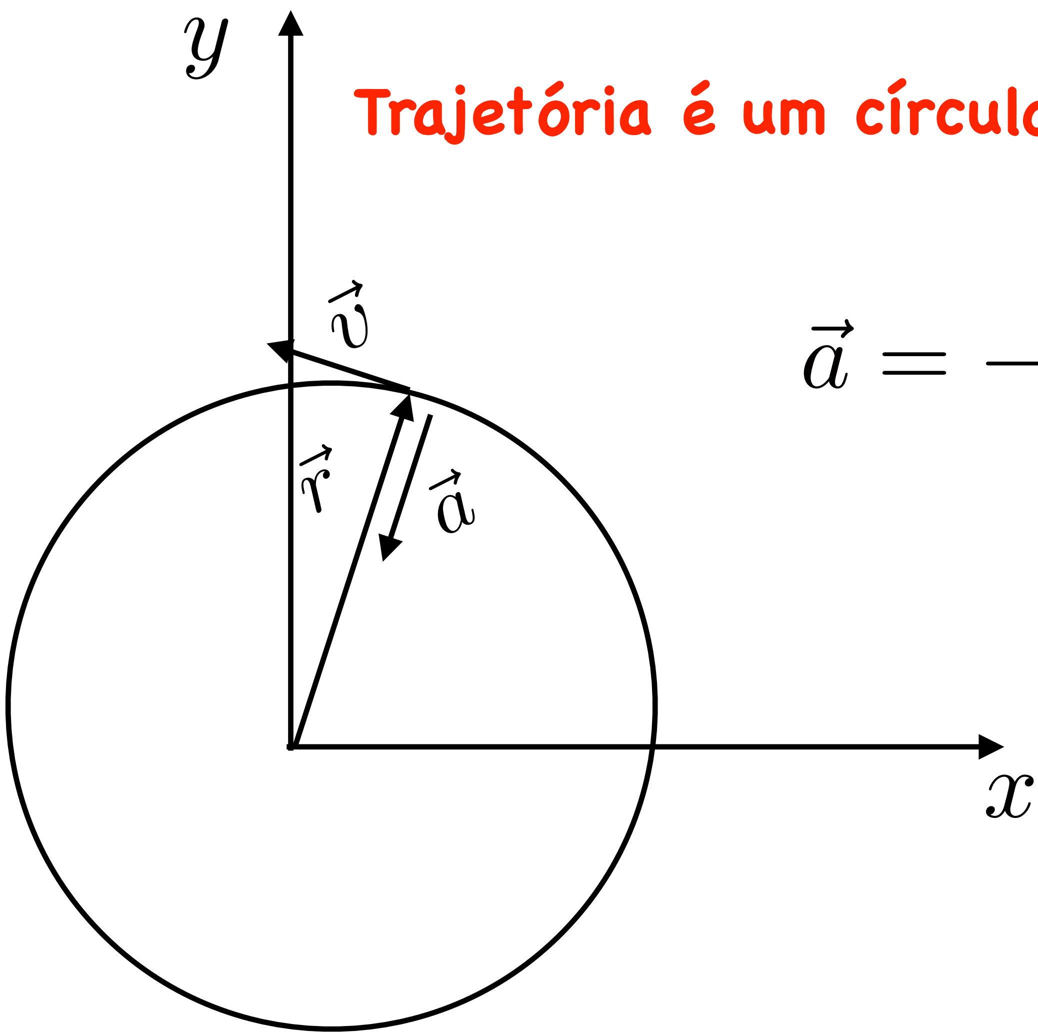
Vimos

Movimento Circular (aula 4)

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = 0 = \vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \rightarrow \vec{r} \perp \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \rightarrow$$

magnitude de $\vec{r}$ é constante

a única mudança possível em $\vec{r}$ é devido à rotação



Trajetória é um círculo de raio constante ($\vec{r}$ roda em torno da origem)

$$\vec{a} = -\omega^2 \vec{r} \qquad \textbf{como} \qquad \vec{r} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\rightarrow \vec{a} \cdot \vec{v} = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}$$

$$= -\omega^2 \vec{r} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} \perp \vec{v}$$

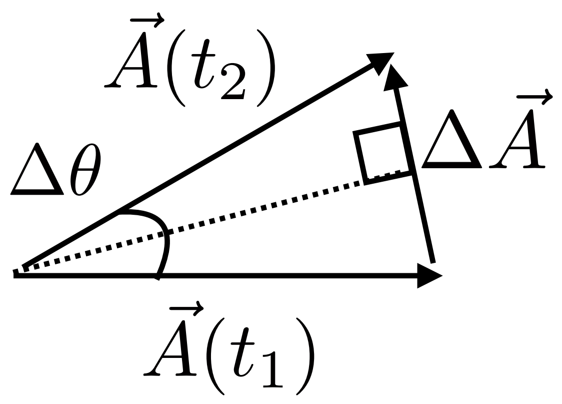
magnitude de $\vec{v}$ constante

ele só pode rodar também

Taxa de Variação de um Vetor

Suponha que $\dfrac{d\vec{A}}{dt} \perp \vec{A}$

Qual a magnitude de $\dfrac{d\vec{A}}{dt}$ **?**



Série de Taylor

$$f(x-x_0) = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{dx}(x-x_0) + \frac{1}{2!}\frac{d^2f(x_0)}{dx^2}(x-x_0)^2 + \ldots$$

$$\sin(\frac{\Delta\theta}{2} - 0) \approx \sin 0 + \cos 0\,(\frac{\Delta\theta}{2} - 0) + \ldots \approx \frac{\Delta\theta}{2} \qquad \Delta\theta \ll 1$$

$$\Longrightarrow |\Delta\vec{A}| \approx 2\,A\frac{\Delta\theta}{2} = A\,\Delta\theta$$

$$|\Delta\vec{A}| \approx 2\,A\,\frac{\Delta\theta}{2} = A\,\Delta\theta$$

é a velocidade angular de $\vec{A}$

no limite

$\Delta t \to 0$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\vec{A}}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t\to 0} A\,\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = A\,\frac{d\theta}{dt}$$

$$= \left|\frac{d\vec{A}}{dt}\right|$$

assim como $\theta = \omega\, t$ **no movimento circular uniforme**

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = r\,\frac{d(\omega t)}{dt} = r\,\omega = v$$

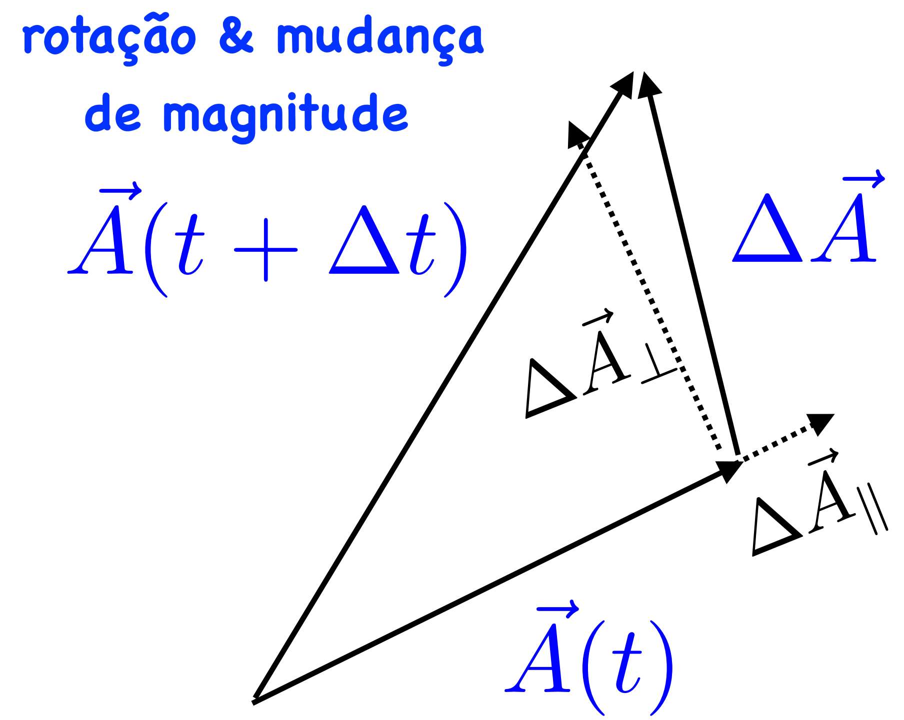
como esperado !

Recapitulando ...

$$\Delta\vec{A} = \Delta\vec{A}_\perp + \Delta\vec{A}_\parallel$$

causa mudança de direção

causa mudança de magnitude



para $\Delta\theta$ suficientemente pequeno

$$|\Delta\vec{A}_\perp| = A\,\Delta\theta \qquad |\Delta\vec{A}_\parallel| = \Delta A$$

dividindo por Δt e tomando o limite de $\Delta t \to 0$

$$\left|\frac{d\vec{A}_\perp}{dt}\right| = A\frac{d\theta}{dt} \qquad \left|\frac{d\vec{A}_\parallel}{dt}\right| = \frac{dA}{dt}$$

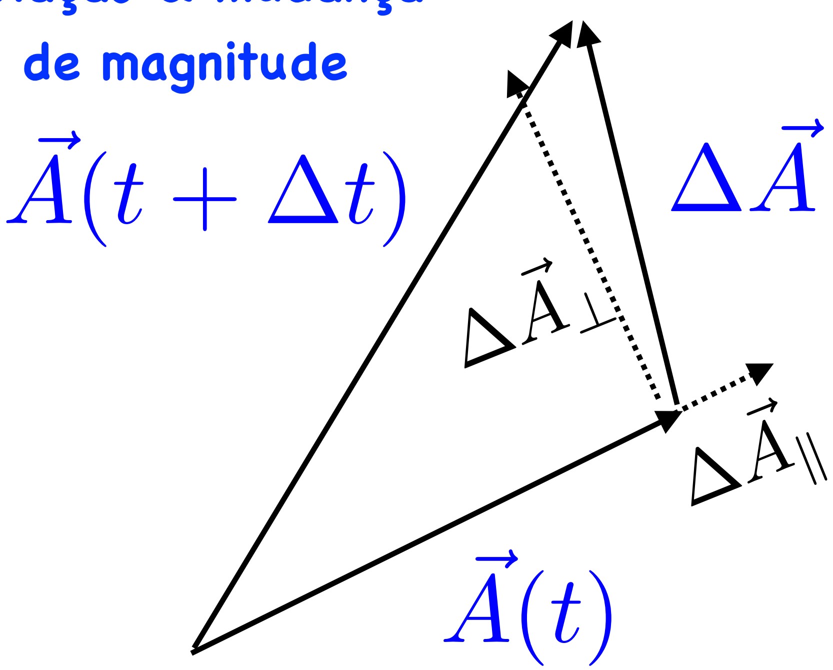
Recapitulando ...

$$\Delta\vec{A} = \Delta\vec{A}_\perp + \Delta\vec{A}_\parallel$$

causa mudança de direção

causa mudança de magnitude

rotação & mudança de magnitude



$$\left|\frac{d\vec{A}_\perp}{dt}\right| = A\frac{d\theta}{dt}$$

$\dfrac{d\vec{A}_\perp}{dt} = 0$ **se** $\vec{A}$ **não rodar i.e.** $\dfrac{d\theta}{dt} = 0$

$$\left|\frac{d\vec{A}_\parallel}{dt}\right| = \frac{dA}{dt}$$

$\dfrac{d\vec{A}_\parallel}{dt} = 0$ **se** $\vec{A}$ **não mudar de magnitude**

Propriedades (Mostre!)

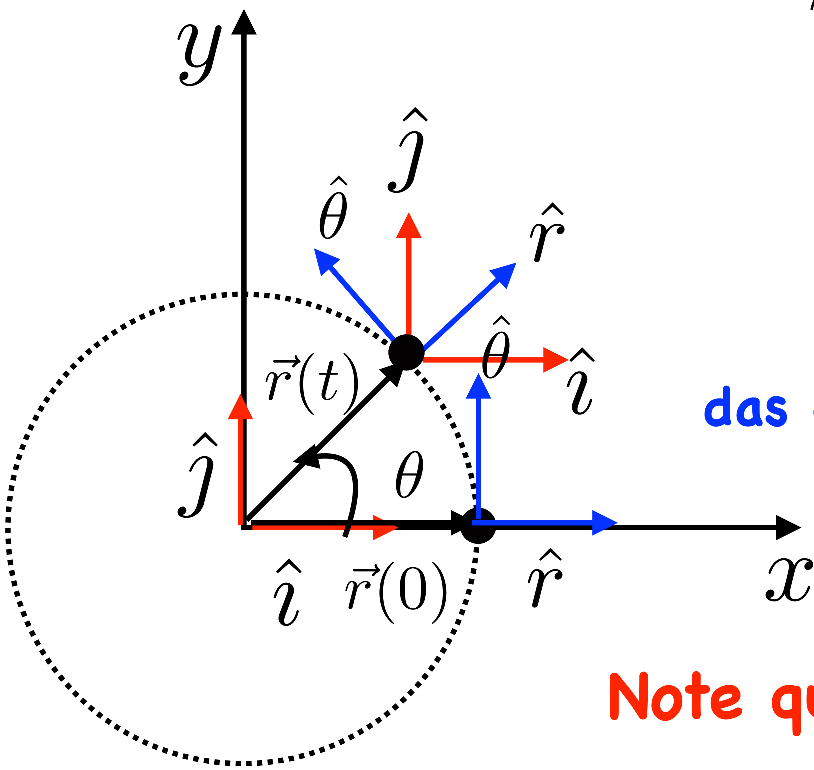
$$\frac{d}{dt}(\alpha\vec{A}) = \frac{d\alpha}{dt}\,\vec{A} + \alpha\,\frac{d\vec{A}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{A}) = \frac{dA^2}{dt} = 2\vec{A}\cdot\frac{d\vec{A}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B} + \vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt}$$

Movimento Circular em Coordenadas Polares



$$\vec{r} \cdot \vec{r} = r^2 = x^2(t) + y^2(t) \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

versores
das coordenadas polares

$$\hat{r} \cdot \hat{r} = \hat{\theta} \cdot \hat{\theta} = 1$$

$$\hat{r} \cdot \hat{\theta} = 0$$

qualquer que seja t

Note que a direção desses versões varia com t !

Podemos expressá-los em termos dos versões cartesianos (constantes no tempo)

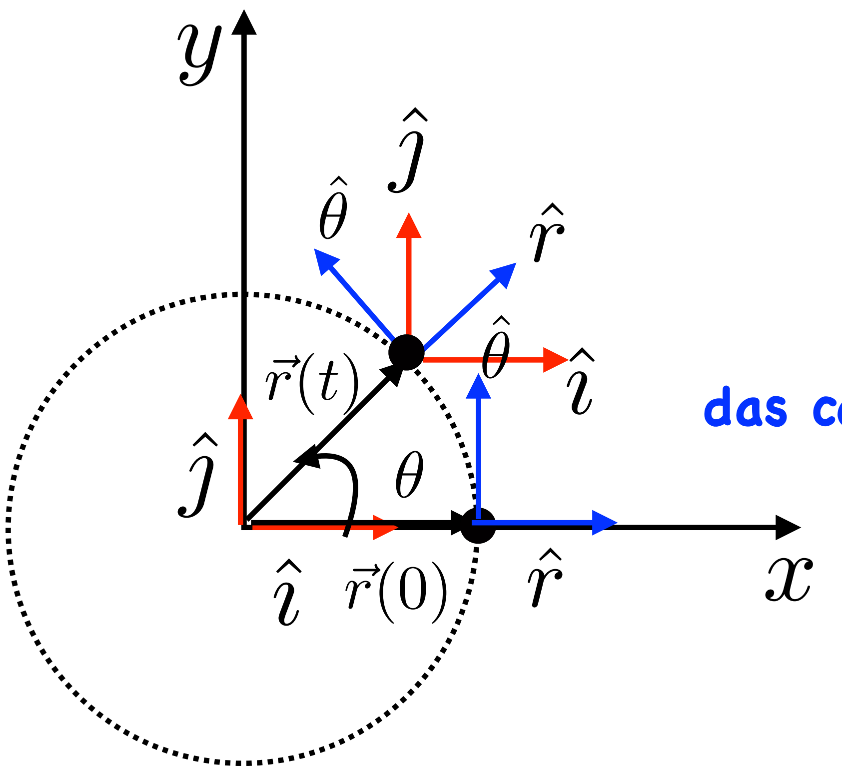
$$\hat{r} = \cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath} \quad = \hat{r}(\theta(t))$$

$$\theta = \omega\, t$$

se uniforme

$$\hat{\theta} = -\sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath} \quad = \hat{\theta}(\theta(t))$$

Movimento Circular em Coordenadas Polares



versores
das coordenadas polares

$$\hat{r} = \cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath}$$

$$\hat{\theta} = -\sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath}$$

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{\imath} + y(t)\,\hat{\jmath}$$

em coordenadas polares

$$= r\cos\theta(t)\,\hat{\imath} + r\sin\theta(t)\,\hat{\jmath} \quad = r\,\hat{r}$$

$$= \boxed{r(t)\,\hat{r}(\theta(t))}$$

r e $\hat{r}$ podem variar com o tempo (muda de módulo e de direção!)

Velocidade em Coordenadas Polares

cartesianas

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(x(t)\,\hat{\imath} + y(t)\,\hat{\jmath}) \;\; = \dot{x}(t)\,\hat{\imath} + \dot{y}(t)\,\hat{\jmath}$$

$$\dot{x}(t) \equiv \frac{dx(t)}{dt}$$

$$\dot{y}(t) \equiv \frac{dy(t)}{dt}$$

polares

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(r\,\hat{r}) \;\; = \dot{r}\,\hat{r} + r\,\dot{\hat{r}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{r} &= \cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath} \\ \hat{\theta} &= -\sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath} \end{aligned}}$$

$$\dot{\hat{r}} = \frac{d\cos\theta}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dt}\,\hat{\imath} + \frac{d\sin\theta}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dt}\,\hat{\jmath} \;\; = -\sin\theta\,\dot{\theta}\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\dot{\theta}\,\hat{\jmath}$$

$$= \dot{\theta}\,\hat{\theta}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta}$$

Velocidade em Coordenadas Polares

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(r\,\hat{r}) \;= \dot{r}\,\hat{r} + r\,\dot{\hat{r}}$$

$$\hat{r} = \cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath}$$
$$\hat{\theta} = -\sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta}$$

$$\dot{\hat{r}} \;= \dot{\theta}\,\hat{\theta} \qquad \dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta}\hat{r}$$

$$\dot{\hat{\theta}} = -\frac{d\sin\theta}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dt}\,\hat{\imath} + \frac{d\cos\theta}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dt}\,\hat{\jmath} \;= -\cos\theta\,\dot{\theta}\,\hat{\imath} - \sin\theta\,\dot{\theta}\,\hat{\jmath}$$
$$= -\dot{\theta}\hat{r}$$

Velocidade em Coordenadas Polares

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(r\,\hat{r}) \;= \dot{r}\,\hat{r} + r\,\dot{\hat{r}}$$

$$\hat{r} = \cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath}$$
$$\hat{\theta} = -\sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta}$$

$$\dot{\hat{r}} = \dot{\theta}\,\hat{\theta} \qquad \dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta}\hat{r}$$

1) se

$\theta = \text{const.} \Longrightarrow \dot{\theta} = 0 \quad \Longrightarrow$ **velocidade é radial** $\quad \vec{v} = \dot{r}\hat{r}$

o movimento é unidimensional em uma direção radial fixa

2) se

$r = \text{const.} \Longrightarrow \dot{r} = 0 \quad \Longrightarrow$ **velocidade é tangencial** $\quad \vec{v} = r\dot{\theta}\,\hat{\theta}$

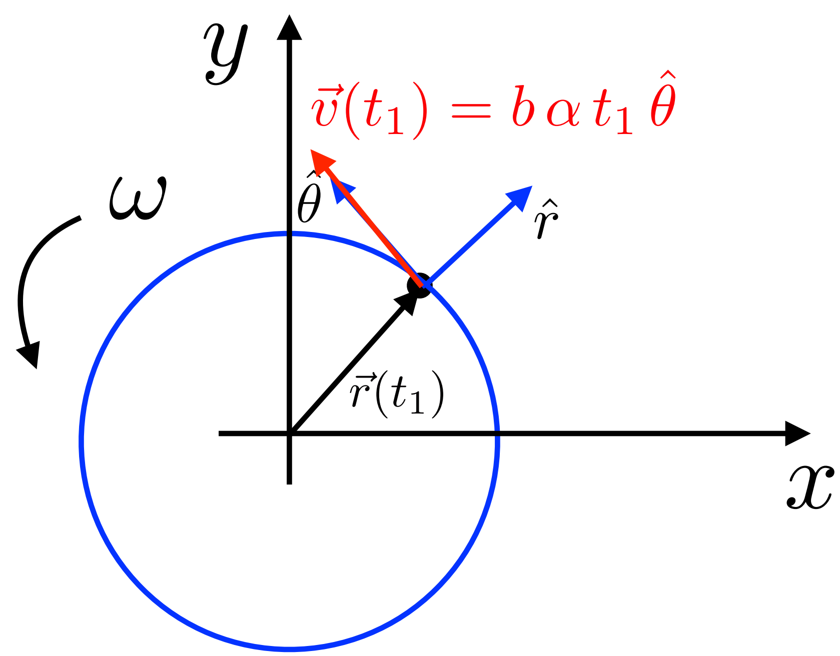
como r é fixo o movimento fica vinculado ao círculo de raio r

para um movimento geral ambos podem mudar com t !

Exemplo **Uma partícula move-se em um círculo de raio b com velocidade angular** $\dot{\theta} = \alpha\, t$, $\alpha = \text{const.}$ **, b = const. Nesse caso temos**

$$\vec{r}(t) = b\,\hat{r}(\theta(t)) \quad \Longrightarrow \quad \vec{v}(t) = b\,\dot{\theta}\,\hat{\theta} = b\,\alpha\,t\,\hat{\theta}$$

apenas velocidade tangencial



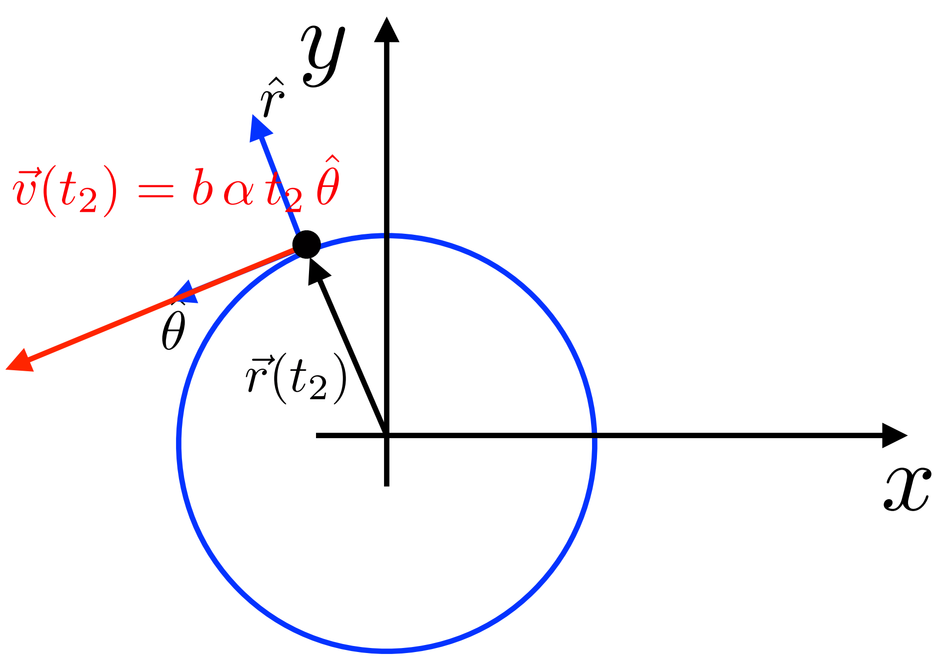
$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt} = \alpha\, t$$

$$\theta(t) = \theta(t_0) + \int_{t_0}^{t} dt'\,\dot{\theta}(t')$$

$$= \int_{t_0}^{t} dt'\,\alpha\,t'$$

$$= \theta_0 + \alpha\left(\frac{t^2 - t_0^2}{2}\right)$$

ângulo inicial



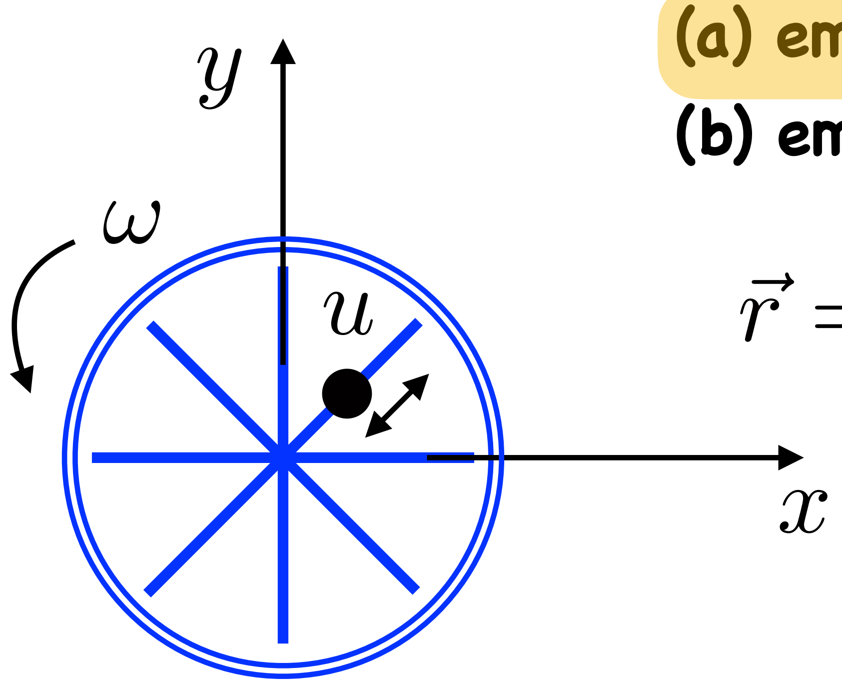
Exemplo Uma conta (miçanga) move-se ao longo do aro de uma roda com velocidade constante u. A roda gira com velocidade angular uniforme

$$\omega = \dot{\theta}$$

Em t=0 o aro encontra-se ao longo do eixo x e a miçanga encontra-se na origem. Encontre a velocidade da miçanga em qualquer tempo t

(a) em coordenadas polares

(b) em coordenadas cartesianas



$$\vec{r} = r(t)\,\hat{r} \qquad \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}(t)\,\hat{r} + r(t)\,\dot{\hat{r}}$$

$$r(0) = 0 \qquad \theta(0) = 0$$ condições iniciais

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = u \qquad \Longrightarrow \qquad r(t) = r(t_0 = 0) + \int_{t_0=0}^{t} dt'\, u \;= ut$$

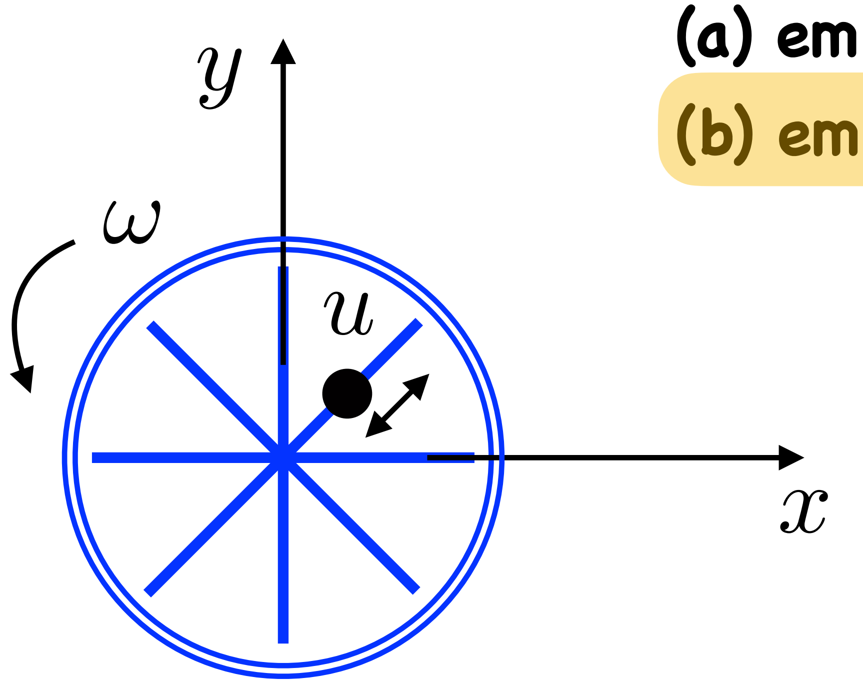
$$\vec{r} = ut\,\hat{r}$$

$$\vec{v}(t) = u\,\hat{r} + u\,t\,\dot{\theta}\,\hat{\theta} = u\,\hat{r} + u\,t\,\omega\,\hat{\theta} \;= v_r\,\hat{r} + v_\theta\,\hat{\theta}$$

Exemplo Uma conta (miçanga) move-se ao longo do aro de uma roda com velocidade constante u. A roda gira com velocidade angular uniforme

$$\omega = \dot{\theta}$$

Em t=0 o aro encontra-se ao longo do eixo x e a miçanga encontra-se na origem. Encontre a velocidade da miçanga em qualquer tempo t



(a) em coordenadas polares

(b) em coordenadas cartesianas

$$\vec{r} = x(t)\,\hat{\imath} + y(t)\,\hat{\jmath}$$

$$= r(t)\cos\theta(t)\,\hat{\imath} + r(t)\sin\theta(t)\,\hat{\jmath}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = v_x(t)\,\hat{\imath} + v_y(t)\,\hat{\jmath}$$

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{dr(t)}{dt}\cos\theta + r(t)\frac{d\cos\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = u\,\cos\theta - ut\omega\,\sin\theta$$

$$v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \frac{dr(t)}{dt}\sin\theta + r(t)\frac{d\sin\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = u\sin\theta + ut\omega\cos\theta$$

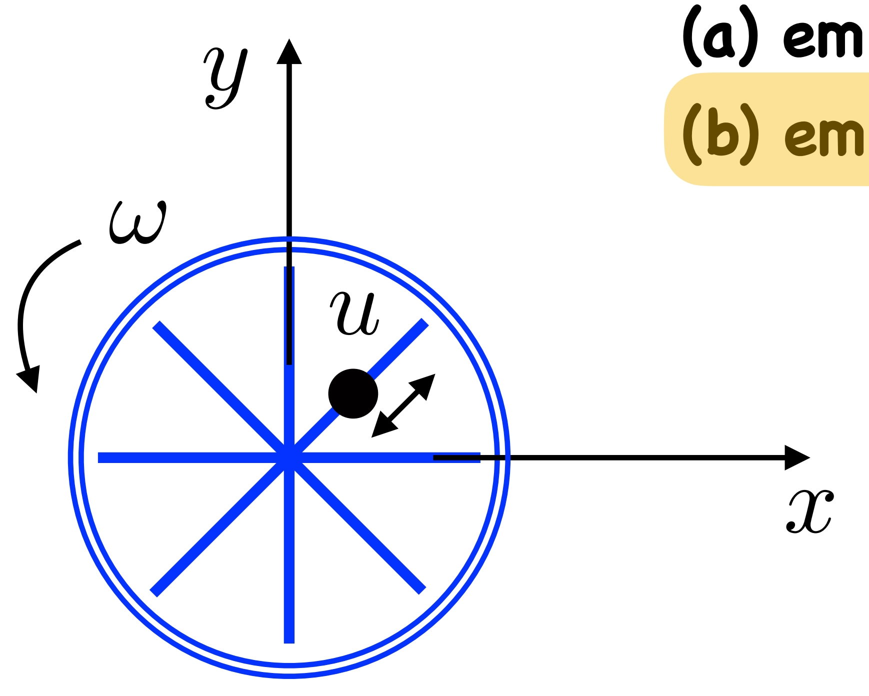
Exemplo Uma conta (miçanga) move-se ao longo do aro de uma roda com velocidade constante u. A roda gira com velocidade angular uniforme

$$\omega = \dot{\theta}$$

Em t=0 o aro encontra-se ao longo do eixo x e a miçanga encontra-se na origem. Encontre a velocidade da miçanga em qualquer tempo t

(a) em coordenadas polares

(b) em coordenadas cartesianas



$$\vec{r} = x(t)\,\hat{\imath} + y(t)\,\hat{\jmath}$$

$$= r(t)\cos\theta(t)\,\hat{\imath} + r(t)\sin\theta(t)\,\hat{\jmath}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = v_x(t)\,\hat{\imath} + v_y(t)\,\hat{\jmath}$$

$$= (u\cos\theta - ut\omega\sin\theta)\hat{\imath} + (u\sin\theta + ut\omega\cos\theta)\,\hat{\jmath}$$

$$\vec{v}(t) = (u\cos\omega t - ut\omega\sin\omega t)\hat{\imath} + (u\sin\omega t + ut\omega\cos\omega t)\,\hat{\jmath}$$

Aceleração em Coordenadas Polares

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}) = \frac{d}{dt}(v_r\,\hat{r} + v_\theta\,\hat{\theta})$$

$$= \ddot{r}\,\hat{r} + \dot{r}\,\dot{\hat{r}} + \dot{r}\dot{\theta}\,\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\,\hat{\theta} + r\dot{\theta}\,\dot{\hat{\theta}}$$

$$= \boxed{\ddot{r}\,\hat{r}} + \boxed{\dot{r}\dot{\theta}\,\hat{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\,\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\,\hat{\theta}}\,\boxed{- r\dot{\theta}\,\dot{\theta}\hat{r}}$$

$$= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\hat{\theta} = a_r\,\hat{r} + a_\theta\,\hat{\theta}$$

aceleração linear na direção radial devido à mudança de velocidade radial

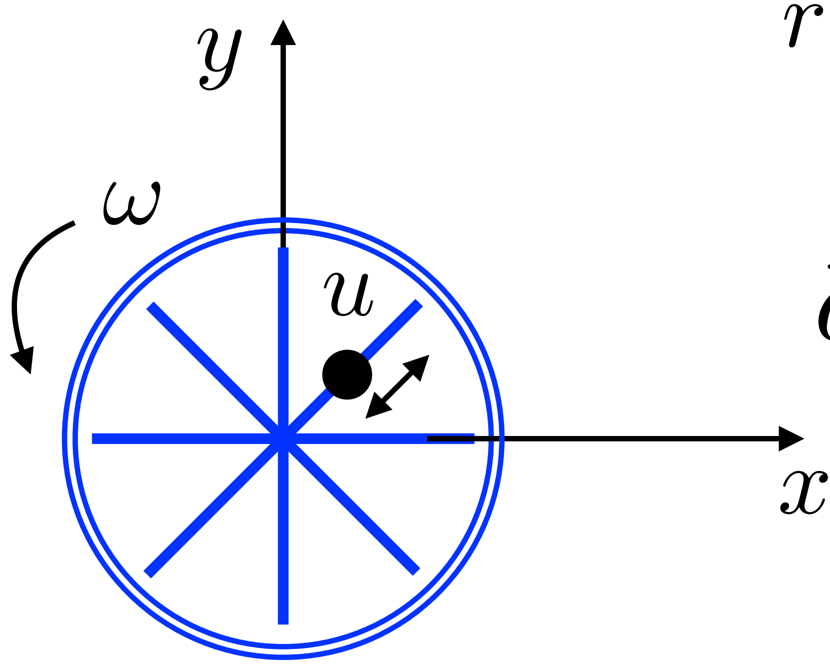
aceleração centrípeta

aceleração linear na direção tangencial devido à mudança de magnitude da velocidade angular

aceleração de Coriolis (real) presente quando ambos r, θ mudam com t

Exemplo

Voltemos ao problema da miçanga rodando



$$\vec{r} = ut\,\hat{r} \qquad\qquad \vec{v}(t) = u\,\hat{r} + u\,t\,\dot{\theta}\,\hat{\theta}$$

$$\dot{r} = u \qquad \ddot{r} = 0 \qquad \dot{\theta} = \omega \qquad \ddot{\theta} = 0$$

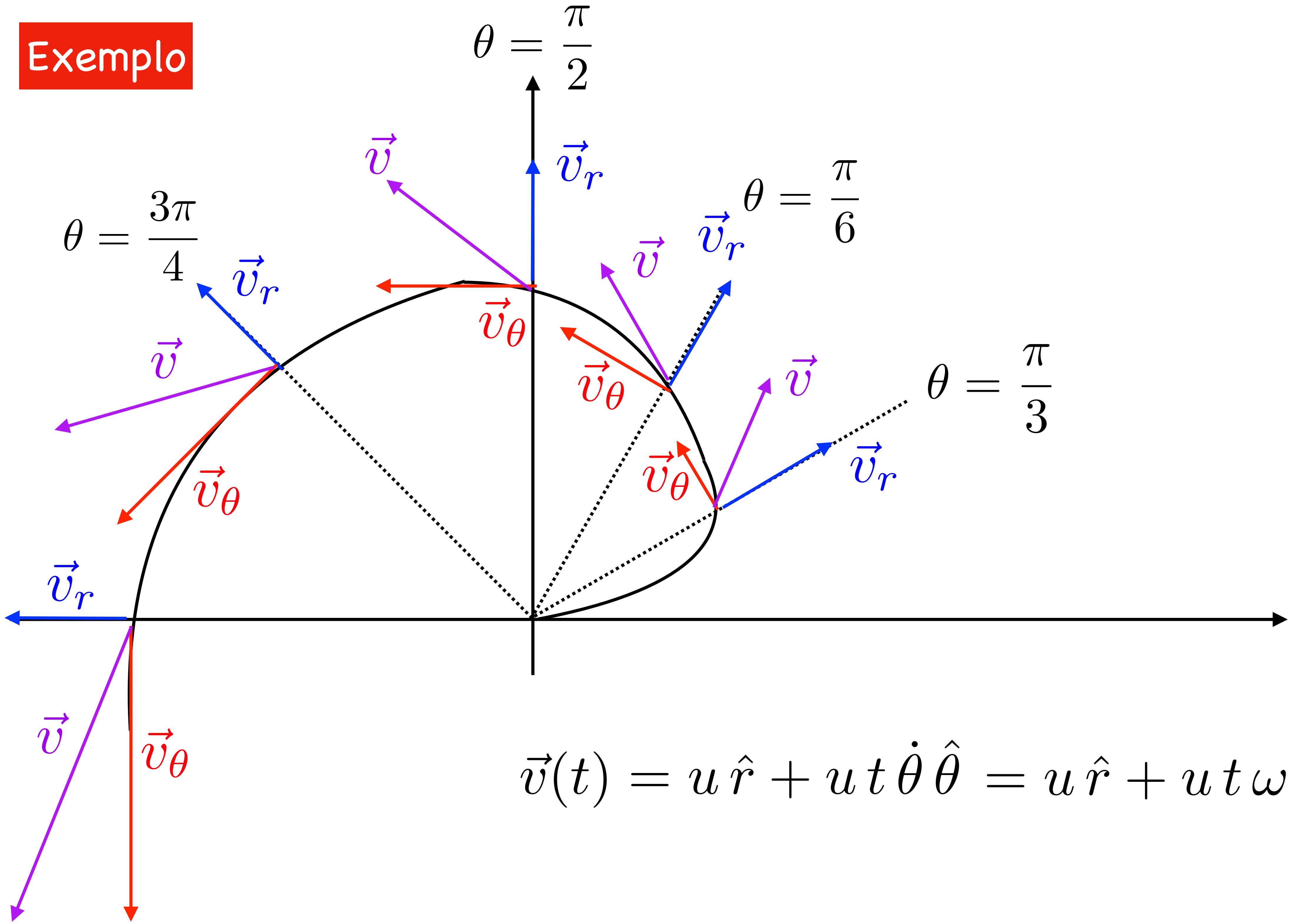
$$\vec{a} = (\cancelto{0}{\ddot{r}} - r\dot{\theta}^2)\,\hat{r} + (r\cancelto{0}{\ddot{\theta}} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\hat{\theta}$$

$$= -ut\omega^2\,\hat{r} + 2u\omega\,\hat{\theta}$$

$$= a_r\,\hat{r} + a_\theta\,\hat{\theta}$$

$$\theta(t) = \omega\,t$$

Exemplo



$$\vec{v}(t) = u\,\hat{r} + u\,t\,\dot{\theta}\,\hat{\theta} = u\,\hat{r} + u\,t\,\omega\,\hat{\theta}$$

Exemplo

Movimento sem Aceleração Radial

Uma partícula se move com $\dot{\theta} = \omega$ **(constante)**

$$r(t) = r_0 e^{\beta t}$$ r_0, β **são constantes**

$$\vec{v}(t) = \beta r_0 e^{\beta t} \hat{r} + r_0 \omega e^{\beta t} \hat{\theta}$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\hat{\theta}$$

$$= (\cancel{\beta^2 r_0 e^{\beta t} - r_0 e^{\beta t} \omega^2})\hat{r} + 2\beta r_0 \omega e^{\beta t} \hat{\theta}$$

se $\beta = \pm\omega$ **a parte radial da aceleração se anula**