Aula II – Movimento Unidimensional

Vamos considerar por simplicidade o movimento unidimensional de uma partícula de massa m sujeita à uma força $\vec{F}$ genérica. Uma vez que estamos considerando apenas referenciais inerciais, seu movimento será descrito de acordo com a 2ª lei de Newton. Em outras palavras, temos que

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}, \quad (1) \quad \text{onde} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

e $\vec{F}$ pode depender do tempo, da posição, da velocidade ou ainda ser constante. Nesse tópico examinaremos cada um dos tipos de forças. Uma vez obtida uma das três "quantidades" / grandezas, seja $\underbrace{a(t)}_{\text{aceleração}}$, $\underbrace{v(t)}_{\text{velocidade}}$ e $\underbrace{x(t)}_{\text{posição}}$, as demais podem ser calculadas via uma diferenciação ou integração. É importante salientar que estamos "acostumados" com o movimento de uma partícula sujeita à uma força constante, cuja aceleração é constante.

Porém este é um movimento muito particular, não descrito na maioria dos sistemas. Um exemplo importante é o oscilador harmônico, onde a aceleração da partícula varia com o tempo.

(I) Força constante

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} = f \qquad \text{onde } f \text{ tem módulo constante}$$

Nesse caso a velocidade varia linearmente com o tempo, conforme descrito a seguir

$$v(t) = v_0 + f t$$

e finalmente

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t')\, dt'$$

$$= x_0 + v_0 t + \frac{f}{2} t^2,$$

que são as "conhecidas" relações que descrevem o movimento de uma partícula sujeita à aceleração constante.

(II) Força apenas dependentes do tempo

Forças dependentes do tempo são bastante comuns, principalmente as "forças senoidais", descrevendo uma partícula sujeita à uma força externa, por exemplo. ③

De uma maneira geral partimos da integração da equação (1) de forma que

$$v(t) = v_0 + \frac{1}{m}\int_0^t F(t')\,dt'$$

e finalmente

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t'')\,dt''$$

$$= x_0 + v_0 t + \frac{1}{m}\int_0^t dt'' \int_0^{t''} F(t')\,dt'$$

Exemplo: Suponha que uma partícula (um elétron por exemplo) esteja sujeito a um campo elétrico oscilante de forma $E = E_0 \cos(\omega t + \theta)$.

Desprezando efeitos de irradiação, a força sobre o elétron é dada por

$$F = -e E_0 \cos(\omega t + \theta) \quad e$$

$$m \frac{dv}{dt} = -e E_0 \cos(\omega t + \theta)$$

Temos então que

$$v(t) = v_0 - \frac{e E_0}{m}\int_0^t \cos(\omega t' + \theta)\,dt'$$

$$= v_0 - \frac{e E_0}{m\omega}\left[\operatorname{sen}(\omega t + \theta) - \operatorname{sen}\theta\right]$$

Caso o elétron esteja em repouso em ④ $t = 0$, teremos a seguinte expressão para $v(t)$:

$$v(t) = \frac{e E_0 \operatorname{sen}\theta}{m\omega} - \frac{e E_0}{m\omega}\operatorname{sen}(\omega t + \theta),$$

de forma que a velocidade do elétron apresenta um comportamento oscilatório! com frequência $\underline{\omega}$ que é a mesma frequência da força externa!

De forma análoga podemos obter a posição da partícula dada por

$$x(t) = x_0 + \frac{e E_0 \operatorname{sen}\theta}{m\omega}\, t - \frac{e E_0}{m\omega}\int_0^t \operatorname{sen}(\omega t' + \theta)\,dt'$$

$$= x_0 + \frac{e E_0 \operatorname{sen}\theta}{m\omega}\, t + \frac{e E_0}{m\omega^2}\left[\cos(\omega t + \theta) - 1\right]$$

Se $x_0 = 0$ (tomando $x_0 = 0$) obtemos finalmente

$$x(t) = -\frac{e E_0}{m\omega^2} + \frac{e E_0}{m\omega}\operatorname{sen}\theta\, t + \frac{e E_0}{m\omega^2}\cos(\omega t + \theta)$$

Comparando $x(t)$ e $v(t)$ vemos que $x(t)$ apresenta um termo crescente (linearmente) no tempo e um termo oscilatório $\cos(\omega t + \theta)$.

Este termo apresenta um comportamento oscilatório fora de fase com relação à $v(t)$?

(III) Forças dependentes da velocidade

No caso do movimento unidimensional, a força dependente da velocidade mais conhecida é a força de atrito. Forças de atrito de escorregamento ou de rolamento são aproximadamente constante para uma dada força normal entre um dado par de superfícies de contato. Por outro lado, num meio viscoso, como gás, líquido e etc, a dependência das forças resistivas, devidas às viscosidades, com a velocidade é mais complexa. Entretanto, ela sempre se opõe ao movimento.

De uma forma geral, podemos supor que a força resistiva (vetor força resistiva) $\vec{F}_r(v)$ seja expresso da seguinte forma:

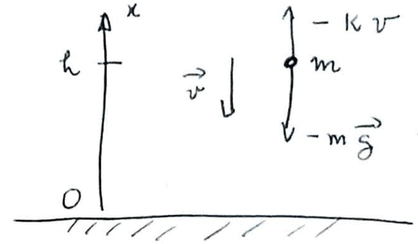
$$|\vec{F}_r|(v) = -K v^n,$$

onde a constante K expressa a magnitude da força resistiva. Experimentalmente, verifica-se para "objetos pequenos" e velocidades baixas ($v < 4\,m/s$) movendo-se no ar, $n \cong 1$. Para velocidades próximas a velocidade do som, a força resistiva é proporcional à $-Kv^2$.

Vamos examinar aqui cada um dos casos acima.

Comecemos com o movimento de uma partícula de massa m sujeita a uma força resistiva e sob a ação da força gravitacional. Assumindo que a partícula foi abandonada a partir de uma altura h com velocidade v_0, encontre $x(t)$ e $v(t)$.

Esquematizando as forças atuando sobre a partícula temos



sinal (−) por se opor ao movimento. Como $v < 0$ (dirigido para baixo) $-Kv > 0$ (dirigido para cima)

sinal (−) por termos orientado o eixo para "cima"

A equação de movimento é dada por

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{K}{m} v - g \qquad \text{onde } v(0) = v_0, \quad x(0) = h$$

A equação diferencial (linear) acima pode ser resolvida isolando-se v do lado esquerdo e dt do lado direito.

Efetuando a mudança de variável $\tilde{v} = -\frac{K}{m} v - g$ temos

$$d\tilde{v} = -\frac{K}{m} dv,$$ de forma que

$$-\frac{m}{k}\frac{d\tilde{v}}{dt} = \tilde{v} \quad \text{e}$$

então $$\frac{d\tilde{v}}{\tilde{v}} = -\frac{k}{m}\,dt$$

Integrando em ambos os lados temos

$$\int_{\tilde{v}_0}^{\tilde{v}} \frac{d\tilde{v}'}{\tilde{v}'} = -\frac{k}{m}t \Rightarrow \ln\frac{\tilde{v}}{\tilde{v}_0} = -\frac{k}{m}t$$

$$\tilde{v}(t) = \tilde{v}_0\, e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Como $\tilde{v} = -\frac{k}{m}v - g$ temos

$$\left[-\frac{k}{m}v(t) - g\right] = \left[-\frac{k}{m}v_0 - g\right] e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$v(t) = -\frac{mg}{k} + \left(v_0 + \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{k}{m}t}$$

Note que $v(0) = v_0$ como assumido anteriormente (enunciado)

Note que quando $\frac{k}{m} \ll 1$ (força resistiva pequena) $e^{-\frac{k}{m}t} \approx 1 - \frac{k}{m}t$, de forma que

$$v(t) \approx -\frac{mg}{k} + \left(v_0 + \frac{mg}{k}\right)\left(1 - \frac{k}{m}t\right) = v_0 - gt - v_0\frac{k}{m}t$$

$\approx v_0 - gt$ (movimento sujeito à força gravitacional constante).

Uma análise mais detalhada da solução $v(t)$ mostra que $v(t)$ decresce com o tempo. Isto também pode ser entendido pela equação $\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}v - g < 0$.

Em particular para $t \to \infty$ o fator $e^{-k/m\,t} \to 0$ de forma que a velocidade atinge o valor constante $v(t) \Rightarrow -\frac{mg}{k}$ também conhecida como velocidade terminal.

Integrando a expressão para $v(t)$ encontramos a posição da partícula.

$$x(t) = h + \int_0^t v(t')\,dt'$$

$$= h - \frac{mg}{k}t + \frac{m}{k}\left(v_0 + \frac{mg}{k}\right)\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

Para $\frac{k}{m} \ll 1$ $\quad \approx \quad 1 - e^{-k/m\,t} = \frac{kt}{m} - \left(\frac{k}{m}\right)^2\frac{t^2}{2}$

de forma que $x(t) = h - \frac{mgt}{k} + \frac{m}{k}\left(v_0 + \frac{mg}{k}\right) \times$

$$\times \left(\frac{k}{m}\right)\left(t - \frac{t^2}{2}\frac{k}{m}\right)$$

10

$$x(t) = h - \cancel{\frac{mg}{k} t} + v_0 t - \frac{v_0 t^2}{2}\frac{k}{m} \cancel{+ \frac{mg}{k} t}$$

$$- \frac{g t^2}{2}$$

$$= h + v_0 t - \frac{g t^2}{2}, \text{ uma vez que } \frac{k}{m} \ll 1.$$

recuperando então os resultados já obtidos anteriormente para o movimento com aceleração constante.

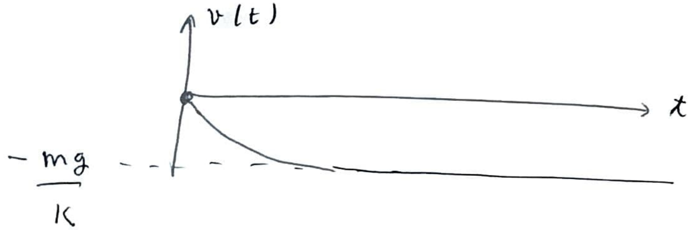
Vamos ilustrar alguns casos :

$v_0 < 0$ (descida) e

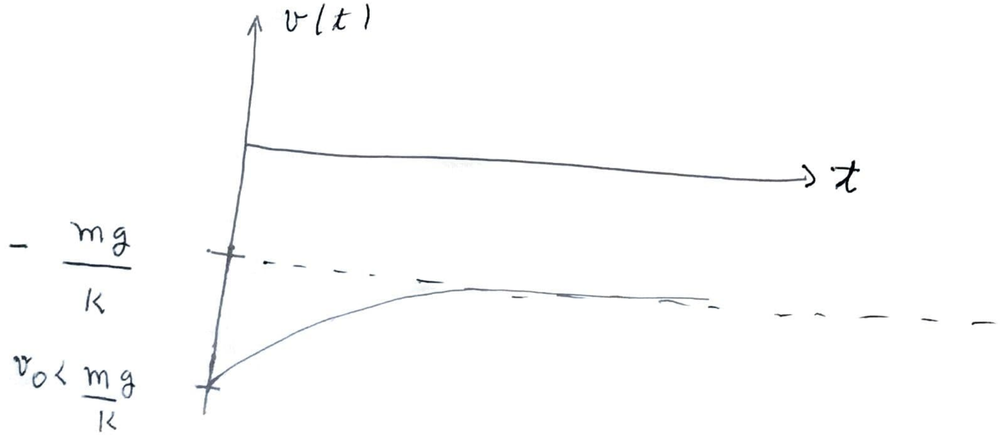
neste caso $v(t) = -\frac{mg}{K} + \left(\frac{mg}{K} - |v_0|\right) e^{-\frac{K}{m}t}$

Se $v_0 = 0$ (partícula "cair" a partir do repouso) $v(t) = +\frac{mg}{K}\left(-1 + e^{-\frac{K}{m}t}\right)$

vemos que seu movimento é descrito conforme a seguir:



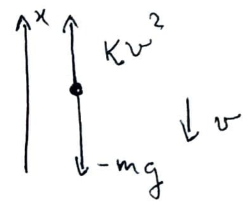
Por outro lado se $v_0 < 0$, teremos algo parecido, mas com o aspecto abaixo



Passemos agora para um caso um pouco mais complicado em que a força resistiva é do tipo $\pm kv^2$ de forma que os sinais (+) e (−) devem levar em conta o fato da força resistiva sempre se opor ao movimento

A equação de movimento é dada por

$$\frac{dv}{dt} = +\frac{K}{m}v^2 - g$$



note que como $\frac{K}{m}v^2 > 0$ (opõe ao movimento)

Para encontrarmos $v(t)$ procedemos de forma análoga ao caso anterior de forma que a equação acima é reescrita da seguinte forma

$$\frac{dv}{\frac{K}{m}v^2 - g} = dt \Leftrightarrow g\,dt = -\frac{1}{2}\left[\frac{dv}{\sqrt{\frac{K}{mg}}\,v+1} - \frac{dv}{\sqrt{\frac{K}{mg}}\,v-}\right.$$

A integração acima pode ser efetuada de forma que

$$2gt = -\sqrt{\frac{mg}{k}}\left[\ln\frac{\sqrt{\frac{k}{mg}}\,v(t)+1}{\sqrt{\frac{k}{mg}}\,v_0+1} - \ln\frac{1-\sqrt{\frac{k}{mg}}\,v(t)}{1-\sqrt{\frac{k}{mg}}\,v_0}\right]$$

ou ainda

$$gt = -\sqrt{\frac{mg}{k}}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{\frac{k}{mg}}\,v(t)}{1-\sqrt{\frac{k}{mg}}\,v(t)} - \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{\frac{k}{mg}}\,v_0}{1-\sqrt{\frac{k}{mg}}\,v_0}\right]$$

Chamando $T = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{mg}{k}}\ln\frac{1+\sqrt{\frac{k}{mg}}\,v_0}{1-\sqrt{\frac{k}{mg}}\,v_0}$

temos

$$gt = -\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{\frac{k}{mg}}\,v(t)}{1-\sqrt{\frac{k}{mg}}\,v(t)}\left(\sqrt{\frac{mg}{k}}\right) + T$$

$$-(gt-T)\sqrt{\frac{k}{mg}} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{\frac{k}{mg}}\,v(t)}{1-\sqrt{\frac{k}{mg}}\,v(t)}$$

A expressão ao lado pode ser invertida, de forma que.

chegamos finalmente ao resultado,

$$\sqrt{\frac{k}{mg}}\,v(t) = -\tanh\left[\sqrt{\frac{k}{mg}}\,(gt-T)\right]$$

Ou ainda:

$$v(t) = -\sqrt{\frac{mg}{k}}\tanh\left[\sqrt{\frac{k}{mg}}\,(gt-T)\right]$$

Vamos estudar dois limites: "baixo amortecimento" e tempos longos.

Quando $k \ll mg$, Neste caso, $v(t)$ torna-se

$$\tanh\left[\sqrt{\frac{k}{mg}}\,(gt-T)\right] \approx \sqrt{\frac{k}{mg}}\,(gt-T)$$ e

portanto $v(t) \approx -(gt-T)$, que é a equação da queda livre.

Por outro lado $\tanh\left[\sqrt{\frac{k}{mg}}\,(gt-T)\right] \longrightarrow 1$ quando $t \to \infty$, de forma que

$v(t) \longrightarrow \sqrt{\frac{mg}{k}}$ que é a velocidade terminal obtida quando

$$\frac{dv}{dt} = kv^2 - mg = 0$$

sinal referente à queda!

e $v = -\sqrt{\frac{mg}{k}}$

Cálculo da posição:

$$x(t) = h + \int^t v(t')\,dt' = h - \frac{m}{k}\ln\left\{\cosh\left[\sqrt{\frac{k}{mg}}\,(gt-T)\right]\right\}$$

note que $x(t) \neq h$ quando $t=0$ $+\frac{m}{k}\ln\left[\cosh\sqrt{\frac{k}{mg}}\,T\right]$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -g\,\mathrm{sech}^2\left[\sqrt{\frac{k}{mg}}\,(gt-T)\right]$$

Quando $t \to \infty$, $\mathrm{sech}^2[\;\;] \to 0$ e portanto $a \to 0$ (velocidade constante

Forças dependentes da posição

Conforme vimos anteriormente, no caso em que uma partícula de massa $\underline{\underline{m}}$ é sujeita a uma força que depende apenas da posição, $F(x)$, a equação de movimento é dada por

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(x) \qquad \left(\text{ou } m\ddot{x} = F(x)\right),$$

que é equivalente à equação

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \int_{x_0}^{x} F(x')\,dx', \quad \text{que}$$

a integral acima corresponde ao trabalho realizado entre dois pontos $\underline{\underline{x_0}}$ e $\underline{\underline{x}}$.

Conforme também vimos anteriormente, quando a força $F(x)$ for conservativa, o trabalho realizado entre dois pontos $\int_{x_0}^{x} F(x')\,dx$ pode ser escrito como $-\left[U(x) - U(x_0)\right]$ (o negativo da variação da energia potencial entre dois pontos)

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -U(x) + U(x_0)$$

$$\text{ou } \frac{1}{2}mv_0^2 + U(x_0) = \frac{1}{2}mv^2 + U(x).$$

o lado direito é justamente a energia total (energia mecânica), que é sempre conservada.

Então, temos que

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(x) \quad \text{ou}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = E - U(x)$$

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{2}{m}\left[E - U(x)\right]\right)^{1/2},$$

ou ainda

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(x)\right)}}.$$

Se integrarmos a equação acima em ambos os lados, temos que

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(x')\right]}},$$

e a solução $x(t)$ será encontrada.

Alguns comentários:

1) Cabe ressaltar que a relação entre trabalho realizado e variação da

energia potencial será válida apenas
para forças conservativas. Esse é o caso de uma força que depende apenas da posição em uma dimensão, uma vez que

$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = \int_{x_0}^{x} F(x')dx' + \int_{x}^{x_0} F(x')dx' = 0,$$

pois $\int_{x_0}^{x} F(x')dx'$ somente dependerá da integral calculada entre x e x_0.

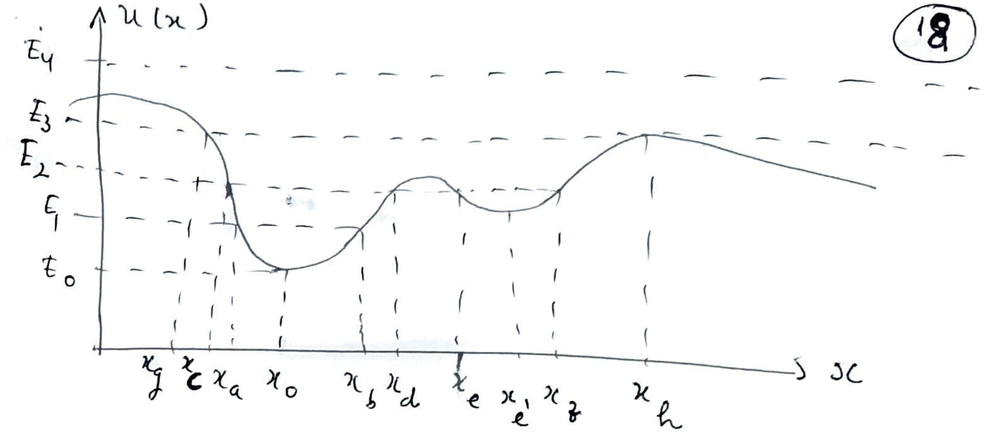
Outra forma de verificarmos isto é certificarmos que $\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$, pois

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F(x) & 0 & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ F(x) & 0 \end{matrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}F(x)\vec{j} - \frac{\partial}{\partial y}F(x)\vec{k} = 0.$$

2) Como $\frac{1}{2}mv^2 = E - u(x) \geq 0$ (sempre), o movimento da partícula estará restrito à região em que $\underline{\underline{u(x) \leq E}}$.

Examinemos a seguir um caso genérico.



~~Exemplos~~

1) Para $E = E_0$ o movimento da partícula tem apenas um valor $x = x_0$. Ela permanece em repouso em $x = x_0$ $[E_0 = u(x_0)]$

2) Para $E = E_1$, a partícula executa um movimento oscilatório entre x_a e x_b. Estes são chamados pontos de retorno, uma vez que a velocidade da partícula se anula ~~em~~ nesses pontos $v_a(x_a) = 0 = v_b(x_b)$, onde $E_1 = u(x_a) = u(x_b)$.

3) Para $E = E_2$, há duas possibilidades: movimento oscilatório entre x_c e x_d $\underline{\underline{\text{ou}}}$ entre x_e e x_f. Não é possível a

partícula tunelar entre essas regiões, uma vez que $E \leq U(x)$ entre a região $x_d \leq x \leq x_e$.

Na Mecânica Quântica a possibilidade de tunelamento é possível, mas não na Física Clássica.

3) Para $E = E_3$, o movimento é limitado entre as regiões, x_g e x_h. Porém há uma diferença importante entre os pontos x_g e x_h conforme descreveremos a seguir.

4) Para $E = E_4$, o movimento será ilimitado, de forma que a partícula "poderá estar" em qualquer posição, sendo acelerada ou desacelerada, dependendo da posição.

Discussão sobre as posições

Pontos de equilíbrio estável

Os pontos $x = x_0$ e $x = x_e'$ são chamados de pontos de equilíbrio estável. Basicamente para $E = E_1$ ou $E = E_2$, a partícula ~~será~~ iniciará um movimento oscilatório em torno dessas posições de equilíbrio ($E = E_1$, oscilação em torno de $x = x_0$ e para $E = E_2$, $x = x_0$ ou $x = x_e'$)

Pontos de retorno

Os pontos x_a e x_b (para $E = E_1$), x_c e x_d (para $E = E_2$), x_e e x_f (para $E = E_2$) e x_g para $E = E_3$ são chamados pontos de retorno. Neles toda energia está sob a forma de energia potencial e a partícula para. Porém nos pontos de retorno as partículas estão sujeitas à uma força $F(x) \neq 0$ e contrariá à direção do movimento. Por esta razão, o movimento reinicia (como no pêndulo simples ou oscilador harmônico quando a partícula atinge a posição de máximo deslocamento angular ou deslocamento, respectivamente).

Pontos de equilíbrio instável

O ponto x_h para $E = E_3$ é um ponto de equilíbrio instável. A velocidade se anula porém neste ponto $F(x_h) = 0$.

Diferentemente do ponto de equilíbrio estável, para qualquer $E \to E_3 + \delta E_3$, a partícula jamais retornará a este ponto e daí o fato de ser equilíbrio instável.

Matematicamente, o que distingue cada um dos pontos pode ser visto a seguir:

Expandindo a energia potencial em série de Taylor, em torno de um dado ponto x_0 temos que

$$u(x) = u_0 + \left(\frac{du}{dx}\right)\Bigg|_{x=x_0}(x-x_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)\Bigg|_{x=x_0}(x-x_0)^2 + \dots$$

O termo $\left(\frac{du}{dx}\right)\Big|_{x=x_0}$ identifica-se com $-F(x)$ calculada em $x = x_0$.

No ponto de equilíbrio estável, $u(x)$ é mínima de forma que

$$F(x) = 0 \quad e \quad \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)\Bigg|_{x=x_0} > 0$$

Se o ponto de equilíbrio for instável,

$$F(x) = 0 \quad e \quad \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)\Bigg|_{x=x_0} < 0$$

Se o ponto for de retorno,

$$F(x) \neq 0 \quad e \quad \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)\Bigg|_{x=x_0} \neq 0$$

Em particular, se a partícula move-se para a direita, $F(x)$ é dirigida para a esquerda, de forma que ela será desacelerada até parar no ponto de retorno e retornará ao ponto de equilíbrio estável, caracterizando um movimento oscilatório.

O trecho da partícula mover-se para a esquerda até parar (já que $F(x)$ agora será dirigida para direita é análogo).

Vamos ilustrar os conceitos acima numa energia potencial do tipo

$$u(x) = ax^2 - bx^3 \quad (a, b > 0)$$

a)

Precisamos ilustrar $u(x)$ e $F(x)$ ~~os~~ ~~mas~~ bem como encontrar seus máximos e mínimos.

<u>$u(x)$</u>

$u(x) = 0$ quando $x = 0$ e $x = \frac{a}{b}$

$u'(x) = 2ax - 3bx^2 = 0$ quando $x = 0$ e $x = \frac{2a}{3b}$

$u''(x) = 2a - 6bx$

$u''(0) = 2a > 0$ ($x = 0$ é um ponto de mínimo)

$u''\left(\frac{2a}{3b}\right) = 2a - \frac{12a}{3} = -2a < 0$

($x = 2a$ é um ponto

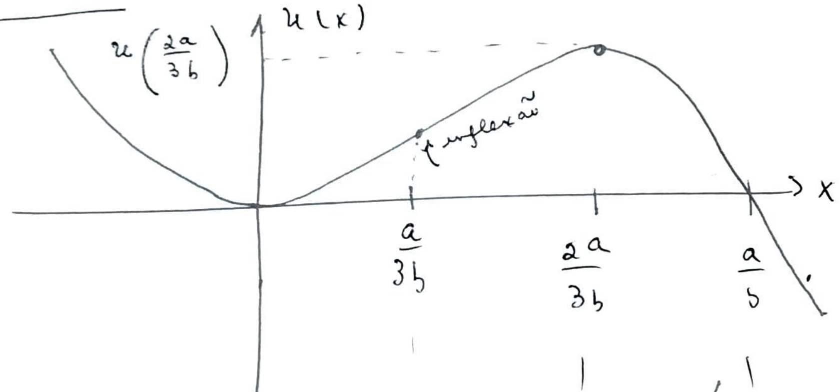
$u''(x) = 0$ quando $x = \frac{a}{3b}$ (ponto de inflexão)

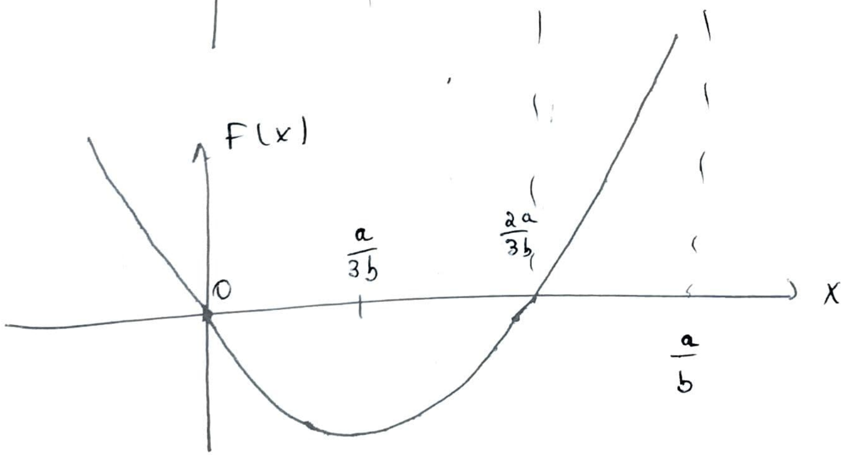
$F(x) = -\frac{du}{dx} = 3bx^2 - 2ax$ $\left(\begin{array}{l} F(x) = 0 \text{ em } x = 0 \\ \text{e em } x = \frac{2a}{3b} \end{array} \right)$

$F(x) > 0$ quando $x < 0$ ou $x > \frac{2a}{3b}$

$F(x) < 0$ quando $0 < x < \frac{2a}{3b}$

Portanto:





b) A partícula inicia o movimento na origem com velocidade v_0. Mostre que se $|v_0| < v_c$, onde v_c é uma certa velocidade crítica, a partícula fica confinada numa certa região da origem. Determine v_c.

Como $E = \frac{1}{2} m v_0^2 + u(0) = \frac{1}{2} m v_0^2$, essa é sua energia mecânica.

Em particular se $E < u\left(\frac{2a}{3b}\right)$,

o movimento da partícula será oscilatório.

Portanto se $\frac{1}{2} m v_0^2 < \frac{4a^3}{27b^2}$, seu movimento será oscilatório

Se $\frac{1}{2} m v_0^2 > \frac{1}{2} m v_c^2 = \frac{4a^3}{27b^2}$, ela "escapará",

de onde obtemos $v_c^2 = \frac{8a^3}{27b^2 m}$ $\Rightarrow$ $v_c = \sqrt{\frac{8a^3}{27b^2 m}}$