2021-1, "STATPHYS", AULA 02

OBJETIVOS: ILUSTRAR COMO RECORRÊNCIAS LINEARES E FUNÇÕES GERADORAS SÃO ÚTEIS NA ANÁLISE COMBINATÓRIA.

(CONT.) 1.1 ANÁLISE COMBINATÓRIA

* RECORRÊNCIAS

MUITAS VEZES, É CONVENIENTE "RESOLVER INFINITOS PROBLEMAS AO MESMO TEMPO"!

◇ EXEMPLO: DADO UM "ALFABETO" BINÁRIO $\Sigma = \{0, 1\}$, QUAL É A CARDINALIDADE DO ESPAÇO DE "PALAVRAS" $\Sigma^N = \{0,1\}^N$?

$R = 2^N$ $\blacksquare$

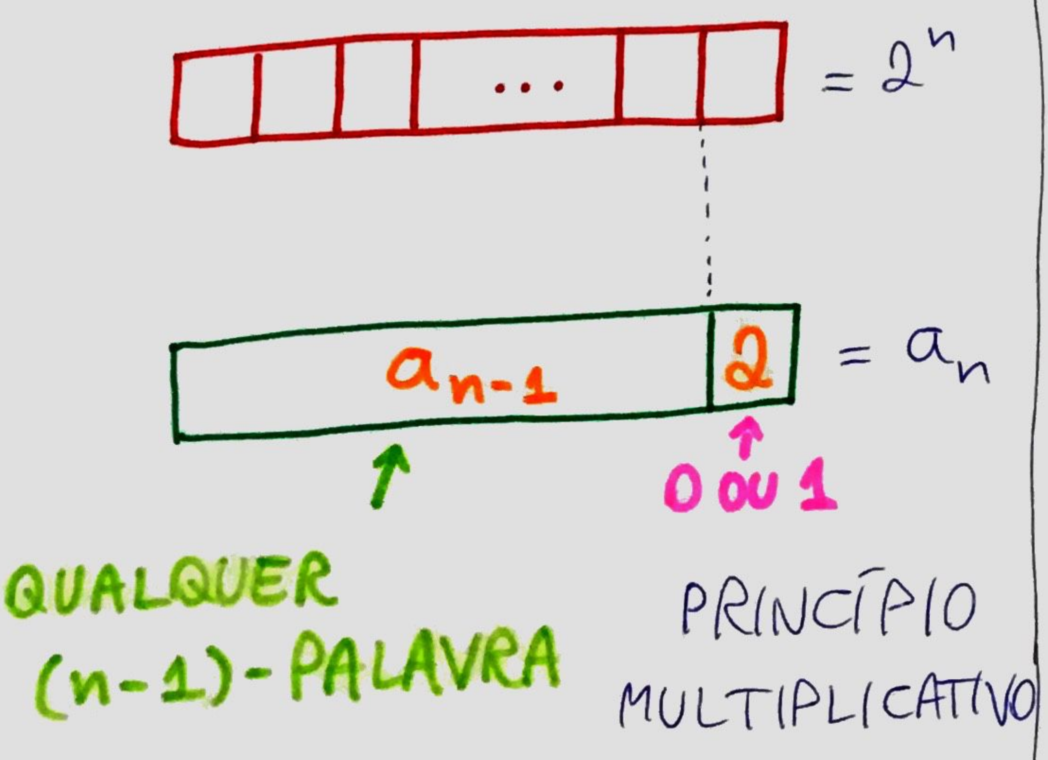
$\{0,1\} \times \ldots \times \{0,1\}$

$\boxed{2}\boxed{2}\boxed{\;\ldots\;}\boxed{2} = 2^N$

0 OU 1

EMBORA TAL SOLUÇÃO TENHA SURGIDO DIRETAMENTE, VAMOS ILUSTRAR UM RACIOCÍNIO INDIRETO QUE SERÁ A ÚNICA POSSIBILIDADE EM OUTROS CASOS.

SEJA a_n A QUANTIDADE DE TAIS SEQUÊNCIAS BINÁRIAS DE EXTENSÃO ARBITRÁRIA n.



$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = 2a_{n-1} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} = \\ &= 2(2a_{n-2}) = \\ &= \dots = \\ &= 2^{n-1} \cdot a_1 \\ &= 2^{n-1} \cdot 2 \\ &= 2^n \end{aligned}$$

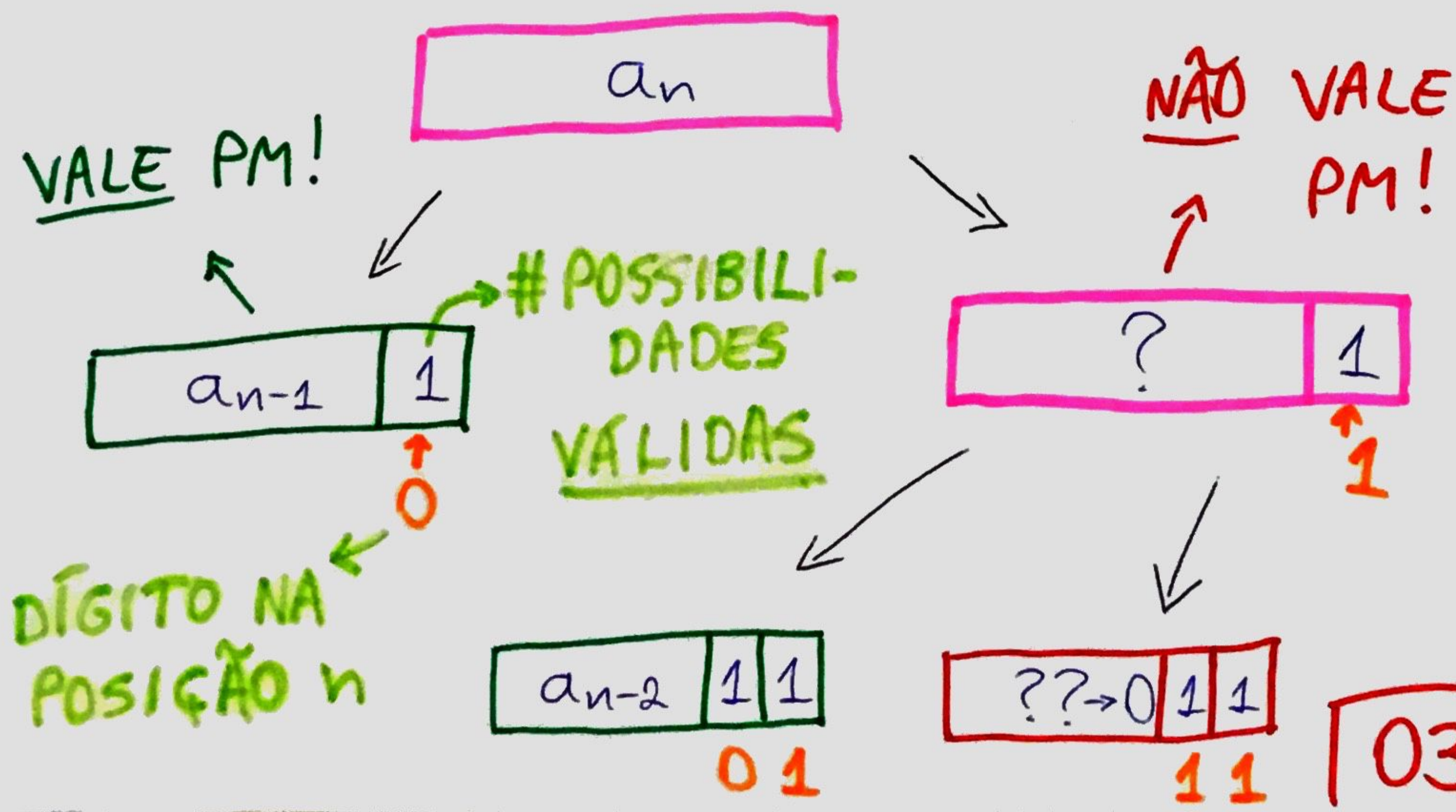
◇

UMA SEQUÊNCIA $(a_n) = (a_1, a_2, \dots)$ NADA MAIS É DO QUE UMA FUNÇÃO $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, EMBORA ÀS VEZES SEJA

CONVENIENTE INICIARMOS A INDEXAÇÃO POR <u>ZERO</u>, E NÃO POR UM. ASSIM COMO FUNÇÕES NA RETA REAL EMERGEM COMO SOLUÇÕES DE EQS. DIFERENCIAIS, SEQUÊNCIAS PODEM SATISFAZER EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS (OU <u>RECORRÊNCIAS</u>).

◇ EXEMPLO:

● QUANTAS SÃO AS SEQUÊNCIAS BINÁRIAS <u>SEM</u> 1'S CONSECUTIVOS?



$$a_n = a_{n-1} \cdot 1 + a_{n-2} \cdot 1 \cdot 1 \quad !$$

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \\ a_1 = 2 \\ a_2 = 3 \end{cases}$$

n	a_n	LISTA
1	2	(0) , (1)
2	3	(0,0) , (0,1) , (1,0)
3	5	(0,0,0) (100) (010) (001) (101)

<u>SE</u> $a_1 = 1$ E $a_2 = 1$,

SERIA FIBONACCI !!!

→ **RECORRÊNCIAS LINEARES DE COEFICIENTES CONSTANTES**

TRATAMENTO ANÁLOGO AO DAS EDOs ANÁLOGAS! ILUSTRANDO EM 2ª ORDEM:

	DISCRETO	CONTÍNUO
PROBLEMA ("DE VALOR INICIAL")	$\begin{cases} a x_n + b x_{n-1} + \\ + c x_{n-2} = f_n \\ x_1 , x_2 \end{cases}$	$\begin{cases} a\ddot{x} + b\dot{x} + \\ + c \cdot x = f(t) \\ x_0 , v_0 \end{cases}$
ANSATZ	$x_n^H = \lambda^n$	$x^H(t) = e^{\lambda t}$

SUPERPOSIÇÃO	$x_n = x_n^H + x_n^P$	$x(t) = x^H(t) + x^P(t)$
EQ. HOMOGÊNEA ASSOCIADA	$a x_n^H + b x_{n-1}^H + c x_{n-2}^H = 0$	$a \ddot{x}_H + b \dot{x}_H + c x_H = 0$
EQ. CARACTERÍSTICA	$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$	$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$
SOL. HOMOG.	$x_n^H = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n$ $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$	$x_H(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$

SOL. GERAL DEPENDE DA PARTICULAR, QUE DEPENDE DA NATUREZA DO TERMO NÃO HOMOGÊNEO. ANSATZ SIMPLES?

* FUNÇÕES GERADORAS

TODA TRANSFORMADA DIGNA DO NOME É UMA NOVA FUNÇÃO, ASSOCIADA A UMA ESPECÍFICA FUNÇÃO DE INTERESSE, QUE "LIDA BEM" COM CON-

CONVOLUÇÕES.

A **FUNÇÃO GERADORA** ASSOCIADA À SEQUÊNCIA (a_n) É

$$\boxed{g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot z^n}.$$

DADAS **DUAS** SEQUÊNCIAS, (a_n) E (b_m), SUA **CONVOLUÇÃO** É UMA **NOVA** SEQUÊNCIA (c_k) DE TERMO GERAL

$$\boxed{c_k = \sum_{i=1}^{k-1} a_i \cdot b_{k-i}}.$$

OBS. 1: PARA OUTRAS INDEXAÇÕES, OS LIMITES NO SOMATÓRIO PODEM SER AJUSTADOS.

OBS. 2: NOTAÇÃO: $\boxed{c = a * b}$

OU $(c_k) = (a_n) * (b_m)$

TEOREMA:

$$\boxed{c = a * b \Rightarrow g_c(z) = g_a(z) \cdot g_b(z)}$$

DEMONSTRAÇÃO:

$$g_c(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k c_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} z^k \left[\sum_{i=1}^{k-1} a_i \, b_{k-i} \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} a_i \, z^{i} \left[\sum_{k=i+1}^{\infty} b_{k-i} \, z^{k-i} \right]$$

$$=$$

i \ k	1	2	3	4	...
1		*	*	*	...
2			*	*	...
3				*	...
⋮				⋮	

$l \equiv k - i$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} a_i \, z^i \left[\sum_{l=1}^{\infty} b_l \cdot z^l \right]$$

$$= g_a(z) \cdot g_b(z)$$

Q.E.D.

* * EXPRESSÕES ÚTEIS

(i) TEOREMA BINOMIAL

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{i!\,j!} a^i b^j \delta_{n,i+j}}$$

$$\delta_{k,l} = \begin{cases} 1, & k=l \\ 0, & k\neq l \end{cases}$$

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b)$$

$$a^2 b = a.a.b = a.b.a = b.a.a$$

(ii) TEOREMA MULTINOMIAL

$$(a+b+c)^n = \sum_{i,j,k} \frac{n!}{i!\,j!\,k!} a^i b^j c^k \delta_{n,i+j+k}$$

(iii) TEOREMA BINOMIAL GENERALIZADO

$$\boxed{\begin{array}{l}\alpha \in \mathbb{R} \\ i \in \mathbb{N}\end{array}} \qquad \boxed{\binom{\alpha}{i} \equiv \frac{1}{i!}\,\alpha(\alpha-1)\ldots[\alpha-(i-1)]}$$

SÉRIE DE TAYLOR:

$$\boxed{(1+z)^{\alpha} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} z^{i}}$$

CASO ESPECIAL: SE $\alpha \in \mathbb{N}$,

$$\binom{\alpha}{i} = \begin{cases} \dfrac{\alpha!}{i!\,(\alpha-i)!}, & i \in \{0,1,\ldots,\alpha\} \\ 0, & \text{CASO CONTRÁRIO} \end{cases}$$

CASO MAIS ESPECIAL: $\alpha = -n$, $n \in \mathbb{N}$

$$\binom{-n}{i} = \frac{1}{i!}(-n)(-n-1)\ldots[-n-(i-1)] =$$

$$= \frac{(-1)^i}{i!}\, n(n+1)\ldots[n+(i-1)]$$

$$= \frac{(-1)^i}{i!} \cdot \frac{[n+(i-1)]!}{(n-1)!} = (-1)^i \binom{n+i-1}{i}$$

** PRIMEIROS EXEMPLOS DE CONVOLUÇÕES E FUNÇÕES GERADORAS

DE QUANTAS FORMAS O LANÇAMENTO DE 3 DADOS (USUAIS) PODE RESULTAR EM UM TOTAL DE PONTOS ≤ 6?

OS DADOS (OU "ESTADOS", OU "NÍVEIS"...) OU "URNAS" SÃO DISTINGUÍVEIS.

	4,1,1	3,2,1	3,1,1	2,2,2	2,2,1	2,1,1	1,1,1	
# PERM.	3	6	3	1	3	3	1	=20
	$\frac{3!}{2!1!}$	$3!$	$\frac{3!}{2!1!}$	1	$\frac{3!}{2!1!}$	$\frac{3!}{2!1!}$	1	

"**PRODUTO** DE POTÊNCIAS DE MESMA BASE, **SOMA** OS EXPOENTES".

"OUT OF THE BLUE SKY",

3 DADOS, 3 $h(z)$

$$g(z) \equiv \underbrace{(z^1 + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6)}_{\equiv h(z)} . h(z) . h(z)$$

SOMA DE PG: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} q^i = \frac{1-q^n}{1-q} \xrightarrow[|q|<1]{n\to\infty} \frac{1}{1-q}$

$$g(z) = \left[z(1+z+\dots+z^5)\right]^3$$

$$= \left(z\,\frac{1-z^6}{1-z}\right)^3 = z^3(1-z^6)^3.(1-z)^{-3} =$$

$$= z^3(1-3z^6+3z^{12}-z^{18})\left\{1+\binom{-3}{1}(-1)^1 z + \right.$$

$$\left. + \binom{-3}{2}(-1)^2 z^2 + \binom{-3}{3}(-1)^3 z^3 + \dots \right\} =$$

$$= z^3 \cdot 1 \cdot \left\{ 1 + \binom{3+1-1}{1}(-1)^1(-1)^1 z + \right.$$

$$+ \binom{3+2-1}{2}(-1)^2(-1)^2 z^2 +$$

$$\left. + \binom{3+3-1}{3}(-1)^3(-1)^3 z^3 \right\} + O(z^7)$$

$$= z^3 + 3z^4 + 6z^5 + 10z^6 + O(z^7)$$

$$1+3+6+10 = 20$$

QUANTAS SÃO AS SOLUÇÕES INTEIRAS NÃO NEGATIVAS DE $\sum_{i=1}^{n} x_i = m$?

$$S_{m,n} = \sum_{x_1=0}^{m} \sum_{x_2=0}^{m} \cdots \sum_{x_n=0}^{m} \delta_{m,\sum_i x_i}$$

$$= \sum_{x_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{x_n=0}^{\infty} \delta_{m,\sum_i x_i}$$

$$g_n(z) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} S_{m,n} \cdot z^m =$$

$$= \sum_{x_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{x_n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} z^m \cdot \delta_{m,\sum_i x_i} \right) =$$

$$= \sum_{x_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{x_n=0}^{\infty} \left(z^{\sum_i x_i} \right) =$$

$$= \sum_{x_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{x_n=0}^{\infty} z^{x_1} \cdot z^{x_2} \cdots z^{x_n} =$$

$$= \left(\sum_{x=0}^{\infty} z^x \right)^n = \left(\frac{1}{1-z} \right)^n = (1-z)^{-n} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \binom{-n}{m} (-z)^m = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{n+m-1}{m} z^m.$$