



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo  
Departamento de Engenharia Mecânica*

*PME-3210 - Mecânica dos Sólidos I*

*Aula #05*

*Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.*

*05/04/2022*



***Escola Politécnica da Universidade de São Paulo***  
***Departamento de Engenharia Mecânica***

***Agenda:***

1. Introdução ao Cap.2 – Membros Carregados Axialmente (2.1)
2. Variações nos comprimentos de membros carregados axialmente (2.2)
3. Variações no comprimento de barras não uniformes (2.3)
4. Estruturas estaticamente indeterminadas (2.4)



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

## *1. Introdução ao Cap. 2 – Membros Carregados Axialmente*

Componentes estruturais submetidos apenas à tensão ou compressão são chamados de membros carregados axialmente.

As barras sólidas com eixos longitudinais retos são usadas com frequência para suportar carregamentos deste tipo e, como vimos anteriormente, para que haja tração ou compressão pura, a linha de ação das forças deve passar pelos centroides da seção transversal. O capítulo 2 está organizado nos seguintes tópicos:

- 2.1 Introdução
- 2.2 Variações nos comprimentos de membros carregados axialmente
- 2.3 Variações nos comprimentos de barras não uniformes
- 2.4 Estruturas estaticamente indeterminadas
- 2.5 Efeitos térmicos, erros de montagem ou fabricação e pré-deformações
- 2.6 Tensões em seções inclinadas
- 2.7 Energia de deformação
- 2.8 Carregamento impulsivo
- 2.9 Carregamento cíclico e fadiga
- 2.10 Concentrações de tensão
- 2.11 Comportamento não linear
- 2.12 Análise elastoplástica



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*  
*Departamento de Engenharia Mecânica*

Alguns Exemplos:



Fig.1: Treliça metálica formando uma cobertura:  
barras são submetidas primordialmente a  
esforços de tração ou compressão



Fig.2: Torres de transmissão de energia elétrica:  
barras também submetidas principalmente a  
esforços de tração ou compressão.



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Mais Exemplos:



Fig.3: Colunas de sustentação de vaso para armazenamento de gás (LNG) e barras para contraventamento.

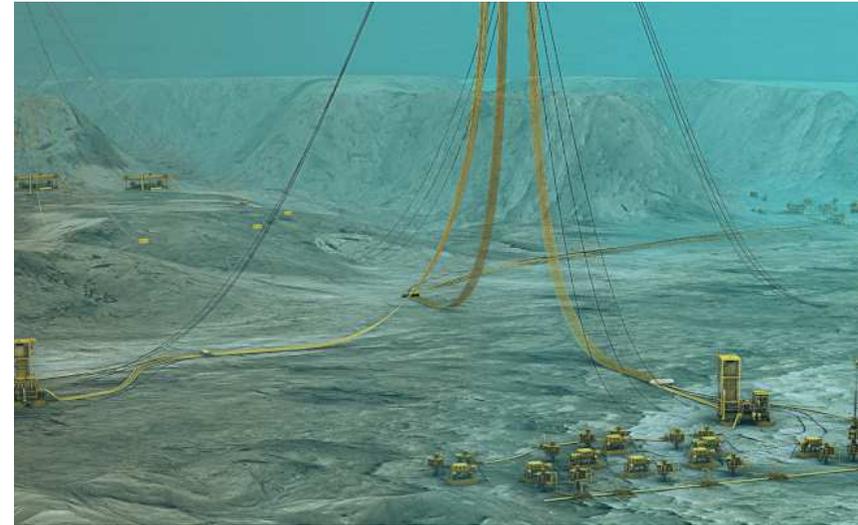


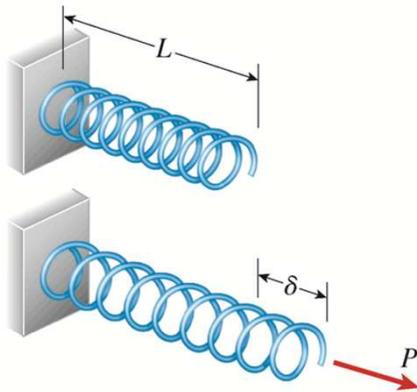
Fig.4: Dutos flexíveis e linhas de amarração: exemplos de estruturas onde os esforços normais são predominantes.



## 2. Variações nos comprimentos de membros carregados axialmente

Conceitos Fundamentais:

Relação  $P \times \delta$ , Rigidez (*stiffness*) e Flexibilidade (*compliance*)



**FIG. 2-2** Elongation of an axially loaded spring

Hipóteses:

1. Material possui comportamento elástico-linear;
2. Há linearidade geométrica: pequenos deslocamentos, pequenas deformações e pequenas rotações;
3. Não existem forças dissipativas (atrito, p.ex.) de forma que a força aplicada é totalmente entregue à estrutura.

Considerando as hipóteses acima, é possível demonstrar que em muitos casos existe uma relação linear entre a força aplicada e o alongamento da barra:

$$P = k \cdot \delta \Leftrightarrow \delta = \frac{P}{k} = f \cdot P$$

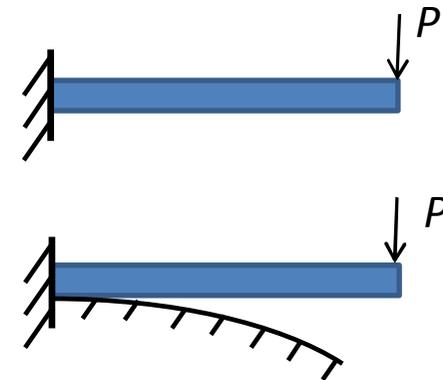
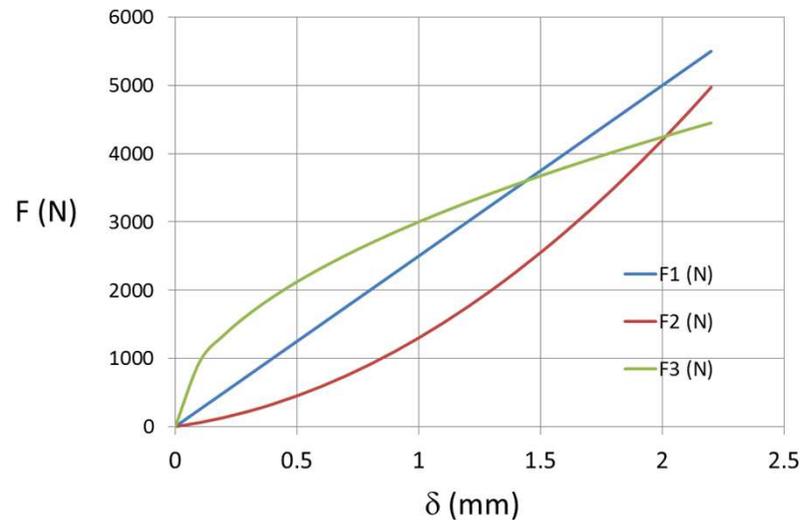
Denominamos:  $k$  = rigidez (*stiffness*) e  $f$  = flexibilidade (*compliance*)



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Deve-se observar que sempre haverá um intervalo de valores (de força e deslocamento) para os quais as hipóteses estabelecidas deixarão de ser válidas. É importante ficar sempre atento e verificar se as premissas estabelecidas são aceitáveis, ou não, diante dos resultados obtidos.

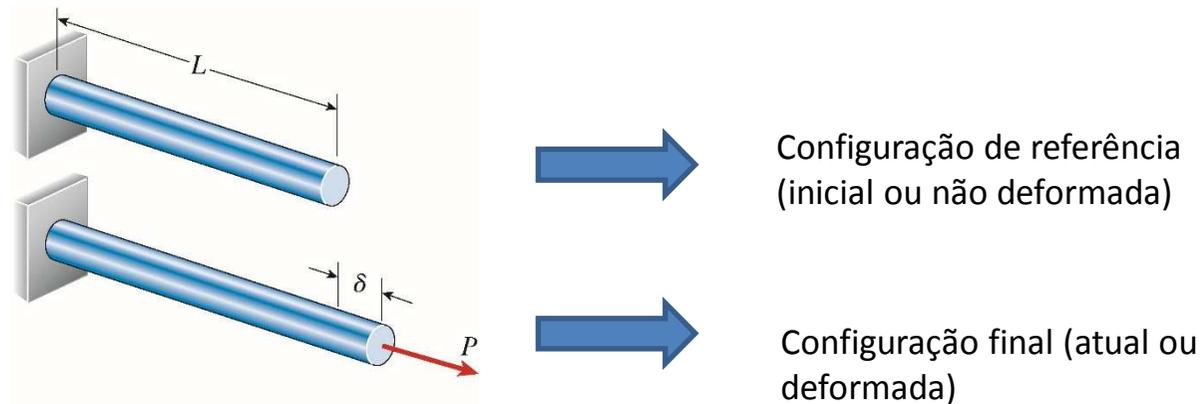
Por outro lado, também pode ocorrer que modificações na geometria da estrutura, conforme o carregamento evolui, levem a um comportamento não linear (em virtude de alterações nas condições de contato com outros corpos ou da estrutura consigo mesma), ainda que o material permaneça no regime linear elástico e existam condições de linearidade geométrica (vide [2, 3, 4]).





## Barras Prismáticas

Seja a barra prismática de comprimento  $L$  e área de seção transversal  $A$  (feita com material homogêneo, isotrópico e de comportamento elástico-linear, com módulo de elasticidade  $E$  dado). Consideremos que sobre a barra atue uma força  $P$  cuja linha de ação passa pelos centroides das seções transversais:



**FIG. 2-5** Elongation of a prismatic bar in tension

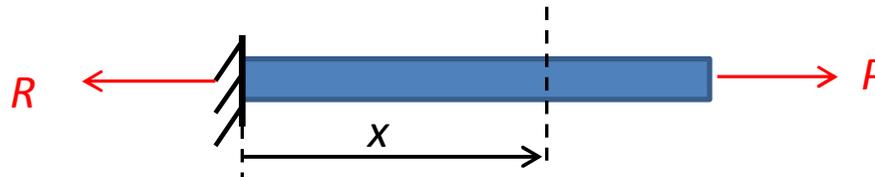
Pede-se: Determinar a rigidez de mola da barra e o alongamento  $\delta$  em função dos parâmetros fornecidos.



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*  
*Departamento de Engenharia Mecânica*

**Equilíbrio:**

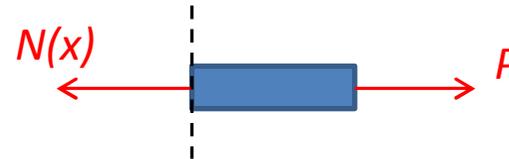
Por considerações de equilíbrio, percebe-se que a força de reação no engastamento e a força normal (interna) em cada seção transversal da barra deve ser igual a  $P$ :



$$\sum F_x = 0 \Leftrightarrow P - R = 0 \Leftrightarrow R = P$$



$$N(x) = R = P$$



$$N(x) = P$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

**Sugestão:** Ao fazer os diagramas de corpo livre das estruturas com cortes (a fim de determinar os esforços internos), sempre considere que a força normal interna  $N(x)$  seja de tração, com vetor saindo da seção transversal, como indicado nas figuras anteriores. Desta forma, se as equações de equilíbrio indicarem que o sinal é positivo, isto significa que o sentido arbitrado estava correto e a força normal interna é realmente de tração. Se, por outro lado, as equações de equilíbrio indicarem que o sinal é negativo, isto significa que o sentido arbitrado inicialmente estava incorreto e a força normal interna é de compressão.

**Relação Tensão-Deformação:**

Como temos um estado uniforme de tensões e deformações em toda a barra:

$$\sigma = E\varepsilon \Leftrightarrow \frac{P}{A} = E \cdot \frac{\delta}{L} \Leftrightarrow P = \left( \frac{EA}{L} \right) \delta$$

Logo:  $k = \frac{EA}{L}$  (rigidez) e  $f = \frac{1}{k} = \frac{L}{EA}$  (flexibilidade)



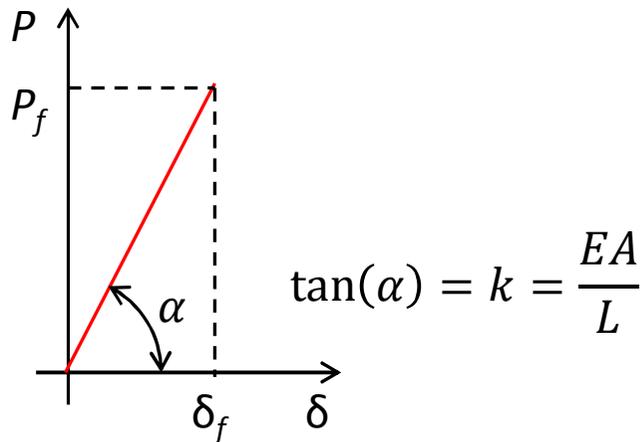
**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

E o alongamento da barra será, portanto, dado por:

$$\delta = \frac{PL}{EA}$$

Observações:

1. Note que todas as fórmulas estão dimensionalmente corretas;
2. Note que a relação entre a força aplicada e o alongamento da barra é linear;
3. Ao substituir valores numéricos, utilize unidades adequadas (ex:  $kN/mm$ ) ou notação científica para expressar os valores.



$$[k] = \frac{[E][A]}{[L]} = \frac{\frac{N}{m^2} \cdot m^2}{m} = \frac{N}{m}$$
$$[\delta] = \frac{[P][L]}{[E][A]} = \frac{N \cdot m}{\frac{N}{m^2} \cdot m^2} = m$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Qual a rigidez  $k$  de um fio de aço com diâmetro  $d = 2 \text{ mm}$ ,  $L = 1 \text{ m}$ , e  $E = 200 \text{ GPa}$ ?

$$E = 200 \text{ GPa} = 200 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 2 \times 10^{11} \frac{\text{N}}{10^6 \text{mm}^2} = 2 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 2 \times 10^5 \text{ MPa}$$

$$k = \frac{EA}{L} = \frac{E \pi d^2}{L \cdot 4} = \frac{2 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}{1000 \text{ mm}} \times \frac{\pi (2 \text{ mm})^2}{4}$$

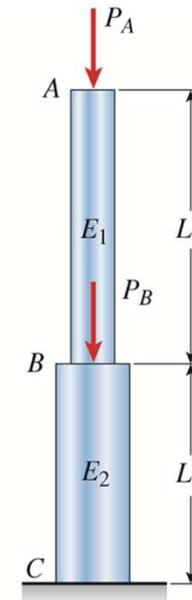
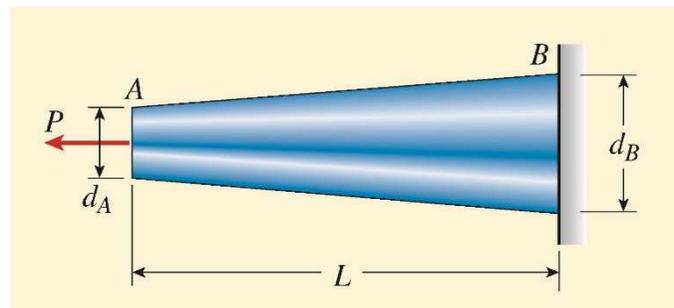
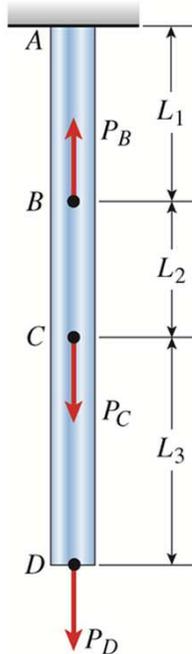
$$k = 200\pi \frac{\text{N}}{\text{mm}} \cong 628 \frac{\text{N}}{\text{mm}} = 628 \text{ kN/m}$$



### 3. Variações no comprimento de barras não uniformes

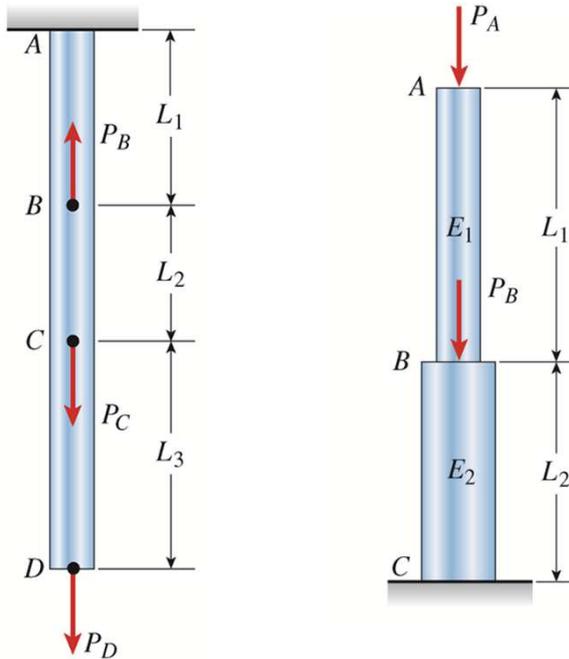
Tipos de não uniformidade:

- Carregamento não uniforme;
- Propriedades (do material ou geométricas) não uniformes;
- Carregamento e propriedades não uniformes.





Barras com carregamentos axiais em pontos intermediários /  
Barras formadas por segmentos prismáticos



**Procedimento:**

1. Identificar o número de segmentos necessários e identificá-los como segmentos 1, 2, ..., n;
2. Determinar as forças normais internas ( $N_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ) em cada segmento utilizando cortes apropriados, diagramas de corpo livre e equações de equilíbrio;
3. Determinar as variações nos comprimentos de cada segmento utilizando a relação:

$$\delta_i = \frac{N_i L_i}{E_i A_i}$$

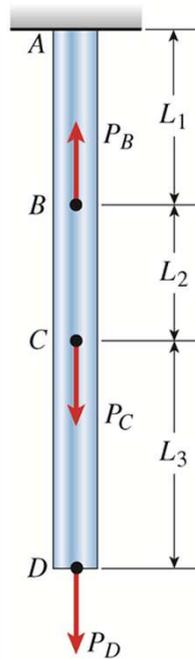
4. Determinar a variação de comprimento da barra:

$$\delta = \sum_{i=1}^n \delta_i = \sum_{i=1}^n \frac{N_i L_i}{E_i A_i}$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Exemplo: Determinar o alongamento da barra ABCD da figura abaixo em função dos parâmetros:  $E$ ,  $A$ ,  $P_B$ ,  $P_C$ ,  $P_D$ ,  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$ .



Solução:

Passo 1. Observamos claramente a necessidade de dividir a barra em 3 segmentos:

Segmento 1: barra AB, de comprimento  $L_1$

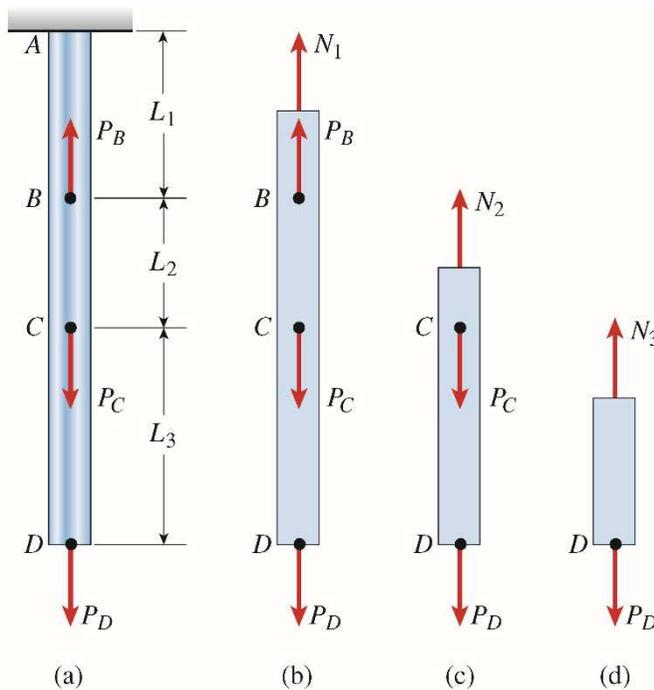
Segmento 2: barra BC, de comprimento  $L_2$

Segmento 3: barra CD, de comprimento  $L_3$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Passo 2: Determinamos as forças normais internas ( $N_i$ ,  $i = 1,2,3$ ) em cada segmento utilizando cortes apropriados, diagramas de corpo livre e equações de equilíbrio



Corte entre A e B (Figura b):

$$N_1 = P_D + P_C - P_B$$

Corte entre B e C (Figura c):

$$N_2 = P_D + P_C$$

Corte entre C e D (Figura d):

$$N_3 = P_D$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Passo 3: Determinamos as variações nos comprimentos de cada segmento:

$$\delta_1 = \frac{N_1 L_1}{EA} = \frac{(P_D + P_C - P_B)L_1}{EA}$$

$$\delta_2 = \frac{N_2 L_2}{EA} = \frac{(P_D + P_C)L_2}{EA}$$

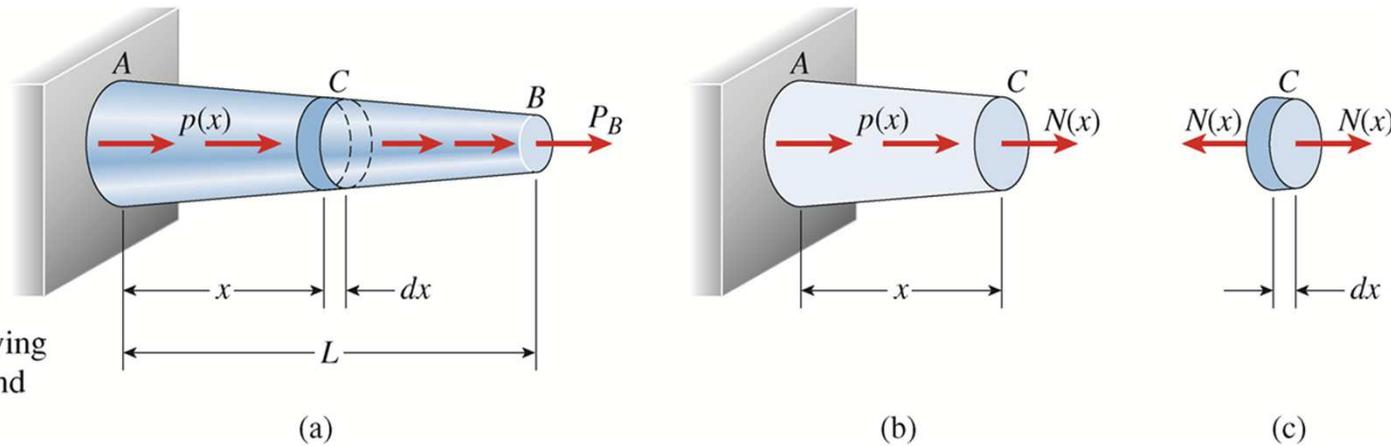
$$\delta_3 = \frac{N_3 L_3}{EA} = \frac{(P_D)L_3}{EA}$$

Passo 4: Determinamos a variação de comprimento da barra toda:

$$\delta = \sum_{i=1}^n \delta_i = \frac{(P_D + P_C - P_B)L_1}{EA} + \frac{(P_D + P_C)L_2}{EA} + \frac{(P_D)L_3}{EA}$$



## Barras com variações contínuas de cargas ou dimensões



**FIG. 2-11** Bar with varying cross-sectional area and varying axial force

Isolando um elemento de comprimento infinitesimal  $dx$  cuja face esquerda dista  $x$  da extremidade A e que está submetido a uma força normal interna  $N(x)$ , teremos:

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A(x)} = E\varepsilon(x) = E \frac{d\delta}{dx} \Leftrightarrow d\delta = \frac{N(x)}{EA(x)} dx \Leftrightarrow \delta = \int_0^L \frac{N(x)}{EA(x)} dx$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

**Procedimento:**

1. Identificar o número de segmentos necessários e identificá-los como segmentos 1, 2, ..., n;
2. Determinar as forças normais internas ( $N_i = N_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ) em cada segmento utilizando cortes apropriados, diagramas de corpo livre e equações de equilíbrio;
3. Determinar as variações nos comprimentos de cada segmento utilizando a relação:

$$\delta_i = \int_0^L \frac{N_i(x)}{E_i A_i(x)} dx$$

4. Determinar a variação de comprimento da barra:

$$\delta = \sum_{i=1}^n \delta_i$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

#### **4. Estruturas estaticamente indeterminadas**

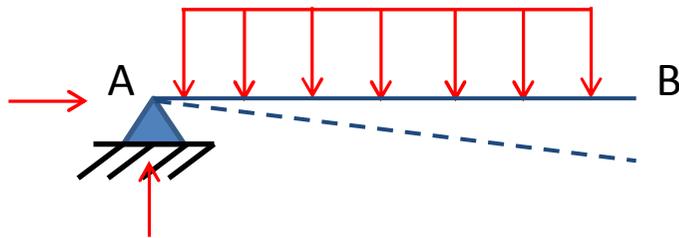
Considerando que as estruturas sejam formadas por elementos de rigidez elevada de tal forma que cada membro possa ser imaginado como um corpo rígido (em uma primeira aproximação), podemos classificá-las de acordo com as condições de equilíbrio estático (estaticidade) em:

- Estruturas Hipostáticas: são as que possuem um número de reações e de vínculos internos insuficientes para garantir o equilíbrio de todas suas partes em condições estáticas, o que possibilita a movimentação de suas partes;
- Estruturas Isostáticas (ou estaticamente determinadas): são as que possuem um número de reações e de vínculos internos suficientes para garantir o equilíbrio de todas suas partes em condições estáticas, impedindo a movimentação de suas partes. Neste caso, a determinação de todas as reações de apoio e dos esforços internos de cada parte é feita simplesmente com a aplicação das equações de equilíbrio estático;
- Estruturas Hiperestáticas (ou estaticamente indeterminadas): são as que possuem um número de reações e de vínculos internos acima do que seria suficiente para garantir o equilíbrio de todas suas partes. Neste caso, a movimentação de todas suas partes também fica impedida (como no caso das estruturas isostáticas), mas não é possível determinar todas as reações de apoio e/ou dos esforços internos utilizando apenas as equações de equilíbrio estático.

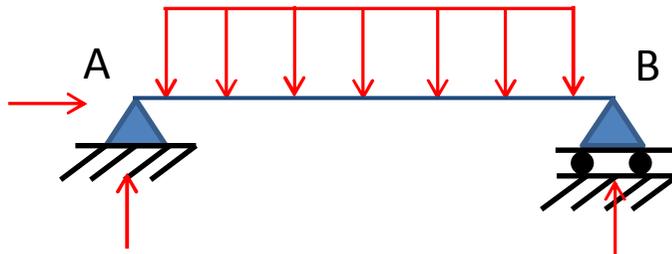


**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

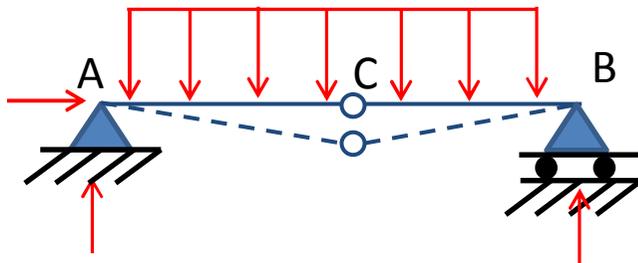
Exemplos simples:



Estr. Hipostática: movimento de rotação em torno do eixo que passa por A não está impedido. Há um número de reações vinculares (2) inferior ao mínimo necessário para evitar MCR (3).



Estr. Isostática: todos os movimentos de corpo rígido estão impedidos com um número mínimo de reações vinculares (3).

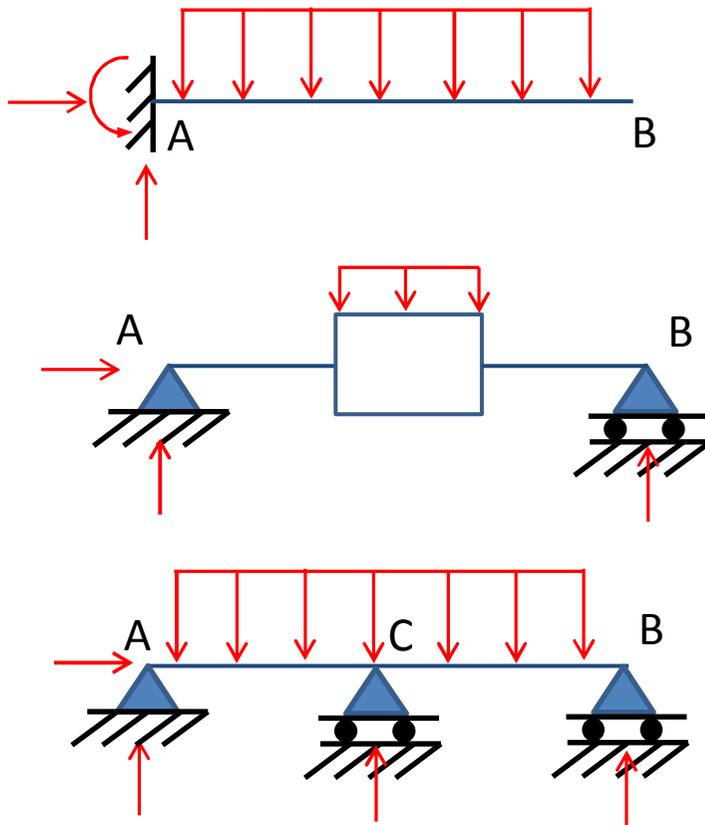


Estr. Hipostática: embora o número de reações vinculares (3) tenha sido mantido igual ao do exemplo anterior, a retirada de um vínculo interno pela introdução de uma articulação ideal faz com que a estrutura se torne hipostática e incapaz de equilibrar o carregamento aplicado.



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Exemplos simples:



Estr. Isostática: o engaste em A introduz um número suficiente de reações vinculares (3) de modo a impedir o movimento de corpo rígido da estrutura.

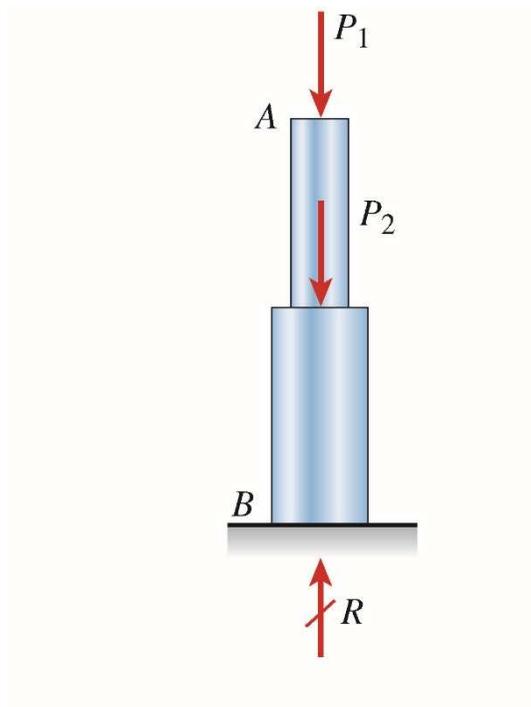
Estr. Hiperestática: há um número suficiente de reações vinculares (3) que impedem o MCR da estrutura e tais reações podem ser facilmente determinadas com as equações de equilíbrio estático, mas a introdução de um quadro fechado torna a estrutura hiperestática (não é possível determinar os esforços internos no quadro apenas com as equações de equilíbrio estático).

Estr. Hiperestática: todos os movimentos de corpo rígido estão impedidos mas com um número de reações vinculares (4) superior ao número mínimo necessário (3).

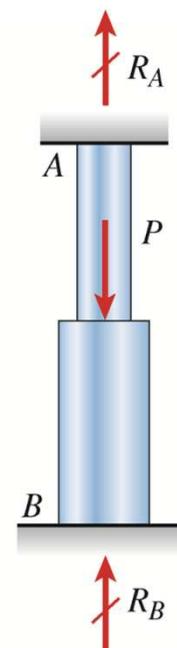


*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*  
*Departamento de Engenharia Mecânica*

Outros exemplos simples:



**FIG. 2-14** Statically determinate bar  
(Barra estaticamente determinada)



**FIG. 2-15** Statically indeterminate bar  
(Barra estaticamente indeterminada)



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

## Procedimento para a Análise de Estruturas Hiperestáticas

A análise de estruturas estaticamente indeterminadas é feita com a introdução de um número adicional de equações que deve igualar o número de incógnitas hiperestáticas. Tais equações são denominadas equações de compatibilidade de deslocamentos. Por ora trataremos apenas de estruturas submetidas a carregamentos axiais, mas o procedimento descrito pelos passos abaixo é geral:

1. Determinar o grau de hiperestaticidade estrutural ( $g$ );
2. Transformar a estrutura hiperestática original em uma estrutura isostática equivalente (EIF) através da “eliminação” de  $n$  incógnitas hiperestáticas (onde  $g = n$  é o grau de hiperestaticidade estrutural encontrado no passo anterior). As incógnitas hiperestáticas passarão a ser vistas (na EIF) como carregamentos externos aplicados na estrutura;
3. Aplicar, se necessário, as equações de equilíbrio estático de modo que as reações de apoio da EIF escolhida fiquem expressas em função de todas as cargas externas (incluindo as incógnitas hiperestáticas entre elas);
4. Aplicar condições de compatibilidade de deslocamentos ( $n$  vezes) para que o comportamento da EIF seja igual ao da estrutura hiperestática original;
5. Resolver o sistema de equações obtido para determinar as incógnitas hiperestáticas.



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Exemplo: A barra ABC indicada na figura abaixo é formada pelos segmentos AC (de área  $A_1$  e comprimento  $L_1$ ) e CB (de área  $A_2$  e comprimento  $L_2$ ). As seções A e B encontram-se engastadas, e na interface C entre as barras é aplicada uma força axial centrada de intensidade  $P$ . O módulo de elasticidade do material é  $E$  (sendo o mesmo para os dois segmentos).  
Pede-se determinar as reações vinculares  $R_A$  e  $R_B$  e o deslocamento do ponto C.

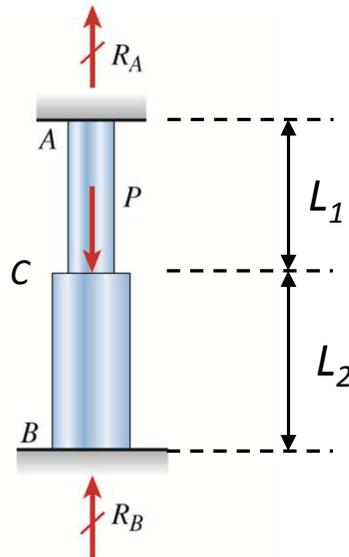


FIG. 2-15 Statically indeterminate bar

Solução:

1. O grau de hiperstaticidade estrutural é:

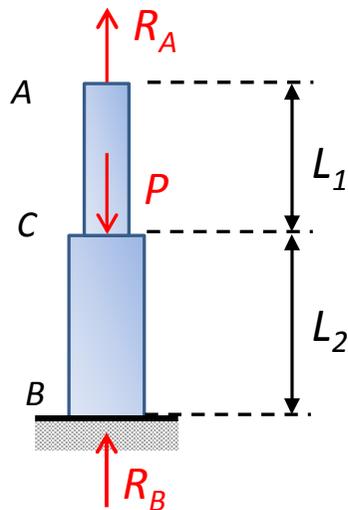
$$g = 2 - 1 = 1$$

(número de reações vinculares)      (número de equações de equilíbrio estático disponíveis)



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

2. Uma EIF (estrutura isostática fundamental) possível pode ser obtida “eliminando-se o engaste” em A e considerando que a reação  $R_A$  seja interpretada (para a EIF) como um “esforço externo” aplicado:



3. A aplicação da equação de equilíbrio de forças na direção vertical impõe que:

$$R_A + R_B = P \Leftrightarrow R_B = P - R_A$$

*Note que esta equação nos diz que os “esforços externos” da EIF ( $P$  e  $R_A$ ) podem variar livremente, mas a reação  $R_B$  não, caso contrário o equilíbrio não estará garantido!*

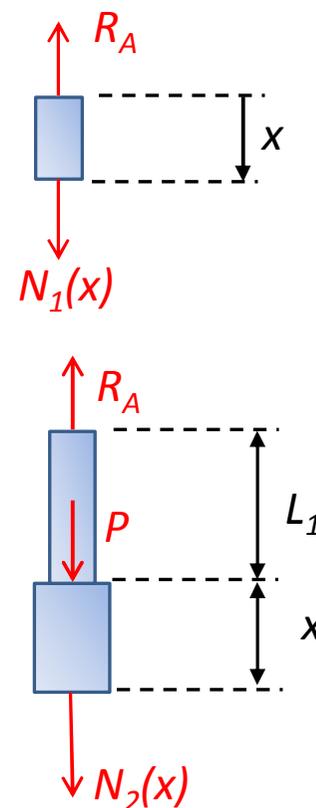
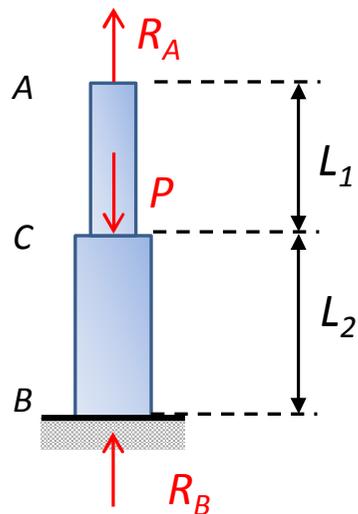
4. Para resolver o problema basta uma equação de compatibilidade de deslocamentos (já que o grau de hiperestaticidade estrutural é  $g = 1$ ). Coerentemente com a EIF escolhida, a equação de compatibilidade de deslocamentos deve ser:

$$\delta = \sum_{i=1}^2 \delta_i = \sum_{i=1}^2 \frac{N_i L_i}{E_i A_i} = 0$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Para resolver esta equação é necessário determinar os esforços solicitantes internos ( $N_i = N_i(x)$ ,  $i = 1, 2$ ) em cada segmento, o que pode ser feito de forma simples, já que a estrutura “tornou-se isostática”:



Resultam:

$$\left\{ \begin{array}{ll} N_1(x) = R_A, & 0 \leq x \leq L_1 \\ N_2(x) = R_A - P, & 0 \leq x \leq L_2 \end{array} \right.$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Logo: 
$$\frac{N_1 L_1}{EA_1} + \frac{N_2 L_2}{EA_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{R_A L_1}{A_1} + \frac{(R_A - P)L_2}{A_2} = 0 \Leftrightarrow R_A \left( \frac{L_1}{A_1} + \frac{L_2}{A_2} \right) = P \frac{L_2}{A_2}$$

$$R_A = \left( \frac{A_1 L_2}{A_2 L_1 + A_1 L_2} \right) P$$

Portanto: 
$$R_B = P - R_A \Leftrightarrow R_B = \left( \frac{A_2 L_1}{A_2 L_1 + A_1 L_2} \right) P$$

Para obter o deslocamento no ponto C, basta determinar o alongamento do trecho AC ou o encurtamento do trecho CB: ambos serão iguais em valor absoluto (mas com sinais contrários):

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{N_1 L_1}{EA_1} > 0 \\ \delta_2 &= \frac{N_2 L_2}{EA_2} < 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \delta_{v,C} = \delta_1 = \frac{R_A L_1}{EA_1} = \left( \frac{L_1 L_2}{A_2 L_1 + A_1 L_2} \right) \frac{P}{E}$$



***Escola Politécnica da Universidade de São Paulo***  
***Departamento de Engenharia Mecânica***

**Referências:**

- [1] Gere, J.M.; Goodno, B.J.; Mecânica dos Materiais, Tradução da 7ª edição norte-americana. Cengage Learning, 2010, 860p.
- [2] Aranha, N.; de Oliveira Jr., J.M.; Bellio, L.O.; Bonventi Jr., W.; A Lei de Hooke e as molas não lineares, um estudo de caso. Revista Brasileira de Ensino de Física, v.38, nº 4, e4305, 2016. Doi: 10.1590/1806-9126-RBEF-2016-0102
- [3] <https://www.youtube.com/watch?v=xP0tOKW0oNA>
- [4] Freeman Jr., D.C.; Nonlinear springs with applications to flow regulation valves and mechanisms. Thesis. Massachusetts Institute of Technology, 2008, 292p.