

Universidade de São Paulo
Instituto de Física de São Carlos
SFI 5704 - Mecânica Estatística - 2021-1

Prof. Leonardo Paulo Maia

Lista 03 - analíticos (2022/04/18 → **2022/05/02**)

Calcule os cumulantes das variáveis aleatórias discretas dos itens 1 e 2. Para cada variável aleatória contínua indicada nas questões de 3 até 5, calcule sua função característica e, a partir dela, calcule a média e a variância da v.a.. Nos casos 4 e 5, calcule também os cumulantes.

1 Bernoulli, $p_0 = 1 - p$, $p_1 = p$

2 binomial, $p_n = \binom{N}{n} p^n (1 - p)^{N-n}$, $n = 0, \dots, N$

3 uniforme, $\rho(x) = 1/(b - a)$, $a \leq x \leq b$

4 exponencial, $\rho(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$

5 gama, $\rho(x) = \lambda^p x^{p-1} e^{-\lambda x} / \Gamma(p)$, $x \geq 0$, $\Gamma(p) = \int_0^\infty z^{p-1} e^{-z} dz$

6 (peso 2) Considere sequências binárias de tamanho n onde, em cada posição, o dígito 1 ocorre com probabilidade p e o dígito 0 ocorre com probabilidade $1 - p$, independentemente do que ocorre nas demais posições. Use a lei da probabilidade total para obter uma equação de recorrência de segunda ordem para a probabilidade de uma dessas sequências **não apresentar dois 1's consecutivos**. Você deverá obter a solução explícita da recorrência, considerando as condições iniciais pertinentes.

7 (peso 2) Considere sequências binárias de tamanho n onde, em cada posição, o dígito 1 ocorre com probabilidade p e o dígito 0 ocorre com probabilidade $1 - p$, independentemente do que ocorre nas demais posições. Use a lei da probabilidade total para obter uma equação de recorrência de primeira ordem para a probabilidade de uma dessas sequências apresentar uma quantidade total **par de 1's**. Você deverá obter a solução explícita da recorrência, considerando as condições iniciais pertinentes. Porém, antes de mais nada, tente prever o comportamento qualitativo da solução. Para obter um número par de 1's, você preferiria p alto, baixo ou seria indiferente? A paridade de n é relevante? Sempre?

8 Mostre que $\boxed{\text{cov}(X, Y) = \langle X \cdot Y \rangle - \langle X \rangle \cdot \langle Y \rangle}$ e que $\text{cov}(X, Y) = 0$ se X e Y forem independentes.

9 Mostre que $\boxed{\text{var}(X + Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y) + 2 \text{cov}(X, Y)}$.

- 10 A transformação de Box-Muller define o par de variáveis (Z_1, Z_2) a partir de (U_1, U_2) de acordo com

$$\begin{cases} Z_1 = \sqrt{-2 \log(U_1)} \cos(2\pi U_2) \\ Z_2 = \sqrt{-2 \log(U_1)} \sin(2\pi U_2) \end{cases}$$

Mostre (analiticamente, manipulando as densidades conjuntas pertinentes) que, se U_1 e U_2 são independentes e uniformemente distribuídas em $(0, 1)$, então Z_1 e Z_2 são independentes e individualmente obedecem a distribuição normal padrão (ou seja, média nula e variância unitária).

- 11 Determine a densidade de probabilidade da soma de duas variáveis aleatórias independentes com distribuições exponenciais (considere a possibilidade dos parâmetros que caracterizam as exponenciais serem iguais ou distintos).
- 12 (Kardar - particles) A corrente $I(V)$ que passa por um diodo está relacionada à voltagem aplicada V pela eq. $I(V) = I(0) [\exp(eV/kT) - 1]$, onde todas as constantes têm seus significados usuais. Se o diodo está sujeito a uma voltagem aleatória descrita por uma Gaussiana de média nula e variância s^2 , determine a densidade de probabilidade da corrente, seu valor mais provável, seu valor médio e indique estas duas grandezas no esboço de um gráfico da densidade.

- 13 (estatística, peso 2) Dada uma amostra aleatória $\{X_i\}$ (v.a.'s i.i.d.), $i = 1, \dots, n$, a *média amostral*

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

é uma *variável aleatória* sem viés, com o mesmo valor médio de cada parcela, $\langle \bar{X} \rangle = \langle X_i \rangle \equiv \mu$. Trata-se de um estimador não enviesado da média *populacional* μ .

Como podemos obter um estimador para a *variância populacional* $\text{var}(X_i) \equiv \sigma^2$? Sendo a variância o segundo momento central, a primeira ideia seria calcular, na amostra, a grandeza

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2.$$

Porém, é importante perceber que isso é impossível, pois a média populacional μ é uma constante desconhecida, não completamente determinada pela amostra. Ingenuamente, uma saída parece ser o cálculo da grandeza puramente amostral

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

Mostre que este estimador de σ^2 é enviesado, com valor médio $\frac{n-1}{n}\sigma^2$, e que, portanto, a variância populacional σ^2 deve ser estimada pela *variância amostral* não enviesada

$$S^2 \equiv \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$