Funções Exponenciais e Logarítmicas

Universidade de São Paulo

São Carlos - SP, Brasil

Definição

Seja $a > 0$, $a \neq 1$. A função $f(x) = a^x$ é chamada ***função exponencial de base a****.*

Vejamos o que isso significa.

- Se $x = n$, um inteiro positivo, então $a^n = \underbrace{aa \cdots a}_{n \text{ vezes}}$.
- $a^0 = 1$.
- Se $x = -n$, com n um inteiro positivo, então $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.
- Se $x = \dfrac{p}{q}$, com p e q são inteiros e $q > 0$, então $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p$.

Note que a base $a > 0$.

Faz sentido $(-8)^{\sqrt{2}}$? Ou melhor, podemos definir $(-8)^x$.

Ex: $(-8)^{1/3} = (-8)^{2/6}$? Verifique que não! Um é negativo e o outro é positivo.

Ver videos curtos de Matemática Universitária com o prof. Renan Lima. Video 46 de limite e continuidade.

Faz sentido $3^{\sqrt{2}}$? Seja $x \in \mathbb{Q}$.

Caso $a > 1$. Então a^x será o único número real cujas aproximações por falta são as potências a^r, com $r \in \mathbb{Q}$, $r < x$ e cujas aproximações por excesso são as potências a^s, com $s \in \mathbb{Q}$, $s > x$. Em outras palavras, a^x satisfará:

$$r < x < s, \quad \text{com} \quad r, s \in \mathbb{Q} \quad \Longrightarrow \quad a^r < a^x < a^s.$$

Caso $a < 1$. Então a^x satisfará:

$$r < x < s, \quad \text{com} \quad r, s \in \mathbb{Q} \quad \Longrightarrow \quad a^s < a^x < a^r.$$

Observação.

Se olharmos o gráfico da função a^x, com $x \in \mathbb{Q}$, então os buracos correspondentes aos valores irracionais de x serão preenchidos de forma a se obter uma função crescente para todos os números reais. Ou seja, para $x \in \mathbb{R}$, $a^x = \lim_{r \to x} a^r$ onde r é racional.

(Video 47 de matemática Universitária, prof. Renan.)

Proposição (Propriedades)

Sejam $a, b, x, y \in \mathbb{R}$, *com* a *e* b *positivos. Então*

(a) $a^{x+y} = a^x a^y$. *Ou seja,* $f(x+y) = f(x).f(y)$

Ex: $3^{2+1} = 3^2 3^1$

(b) $(a^x)^y = a^{xy} = (a^y)^x$.

(c) $(ab)^x = a^x b^x$.

(d) *Se* $a > 1$, *então a função exponencial será estritamente crescente, ou seja, se* $x < y$ *então* $a^x < a^y$.

(e) *Se* $0 < a < 1$, *então a função exponencial será estritamente decrescente, ou seja, se* $x < y$, *então* $a^x > a^y$.

Exercício: Esboce o gráfico das funções exponenciais

$$f(x) = 2^x \qquad \text{e} \qquad g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

Note que $g(x) = f(-x)$ portanto o gráfico é um espelho em relação ao eixo y.

Como a função exponencial é ou crescente ou decrescente, existe a função inversa sobre a sua imagem.

Definição

A função inversa da função exponencial é chamada ***função logarítmica com base a*** *e denotada por* $\log_a$. *Assim,*

$$\log_a x = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad a^y = x.$$

Observação: Note que $\log_a x$ está definido para $x > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$. Além disso satisfaz

$$\log_a(a^x) = x, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad \text{e} \qquad a^{\log_a x} = x, \quad x > 0.$$

Proposição (Propriedades)

Sejam $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$. *São válidas as propriedades:*

(a) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$.

(b) $\log_a x^y = y \log_a x$.

(c) $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.

(d) *Se* $a > 1$, *então a função logarítmica será estritamente crescente, ou seja, se* $x < y$, *então* $\log_a x < \log_a y$.

(e) *Se* $0 < a < 1$, *então a função logarítmica será estritamente decrescente, ou seja, se* $x < y$, *então* $\log_a x > \log_a y$.

(f) *(Mudança de base)* $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$.

Exercício: Esboce o gráfico da funções logarítmicas

$$f(x) = \log_2 x \qquad \text{e} \qquad f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x.$$

A função exponencial de base e, $f(x) = e^x$, em que $e \approx 2,718281$, desempenha um papel importante no cálculo.

Definição

A função logarítmica com base e é chamada ***logaritmo natural*** *e denotada por* $\log_e x = \ln x$.

Observação: Como $\ln(e^x) = x$, tomando $x = 1$, temos $\ln e = 1$.

Há varias formas de se introduzir o número e. Adiante, definiremos e como um limite. Depois, vamos definir o logaritmo natural utilizando integrais, nesse caso, o número e será o único número satisfazendo $\ln e = 1$.

Comentário: Definimos a função exponencial a^x de forma a preencher os buracos no gráfico de a^x, com $x \in \mathbb{Q}$. Em outras palavras, a função exponencial é contínua pela propria definição. Portanto, sua função inversa $\log_a x$ também é contínua.

Exemplo

- *A função*
$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2 - 1}$$
é contínua em $(0, +\infty) \setminus \{1\}$*, ou seja, em* $(0, 1) \cup (1, +\infty)$.

- *Calcule o limite*
$$\lim_{x \to 1} \exp\left(\frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}\right) \quad [R : e^{1/2}].$$

Lembrar também que podemos definir logaritmo natural como área:

$$ln(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_1^x \frac{1}{s} ds & se\ x > 1 \\ 0 & se\ x = 1 \\ \displaystyle -\int_x^1 \frac{1}{s} ds & se\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

~~Na aula/slide 10~~ mostra-se usando o fato acima que $\lim_{x \to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = 1$ pelo Teorema do Confronto usando "área retângulo<área do ln(1+x) < área de outro retângulo maior.

Exemplo

Onde a função $h(x) = \ln(1 + \cos x)$ *é contínua?*

Podemos escrever $h(x) = f(g(x))$, com $f(x) = \ln x$ e $g(x) = 1 + \cos x$. Logo h é contínua, pois é composição de funções contínuas.

Note que, $\ln(1 + \cos x)$ está definida quando $1 + \cos x > 0$. Logo h não está definida quando $\cos x = -1$, ou seja, quando $x = \pm\pi, \pm 3\pi, \ldots$