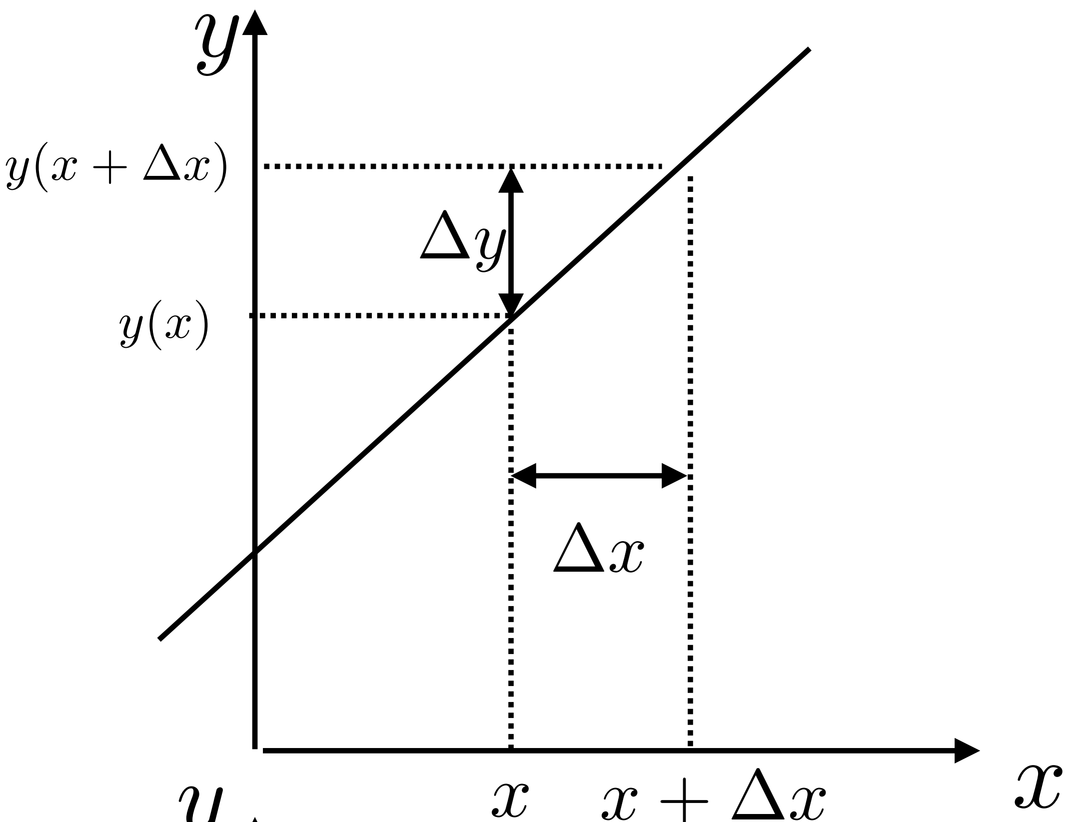
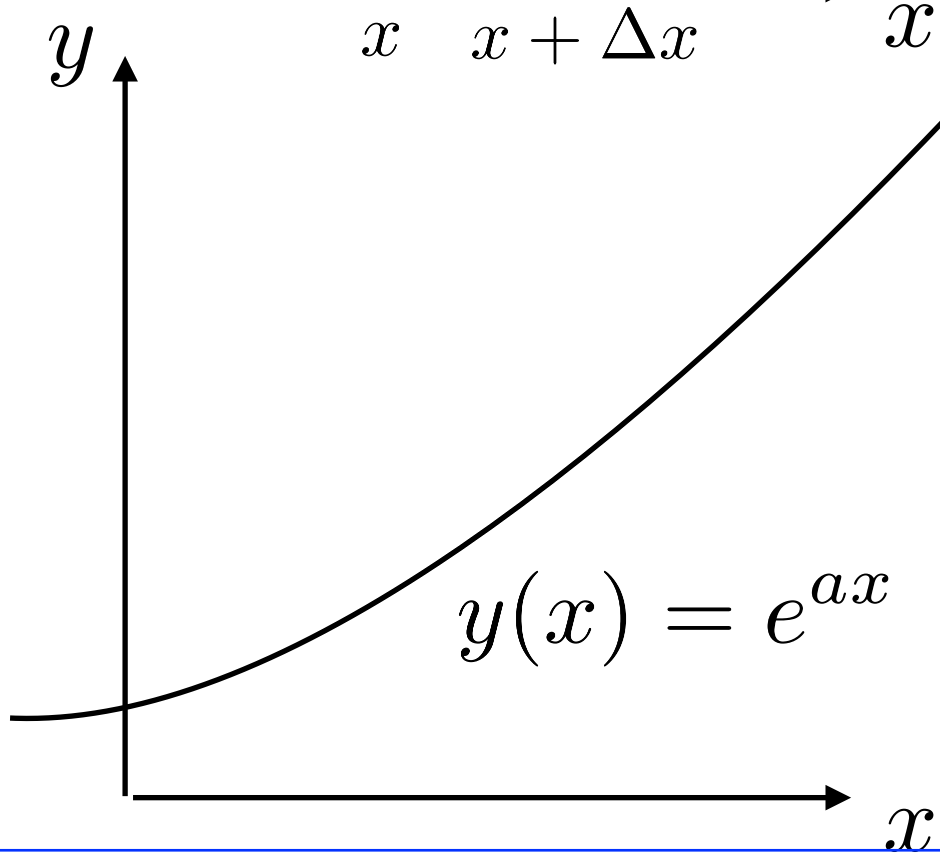
Matemática – a Linguagem da Física III

Física I – Módulo I – Noções Básicas

Recapitulação





Tipo mais simples de Equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = b$$

constante arbitraria

$$\Longrightarrow y(x) = bx + C$$

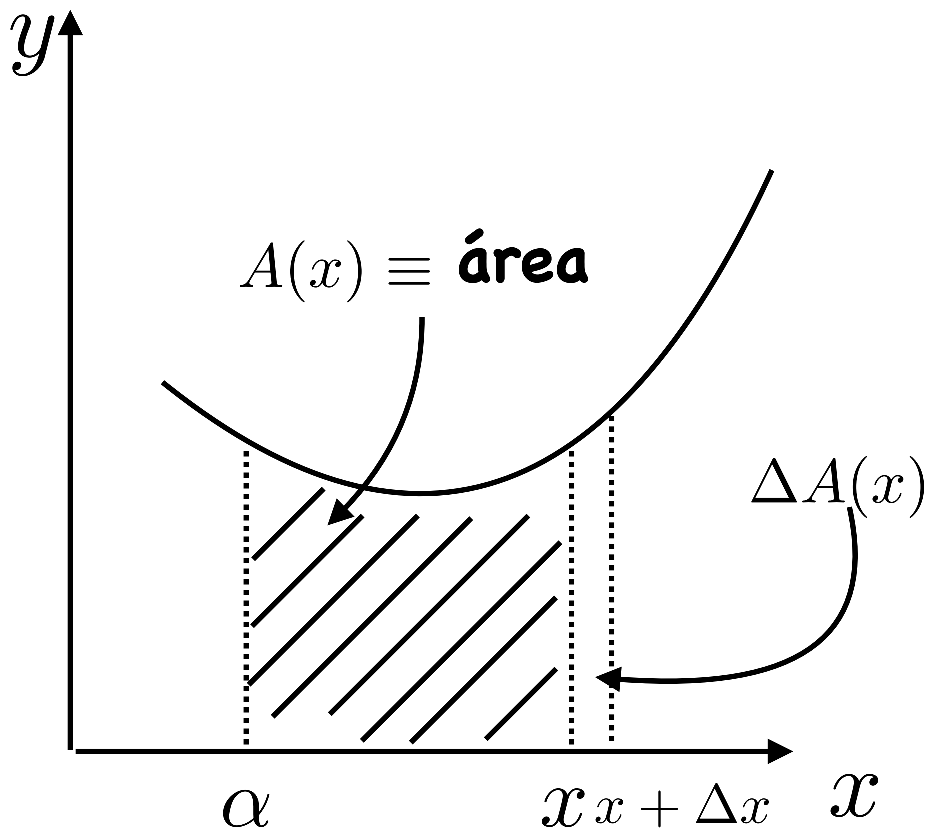
$$y(0) = C$$

$$\frac{dy}{dx} = ay(x) \Longrightarrow y(x) = Ce^{ax}$$

$$y(0) = C$$

Outro tipo de Equação diferencial

Cálculo Integral (em vôo de águia)



Inversão do Problema da Diferenciação

$$A(x + \Delta x) - A(x) = \Delta A$$

$$\Delta A \approx f(x)\,\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta x} = \frac{dA}{dx}$$

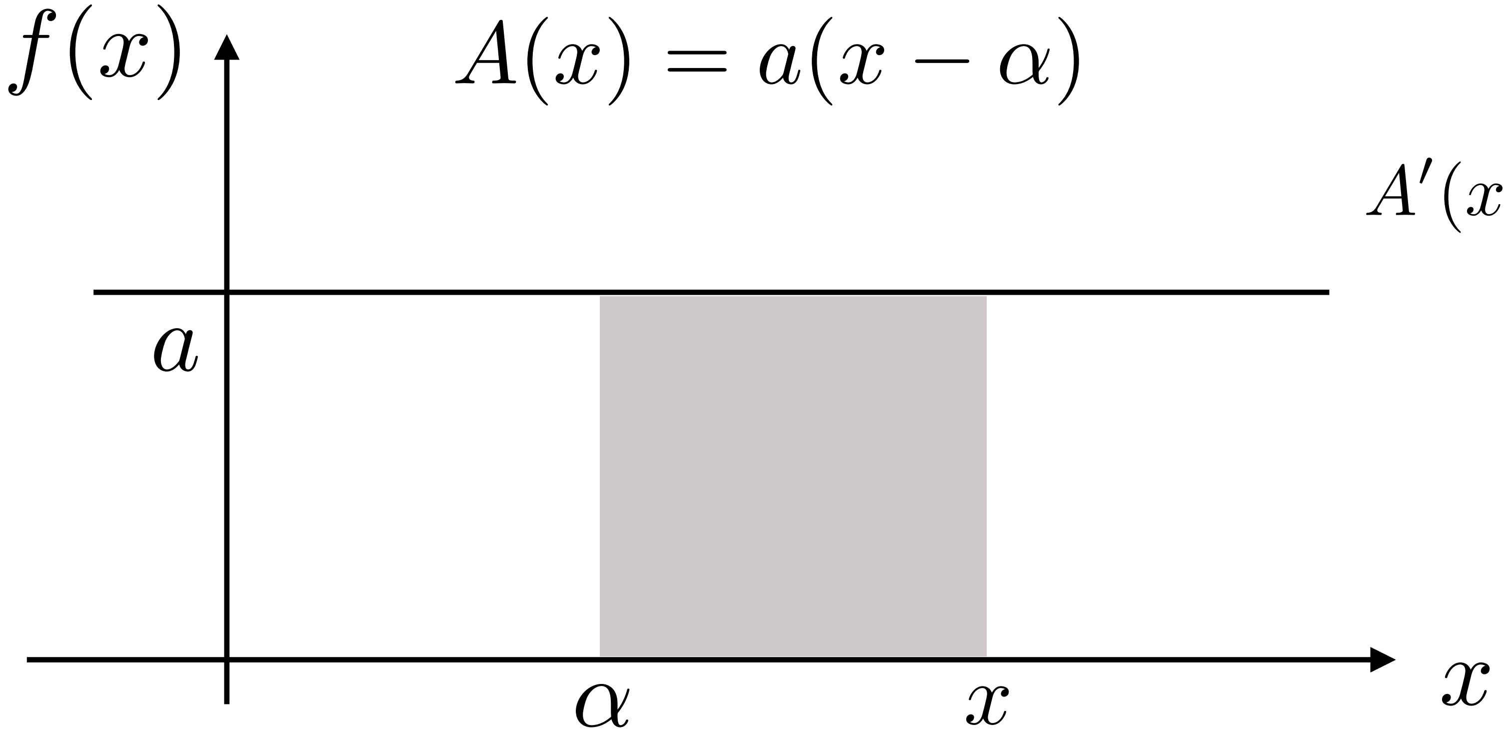
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)\Delta x}{\Delta x} = f(x)$$

de fato A(x) e f(x) estão relacionadas

$$A'(x) = f(x)$$

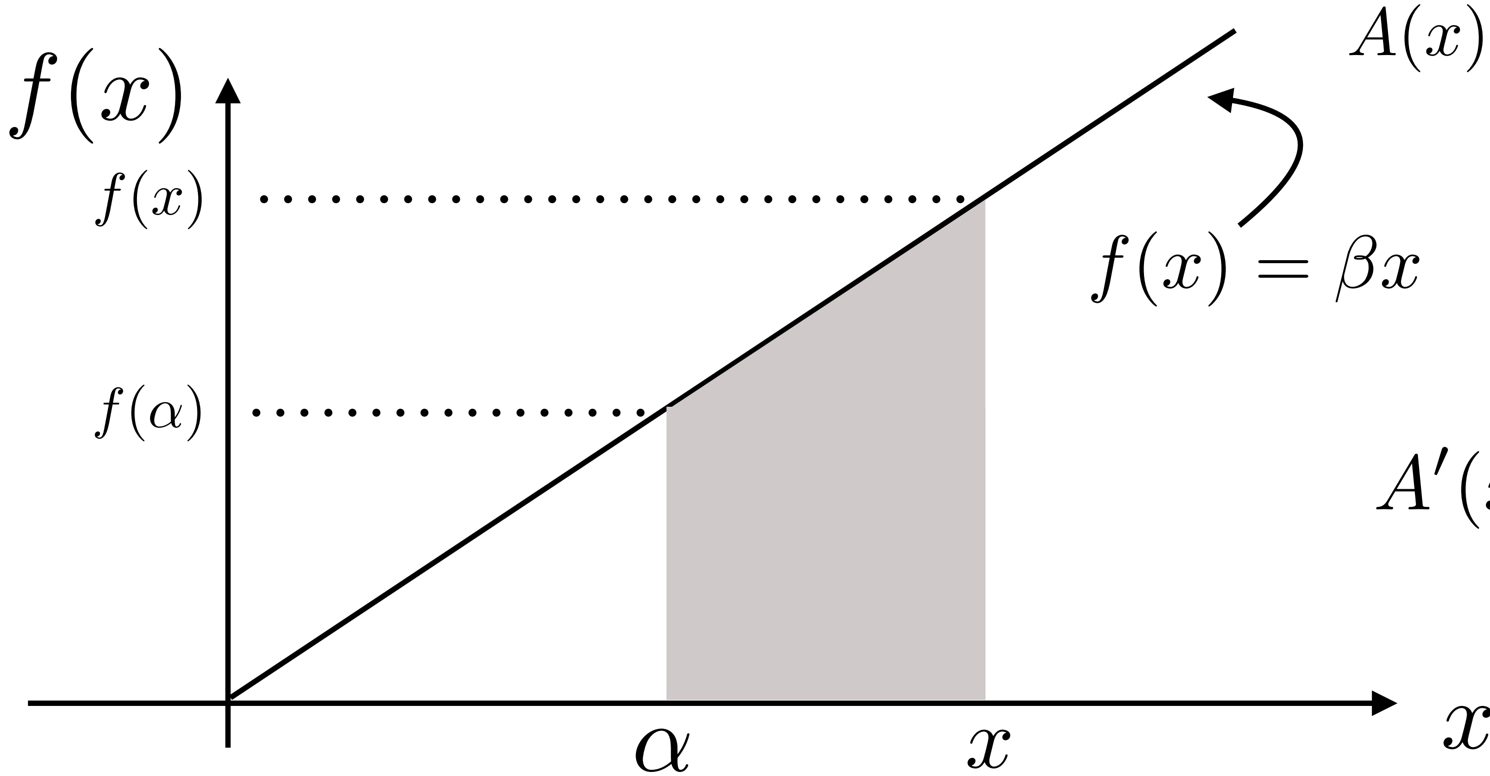
EXEMPLO I

$$A(x) = a(x - \alpha)$$



$$A'(x) = \frac{A(x)}{dx} = a = f(x)$$

EXEMPLO II



$$A(x) = \frac{1}{2}x\, f(x) - \frac{1}{2}\alpha f(\alpha)$$

$$= \frac{1}{2}\beta\, x^2 - \frac{1}{2}\alpha^2 \beta$$

$$A'(x) = \beta x = f(x)$$

Definimos a Integral F(x) de uma função f(x), escrevendo

$$f(x) = \frac{dF}{dx} \qquad F(x) = \int f(x)\,dx$$

a menos de uma constante arbitraria C

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \mathrm{C}$$

$$\int e^x\,dx = e^x + \mathrm{C}$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + \mathrm{C} \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + \mathrm{C}$$

Na Física temos nomes especiais para certas taxas de variação

velocidade (instantânea)

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt}$$

taxa de variação do deslocamento com o tempo = velocidade

aceleração (instantânea)

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

taxa de variação da velocidade com o tempo = aceleração

EXEMPLO em 1 D

Movimento Uniforme

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = v_0$$

v(t) = v_0 (constante)

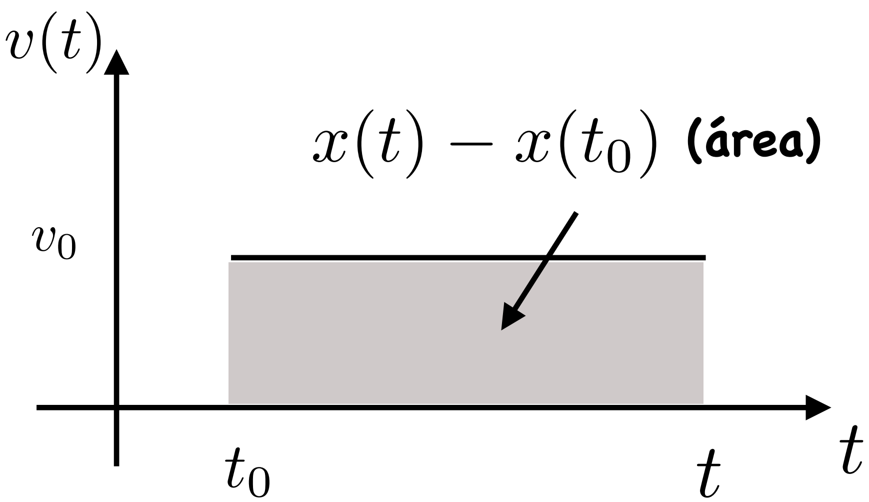
$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = 0$$

aceleração nula

$$\int_{t_0}^{t} v(t')dt' = \int_{t_0}^{t} \frac{dx(t')}{dt'}dt' = \int_{t_0}^{t} dx(t') = x(t) - x(t_0)$$

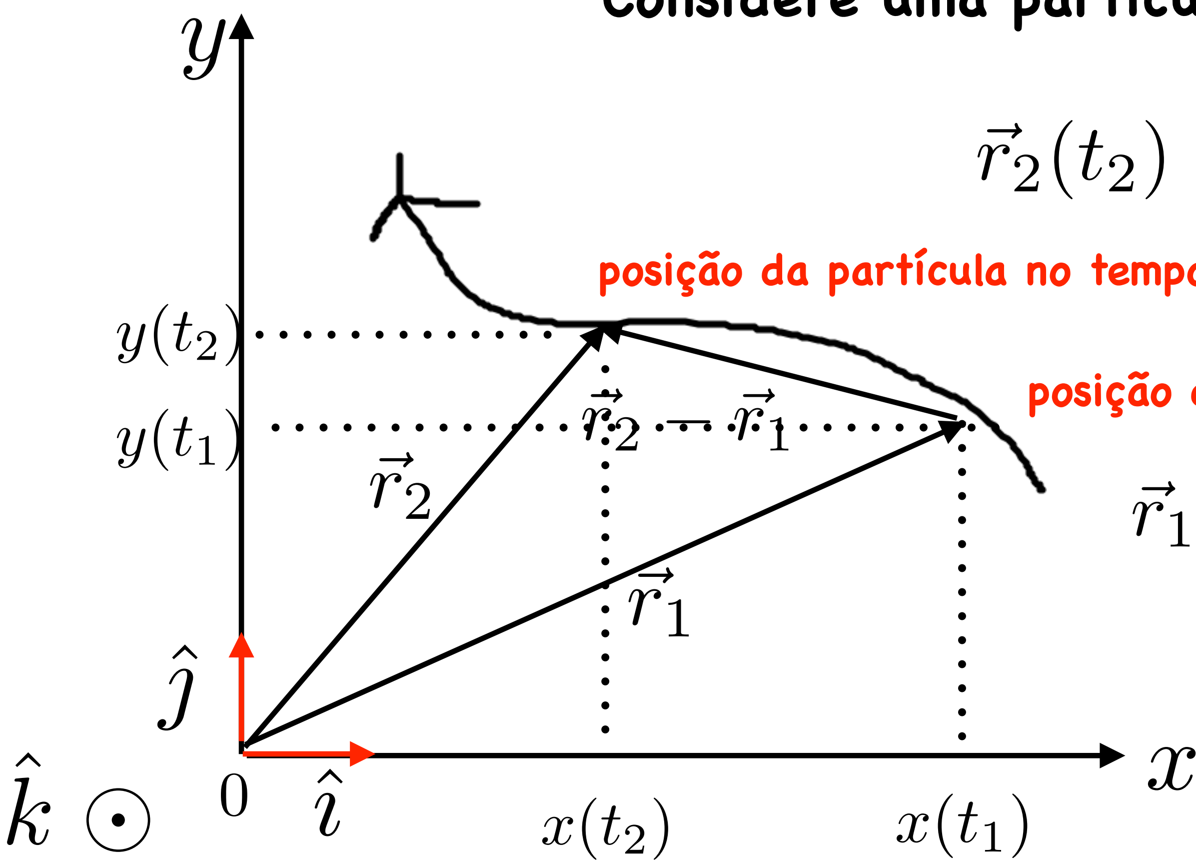
$$= v_0 \int_{t_0}^{t} dt' = v_0(t - t_0)$$

$$x(t) = x(t_0) + v_0(t - t_0)$$



Passemos agora para 3 D

Considere uma partícula movendo-se em um plano



$$\vec{r}_2(t_2) = x(t_2)\,\hat{\imath} + y(t_2)\,\hat{\jmath}$$

$$\vec{r}_1(t_1) = x(t_1)\hat{\imath} + y(t_1)\hat{\jmath}$$

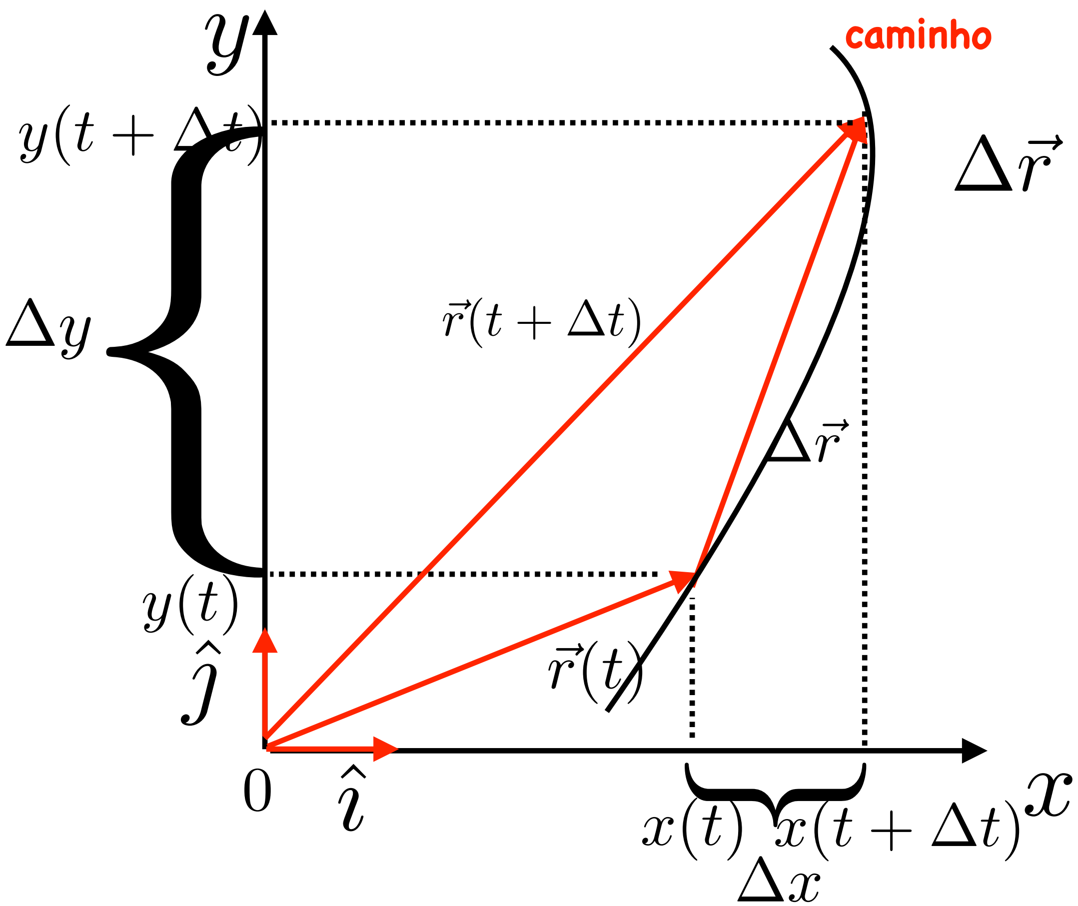
deslocamento entre t_1 e t_2

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x(t_2) - x(t_1))\,\hat{\imath} + (y(t_2) - y(t_1))\,\hat{\jmath}$$

$\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ **formam uma base de 3 versores $\perp$ entre si no sistema de coordenadas Cartesiano**

$$\hat{\imath}\cdot\hat{\imath} = \hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1 \qquad \hat{\imath}\cdot\hat{\jmath} = \hat{\jmath}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{\imath} = 0 \qquad \hat{\imath}\times\hat{\jmath} = \hat{k}$$

Generalização: deslocamento de uma partícula entre t e t+Δt



$$
\begin{aligned}
\Delta\vec{r} &= \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) \\
&= (x(t+\Delta t) - x(t))\,\hat{\imath} + (y(t+\Delta t) - y(t))\,\hat{\jmath} \\
&= \Delta x\,\hat{\imath} + \Delta y\,\hat{\jmath}
\end{aligned}
$$

assim a velocidade da partícula que se move ao longo desse caminho é definida por

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

independente de sistema de coordenadas ! (equação vetorial)

No Sistema de Coordenadas Cartesiano

$$v_x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$v_y(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y(t)}{\Delta t} = \frac{dy(t)}{dt}$$

a extensão para 3 D é trivial ...

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{\imath} + y(t)\,\hat{\jmath} + z(t)\,\hat{k}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\,\hat{\imath} + \frac{dy(t)}{dt}\,\hat{\jmath} + \frac{dz(t)}{dt}\,\hat{k}$$

$$= v_x(t)\,\hat{\imath} + v_y(t)\,\hat{\jmath} + v_z(t)\,\hat{k}$$

$$v_z(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z(t)}{\Delta t} = \frac{dz(t)}{dt}$$

Aceleração

De forma similar

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

independente de sistema de coordenadas !
(equação vetorial)

em coordenadas cartesianas

$$\vec{a}(t) = \frac{dv_x(t)}{dt}\,\hat{\imath} + \frac{dv_y(t)}{dt}\,\hat{\jmath} + \frac{dv_z(t)}{dt}\,\hat{k}$$
$$= \frac{d^2x(t)}{dt^2}\,\hat{\imath} + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\,\hat{\jmath} + \frac{d^2z(t)}{dt^2}\,\hat{k}$$

EXEMPLO I em 2 D

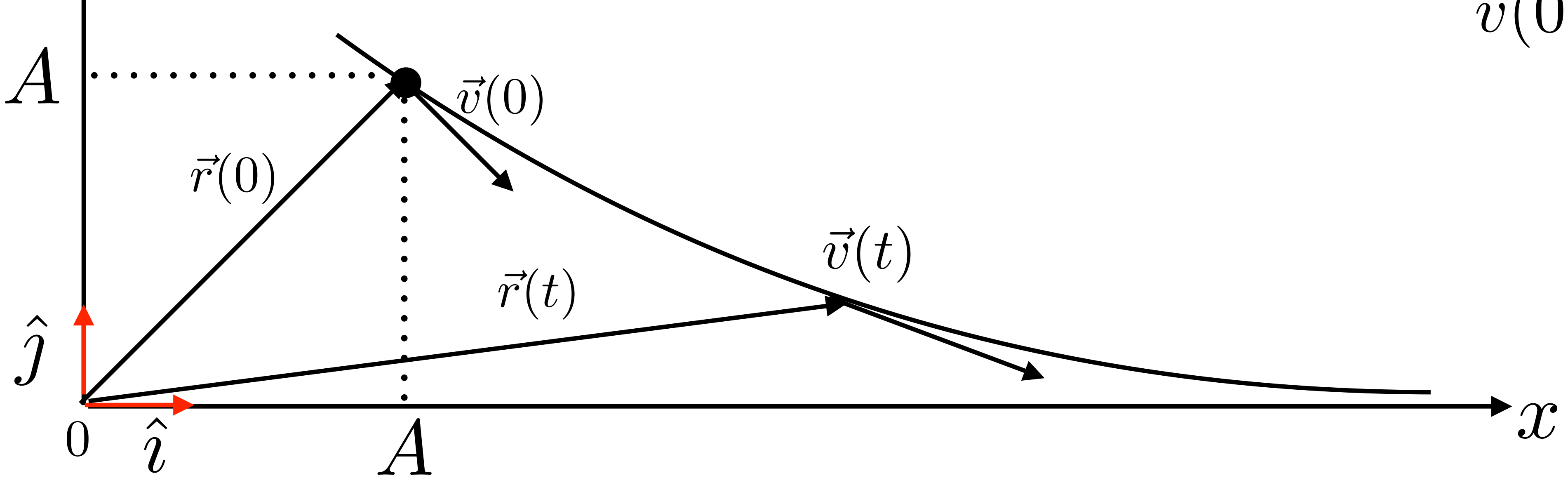
Movimento de uma partícula em um plano

$$(\alpha > 0):\ t \to \infty \quad e^{\alpha t} \to \infty \quad e^{-\alpha t} \to 0$$

$$\vec{r}(t) \to A e^{\alpha t}\hat{\imath} \qquad \vec{v}(t) \to \alpha A e^{\alpha t}\hat{\imath}$$

$$\vec{r}(0) = A(\hat{\imath} + \hat{\jmath})$$

$$\vec{v}(0) = A\alpha(\hat{\imath} - \hat{\jmath})$$



considere uma partícula cuja posição é descrita por

$$\vec{r}(t) = A(e^{\alpha t}\hat{\imath} + e^{-\alpha t}\hat{\jmath}) \qquad A, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = A\alpha(e^{\alpha t}\,\hat{\imath} - e^{-\alpha t}\,\hat{\jmath})$$

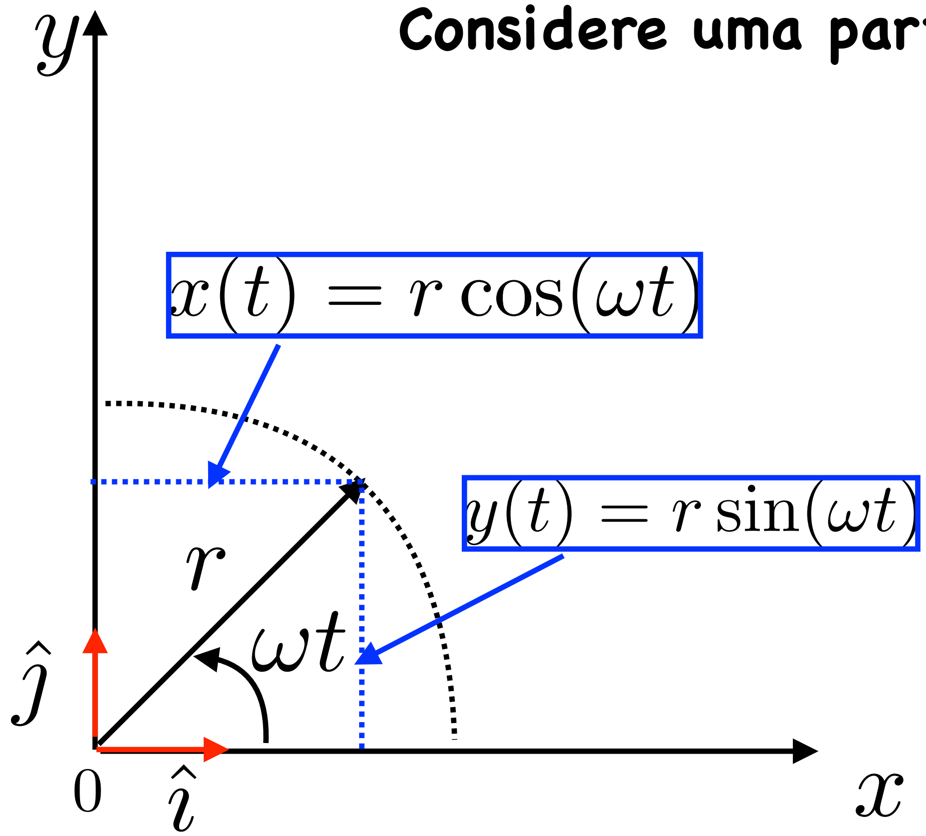
$$v_x = A\alpha e^{\alpha t}$$

$$v_y = -A\alpha e^{-\alpha t}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = A\alpha(e^{2\alpha t} + e^{-2\alpha t})^{1/2}$$

EXEMPLO II em 2 D

Movimento Circular Uniforme



Considere uma partícula movendo-se no plano xy de acordo com

$$\vec{r}(t) = r\cos(\omega t)\,\hat{\imath} + r\sin(\omega t)\,\hat{\jmath}$$

$r\ ,\ \omega$ **constantes**

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{\vec{r}\cdot\vec{r}}$$

trajetória é um círculo de raio r

a partícula de move de forma anti-horária em um círculo começando em t=0 em

$$\vec{r}(0) = r\ \hat{\imath}$$

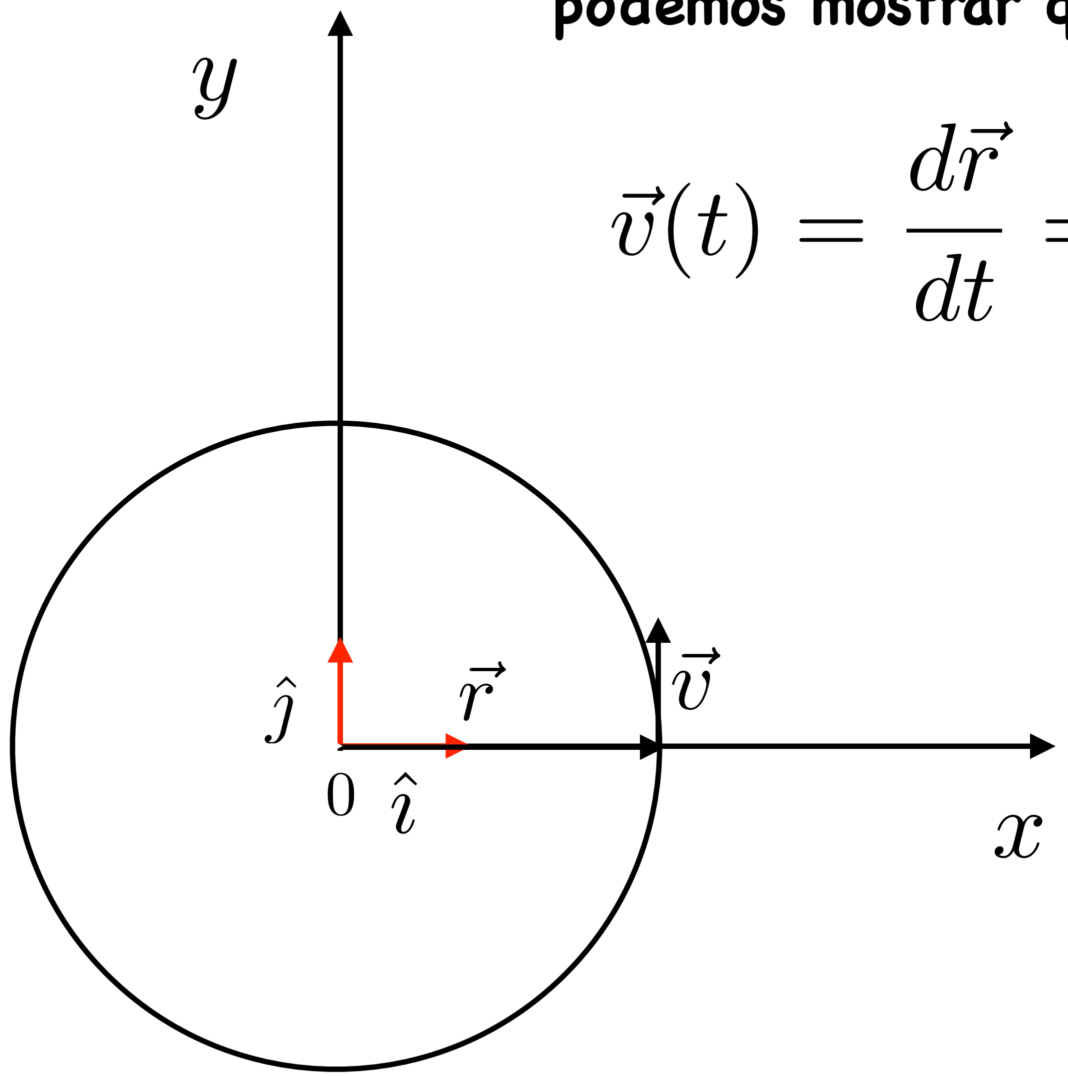
ela faz uma volta no tempo T tal que $\omega T = 2\pi$

ω **é a chamada velocidade angular (rad/s)** T **é o período**

EXEMPLO II em 2 D

Movimento Circular Uniforme

$$\vec{r}(t) = r\cos(\omega t)\,\hat{\imath} + r\sin(\omega t)\,\hat{\jmath}$$



podemos mostrar que $\vec{v} \perp \vec{r}$ **i.e. tangente à trajetória**

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = -r\omega(\sin\omega t\,\hat{\imath} - \cos\omega t\,\hat{\jmath})$$

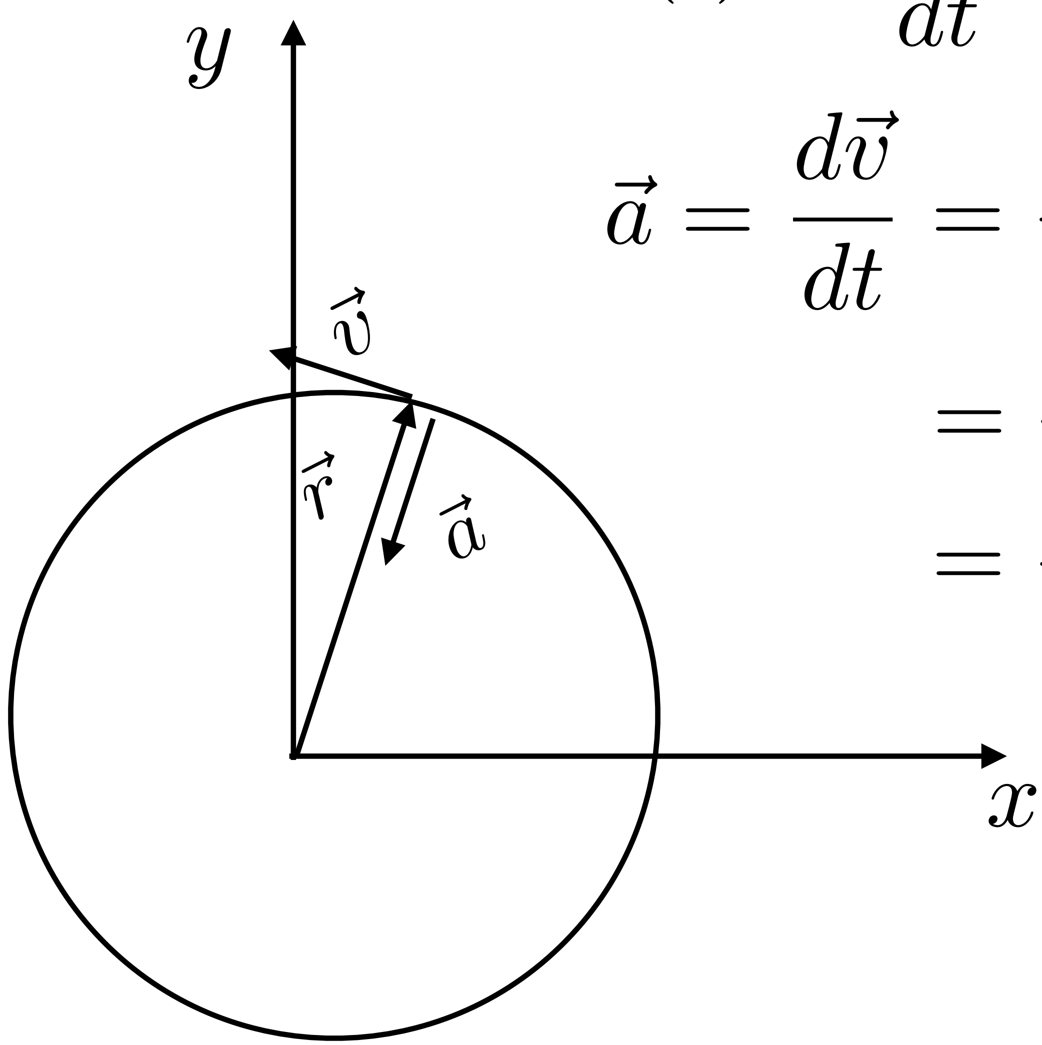
$$\vec{v}(0) = r\omega\,\hat{\jmath}$$

$$|\vec{v}| = v = \omega r$$ **constante**

$$\vec{v}\cdot\vec{r} = -r^2\omega\sin\omega t\cos\omega t + r^2\omega\sin\omega t\cos\omega t = 0$$

EXEMPLO II em 2 D

Movimento Circular Uniforme



$$\vec{r}(t) = r\cos(\omega t)\,\hat{\imath} + r\sin(\omega t)\,\hat{\jmath}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = -r\omega(\sin\omega t\,\hat{\imath} - \cos\omega t\,\hat{\jmath})$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -r\omega^2\cos\omega t\,\hat{\imath} - r\omega^2\sin\omega t\,\hat{\jmath}$$

$$= -\omega^2(r\cos\omega t\;\hat{\imath} + r\sin\omega t\;\hat{\jmath})$$

$$= -\omega^2\vec{r}$$

a aceleração é radial e aponta no sentido inverso de $\vec{r}$

esse tipo de aceleração é conhecida pelo nome de centrípeta

EXEMPLO II em 2 D

Movimento Circular Uniforme

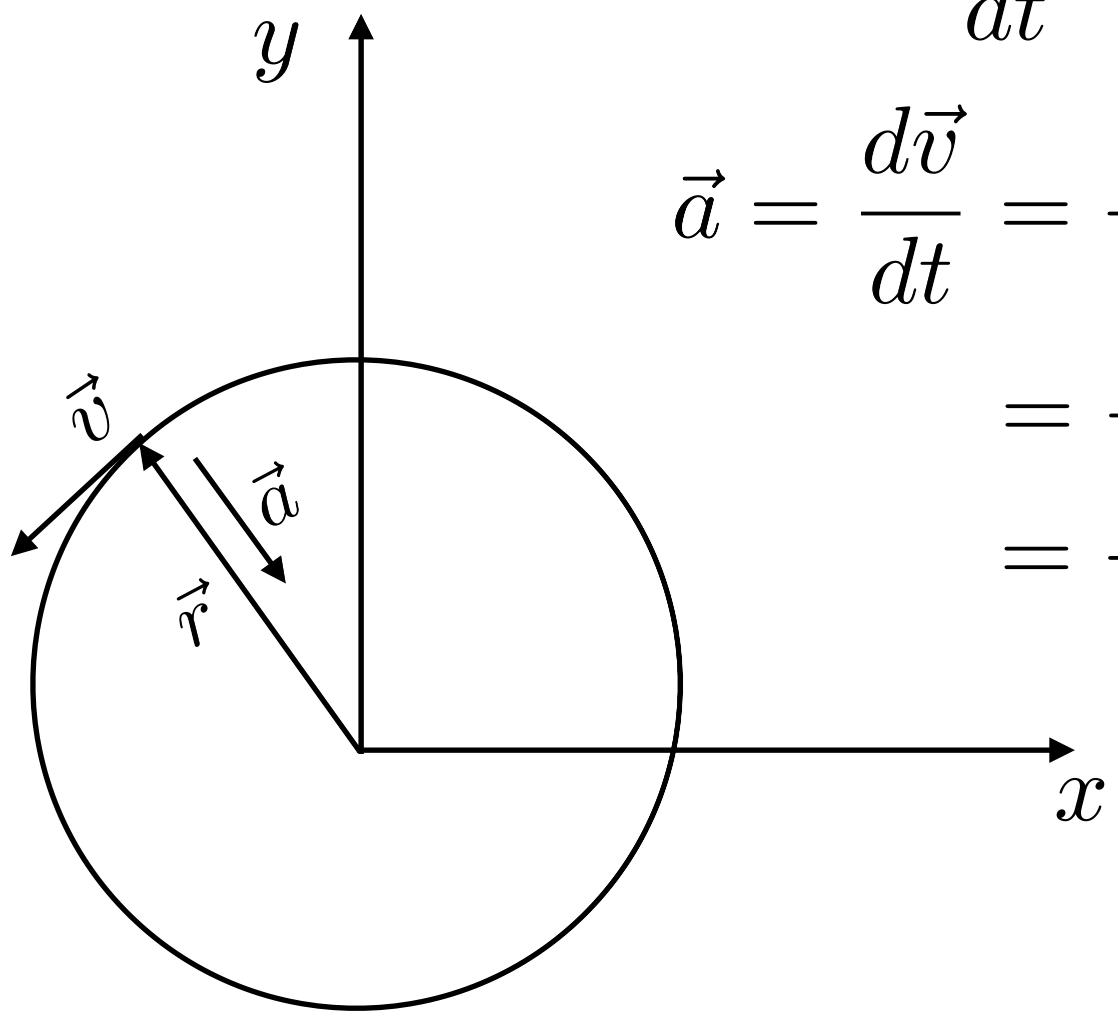
$$\boxed{\vec{r}(t) = r\cos(\omega t)\,\hat{\imath} + r\sin(\omega t)\,\hat{\jmath}}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = -r\omega(\sin\omega t\,\hat{\imath} - \cos\omega t\,\hat{\jmath})$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -r\omega^2\cos\omega t\,\hat{\imath} - r\omega^2\sin\omega t\,\hat{\jmath}$$

$$= -\omega^2\boxed{(r\cos\omega t\;\hat{\imath} + r\sin\omega t\;\hat{\jmath})}$$

$$= -\omega^2\vec{r}$$



a aceleração é radial e aponta no sentido inverso de $\vec{r}$

esse tipo de aceleração é conhecida pelo nome de centrípeta

EXEMPLO II em 2 D

Movimento Circular Uniforme

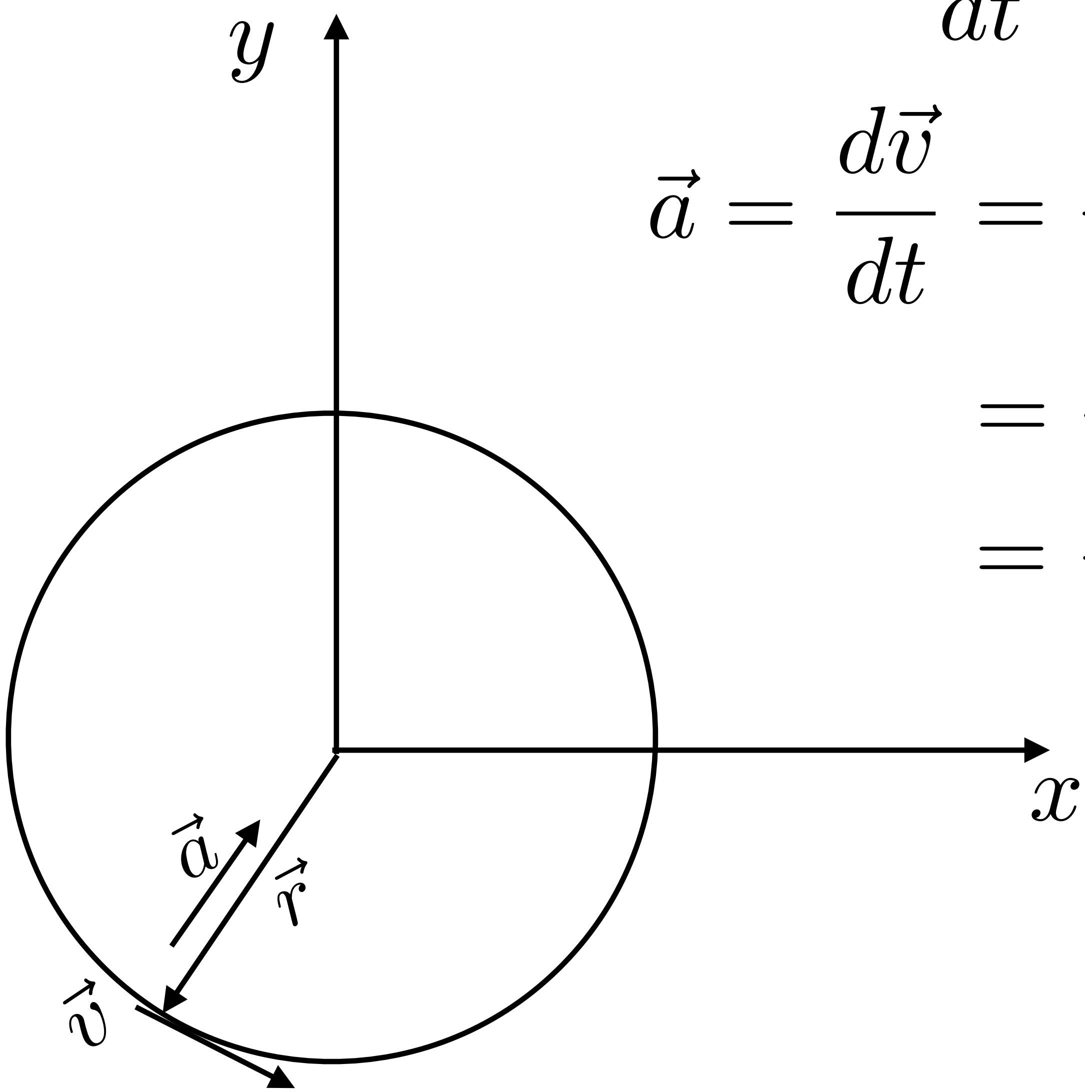
$$\vec{r}(t) = r\cos(\omega t)\,\hat{\imath} + r\sin(\omega t)\,\hat{\jmath}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = -r\omega(\sin\omega t\,\hat{\imath} - \cos\omega t\,\hat{\jmath})$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -r\omega^2\cos\omega t\,\hat{\imath} - r\omega^2\sin\omega t\,\hat{\jmath}$$

$$= -\omega^2(r\cos\omega t\;\hat{\imath} + r\sin\omega t\;\hat{\jmath})$$

$$= -\omega^2\vec{r}$$



a aceleração é radial e aponta no sentido inverso de $\vec{r}$

esse tipo de aceleração é conhecida pelo nome de centrípeta

Solução Formal do Problema

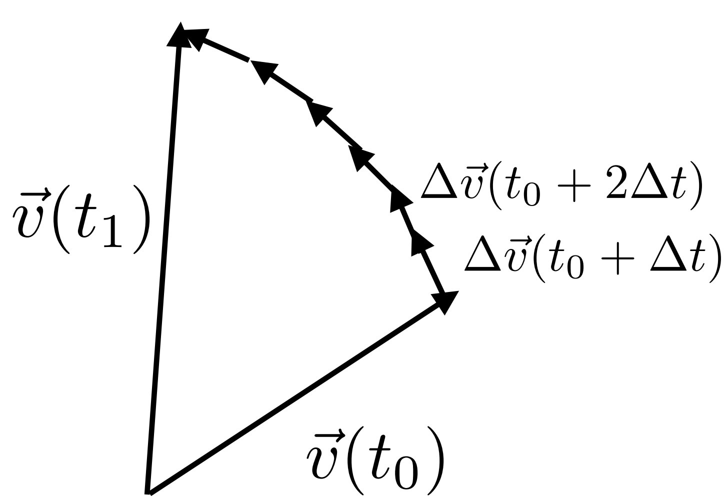
A dinâmica do processo (se conhecida!), como logo veremos, possibilita encontrar a aceleração

$$\vec{a} \rightarrow \vec{v} \rightarrow \vec{r}$$

se conhecemos a aceleração a velocidade pode ser encontrada pela Equação Diferencial

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

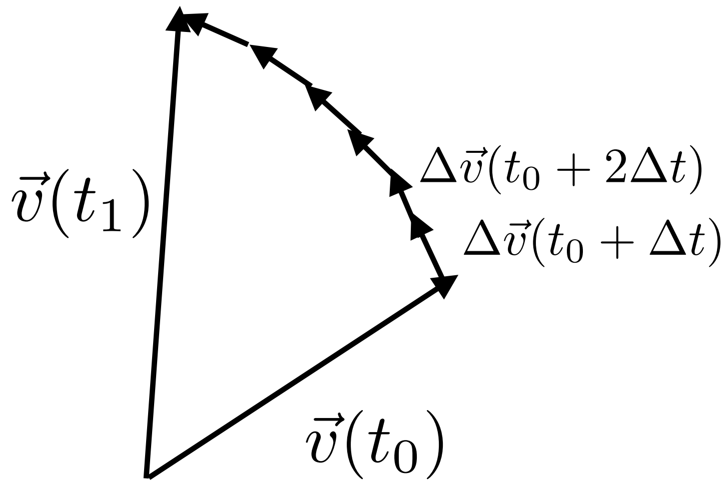
integrando com relação ao tempo



suponha que queiramos encontrar $\vec{v}(t_1)$ dado que a velocidade a velocidade inicial é $\vec{v}(t_0)$ e a aceleração é $\vec{a}(t)$

dividimos o intervalo $t_1 - t_0$ em n partes

$$\Delta t = (t_1 - t_0)/n$$



$$\Delta t = (t_1 - t_0)/n$$

usando $\Delta\vec{v}(t) \approx \vec{a}(t)\Delta t$

$$\vec{v}(t_1) \approx \vec{v}(t_0) + \Delta\vec{v}(t_0+\Delta t) + \Delta\vec{v}(t_0+2\Delta t) + ... + \Delta\vec{v}(t_1)$$

$$\approx \vec{v}(t_0) + \vec{a}(t_0+\Delta t)\Delta t + \vec{a}(t_0+2\Delta t)\Delta t + ... + \vec{a}(t_1)\Delta t$$

tomando a componente x

$$v_x(t_1) \approx v_x(t_0) + a_x(t_0+\Delta t)\Delta t + ... + a_x(t_1)\Delta t$$

no limite $n \to \infty \, (\Delta t \to 0)$ **a aproximação fica exata e a soma**

$$\sum_n a_x(t_0 + n\Delta t)\Delta t \to \int a_x(t)dt$$

logo **no limite** $n \to \infty \, (\Delta t \to 0)$

$$v_x(t_1) \approx v_x(t_0) + a_x(t_0 + \Delta t)\Delta t + \ldots + a_x(t_1)\Delta t$$

$$v_x(t_1) = v_x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} a_x(t)dt$$

e similarmente para $v_y(t_1), v_z(t_1)$

Combinando tudo temos

$$\vec{v}(t_1) = v_x(t_1)\,\hat{\imath} + v_y(t_1)\,\hat{\jmath} + v_z(t_1)\,\hat{k}$$

$$= v_x(t_0)\hat{\imath} + \int_{t_0}^{t_1} a_x(t)dt\,\hat{\imath} + v_y(t_0)\hat{\jmath} + \int_{t_0}^{t_1} a_y(t)dt\,\hat{\jmath} + v_z(t_0)\hat{k} + \int_{t_0}^{t_1} a_z(t)dt\,\hat{k}$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t')dt'$$

independente de sistema de coordenadas !
(equação vetorial)

EXEMPLO em 3 D

Movimento em um campo gravitacional

Suponha que um objeto mova-se livremente sob a influência do campo gravitacional perto da superfície da Terra. Nesse caso g=const. Escolhendo z como eixo vertical

z

$$\vec{a} = -g\,\hat{k}$$

se o objeto é solto em t = 0 com velocidade $\vec{v_0}$ temos

$$v_x(t) = v_x(0) = v_{0x} \qquad v_z(t) = v_z(0) - g\int_0^t dt'$$

$$v_y(t) = v_y(0) = v_{0y} \qquad = v_z(0) - gt = v_{z0} - gt$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

mesma equação diferencial que para a aceleração

→ mesma solução !

EXEMPLO em 3 D

Movimento em um campo gravitacional

Então

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \int_0^t \vec{v}(t')dt'$$

independente de sistema de coordenadas !
(equação vetorial)

em coordenadas cartesianas

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v_x(t')\,dt' = x(0) + v_x(0)t = x_0 + v_{0x}t$$

$$y(t) = y(0) + \int_0^t v_y(t')\,dt' = y(0) + v_y(0)t = y_0 + v_{0y}t$$

$$z(t) = z(0) + \int_0^t v_z(t')\,dt'$$

$$= z(0) + v_z(0)\int_0^t dt' - g\int_0^t t'dt' = z_0 + v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2$$

EXEMPLO em 3 D

Movimento em um campo gravitacional

Se escolhemos a origem do sistema de coordenadas tal que (arbitrario)

$$\vec{r}(0) = 0 \Longrightarrow x_0 = y_0 = z_0 = 0$$

Podemos sempre escolher o sistema de coordenadas de forma que $v_{0y} = 0$

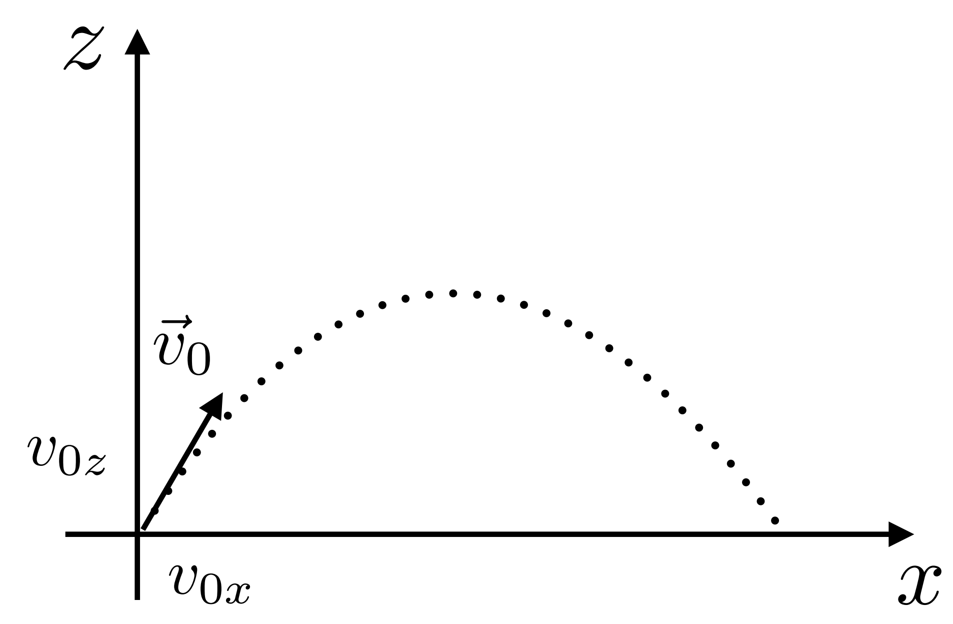
(velocidade inicial no plano xz) Porquê?

Então

$$x = v_{0x} t \qquad \Longrightarrow t = \frac{x}{v_{0x}}$$

$$z = v_{0z} t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$z = \left(\frac{v_{0z}}{v_{0x}} \right) x - \frac{g}{2 v_{0x}^2} x^2$$



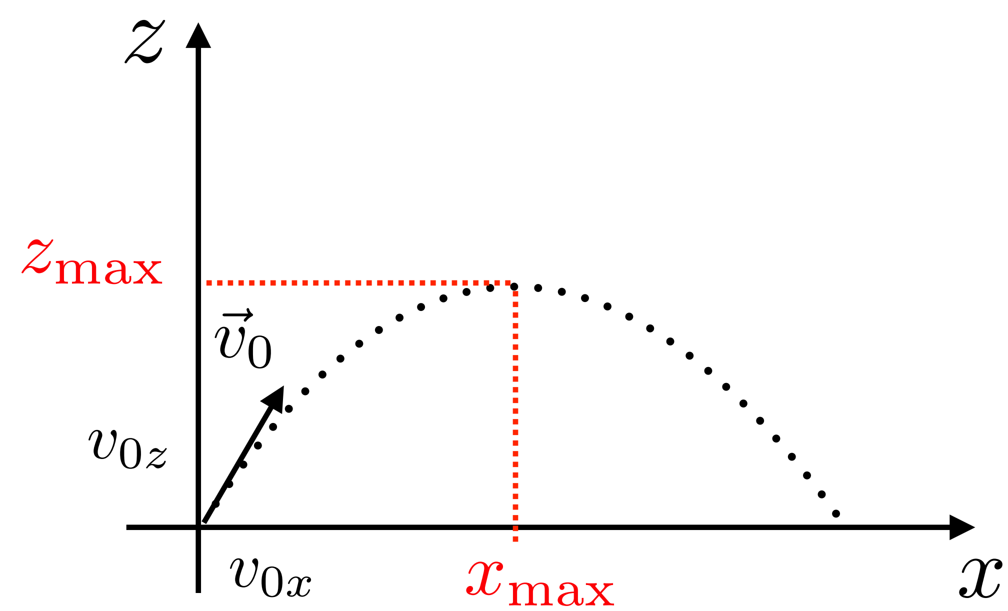
equação da trajetória

(não é o que chamamos de equação de movimento!)

Movimento em um campo gravitacional

Vamos encontrar o valor máximo de z(x)

$$z = \left(\frac{v_{0z}}{v_{0x}}\right) x - \frac{g}{2v_{0x}^2} x^2$$



$$\frac{dz}{dx} = \left(\frac{v_{0z}}{v_{0x}}\right) - \frac{g}{v_{0x}^2} x = 0$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = -\frac{g}{v_{0x}^2} < 0$$ **é máximo !**

$$x_{\rm max} = \frac{v_{0z} v_{0x}}{g}$$

$$\Longrightarrow z_{\rm max} = \left(\frac{v_{0z}}{v_{0x}}\right) \frac{v_{0z} v_{0x}}{g} - \frac{g}{2v_{0x}^2} \left(\frac{v_{0z} v_{0x}}{g}\right)^2 = \frac{1}{2} \frac{v_{0z}^2}{g}$$

EXEMPLO em 3 D

Movimento de uma Hélice

$$\vec{r}(t) = r\cos(\omega t)\,\hat{\imath} + r\sin(\omega t)\,\hat{\jmath} + \alpha\, t\,\hat{k}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = -r\omega(\sin\omega t\,\hat{\imath} - \cos\omega t\,\hat{\jmath}) + \alpha\,\hat{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -r\omega^2\cos\omega t\,\hat{\imath} - r\omega^2\sin\omega t\,\hat{\jmath} = -\omega^2\vec{r}_{\text{plano}}$$

a equação de movimento é a mesma do movimento circular !

mas a equação da trajetória não !